*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1*

*УДК 517.98*

# ПОРЯДКОВЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА СИЛЬНО АДДИТИВНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

**А. И. Сотников**

**Аннотация:** Изучаются основные свойства упорядоченной банаховой алгебры сильно аддитивных переходных функций и исследуются ее взаимосвязи с пространствами линейных операторов, векторных мер и измеримых вектор-функций. В частности, показывается, что любая сильно аддитивная переходная функция допускает (единственное) разложение в сумму счетно-аддитивной и чисто конечно-аддитивной составляющих.

**Ключевые слова:** измеримые пространства, сильно аддитивные переходные функции, сильно счетно аддитивные переходные функции, сильно аддитивные векторные меры, упорядоченное векторное пространство.

## Введение

Работа является продолжением статьи [1], в которой изучается множество $\mathscr{P}(X,\Sigma)$, наделенное структурой упорядоченной банаховой алгебры, и исследуется его взаимосвязь с классическими пространствами линейных операторов, векторных мер и измеримых вектор-функций. Там же (см. [1, § 5]) введены и исследованы пространства $\mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)$ и $\mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)$ счетно-аддитивных и чисто конечно-аддитивных переходных функций и показано, что они являются взаимно дополнительными полосами относительно естественной дизъюнктности. В частности, установлено, что разложение

$$\mathscr{P}(X,\Sigma) = \mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma) \oplus \mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)$$

не всегда имеет место (см. [1, 5.7]).

В данной работе мы рассматриваем подпространство $\mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma) \subset \mathscr{P}(X,\Sigma)$, состоящее из сильно аддитивных переходных функций, и показываем, что любая такая переходная функция допускает (единственное) разложение в сумму счетно-аддитивной и чисто конечно-аддитивной составляющих. Мы также исследуем порядковые, метрические и алгебраические свойства пространства $\mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma)$ и устанавливаем его взаимосвязи с соответствующими пространствами линейных операторов, векторных мер и измеримых вектор-функций.

Основные используемые нами обозначения, определения и факты из теории упорядоченных пространств, линейных операторов, конечно-аддитивных мер, векторных мер и измеримых вектор-функций можно найти в [1, § 2, 3], а также в [2–10]. Ниже приведен ряд дополнительных обозначений, которые будут использованы в дальнейшем.

Пусть $V$ и $W$ — нормированные пространства (над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел). Условимся обозначать через $\mathscr{K}_w(V,W)$ совокупность всех слабо компактных операторов из $V$ в $W$, т. е. таких операторов $T : V \to W$, что для любого ограниченного подмножества $U \subset V$ слабое замыкание множества $T(U)$ слабо компактно в $W$.

Символом $\mathscr{K}\mathscr{L}_w(V', W')$ будем обозначать множество всех слабо*-слабо непрерывных операторов из $V'$ в $W'$, т. е. таких операторов $T : V' \to W'$, что для любой сети $(v'_\alpha)_{\alpha \in A}$ в $V'$ и любого элемента $v' \in V'$ слабая* сходимость $v'_\alpha \to v'$ в $V'$ влечет слабую сходимость $Tv'_\alpha \to Tv'$ в $W'$. Предложенное обозначение обусловлено соотношением $\mathscr{K}\mathscr{L}_w(V', W') \subset \mathscr{K}_w(V', W')$ (доказательство которого имеется, например, в [11, VI.4.7]) и очевидным включением $\mathscr{K}\mathscr{L}_w(V', W') \subset \mathscr{L}_w(V', W')$.

Для нормированных решеток $V$ и $W$ символом $\mathscr{K}_{wo}(V, W)$ условимся обозначать пересечение пространств $\mathscr{K}_w(V, W)$ и $\mathscr{L}_o(V, W)$.

Пусть $V$ — банахово пространство и $(X, \Sigma)$ — измеримое пространство. Векторная мера $m \in ba(\Sigma, V)$ называется *счетно-аддитивной*, если для любой последовательности $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно дизъюнктных измеримых множеств ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ сходится по норме к $m\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)$. Известно (см., например, [12, IV.10.1]), что векторная мера $m$ счетно-аддитивна в том и только том случае, если для любого функционала $\varphi \in V'$ скалярная мера $\varphi \circ m$ счетно-аддитивна. Множество всех счетно-аддитивных ограниченных векторных мер обозначим через $ca(X, \Sigma, V)$ или $ca(\Sigma, V)$.

Векторную меру $m \in ba(\Sigma, V)$ называют *сильно аддитивной*, если для любой последовательности $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно дизъюнктных измеримых множеств ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ является сходящимся по норме. Известно (см., например, [12, I.5.3]), что векторная мера сильно аддитивна тогда и только тогда, когда она абсолютно непрерывна относительно некоторой конечно-аддитивной скалярной меры. Множество всех сильно аддитивных ограниченных векторных мер обозначим через $sa(X, \Sigma, V)$ или $sa(\Sigma, V)$.

Через $\ell^\infty_{wk}(X, ba(\Sigma))$ обозначается пространство всех ограниченных слабо* измеримых вектор-функций из $X$ в $ba(\Sigma)$, образ которых слабо компактен в $ba(\Sigma)$, а через $\ell^\infty_{wk}(X, ca(\Sigma))$ — его подпространство, состоящее из функций, образ которых лежит в $ca(\Sigma)$.

## Сильно аддитивные переходные функции

Пусть $(X, \Sigma)$ — произвольное измеримое пространство и $\mathscr{P}(X, \Sigma)$ — упорядоченная банахова алгебра переходных функций, введенная в [1, § 4]. Там же введены и исследованы пространства $\mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$ и $\mathscr{P}_{pfa}(X, \Sigma)$ счетно-аддитивных и чисто конечно-аддитивных переходных функций и показано, что разложение $\mathscr{P}(X, \Sigma) = \mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma) \oplus \mathscr{P}_{pfa}(X, \Sigma)$ не всегда имеет место (см. [1, 5.7]). Ниже мы определяем класс $\mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$ сильно аддитивных переходных функций и показываем, что для этого класса аналогичное разложение справедливо для любых измеримых пространств.

Определение 1. Переходную функцию $p \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$ будем называть *равномерно абсолютно непрерывной* относительно положительной меры $\mu \in ba(\Sigma)$ и писать $p \ll \mu$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех $E \in \Sigma$ из $\mu(E) < \delta$ вытекает $\|p(\cdot, E)\| < \varepsilon$.

Переходную функцию $p \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$ назовем *сильно аддитивной*, если существует такая положительная мера $\mu \in ba(\Sigma)$, что $p \ll \mu$. Множество всех сильно аддитивных переходных функций обозначим символом $\mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$.

Как показывает следующая теорема, $\mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma)$ изоморфно пространству сильно аддитивных векторных мер, чем и обусловлено употребление соответствующих терминов и обозначений.

**Теорема 2.** *Пространства*

$$\mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma),\quad \mathscr{K}_w(B(X)),\quad \mathscr{K}\mathscr{L}_w(ba(\Sigma)),\quad sa(\Sigma,B(X)),\quad \ell^\infty_{wk}(X,ba(\Sigma))$$

*являются упорядоченными банаховыми подалгебрами*

$$\mathscr{P}(X,\Sigma),\quad \mathscr{L}(B(X)),\quad \mathscr{L}_w(ba(\Sigma)),\quad ba(\Sigma,B(X)),\quad \ell^\infty_{w}(X,ba(\Sigma))$$

*соответственно. Диаграмма, вершинами которой служат эти пять подалгебр, а ребрами — соответствующие сужения двадцати отображений, определенных в* [1, 4.4]*, коммутативна. Кроме того, каждое из двадцати сужений является изоморфизмом между соответствующими пространствами, где под изоморфизмом понимается линейная изометрия, сохраняющая произведение и являющаяся порядковым изоморфизмом.*

Доказательство. С учетом теоремы [1, 4.8] достаточно заметить, что $\mathscr{K}_w(B(X))$ является упорядоченной банаховой подалгеброй $\mathscr{L}(B(X))$ (см., например, [11, VI.4.4]), и установить включения

$$m_p\in sa(\Sigma,B(X)),\quad T_m\in\mathscr{K}_w(B(X)),\quad A_T\in\mathscr{K}\mathscr{L}_w(ba(\Sigma)),$$

$$v_A\in\ell^\infty_{wk}(X,ba(\Sigma)),\quad p_v\in\mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma)$$

для произвольных

$$p\in\mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma),\quad m\in sa(\Sigma,B(X)),\quad T\in\mathscr{K}_w(B(X)),$$

$$A\in\mathscr{K}\mathscr{L}_w(ba(\Sigma)),\quad v\in\ell^\infty_{wk}(X,ba(\Sigma)).$$

Докажем включение $m_p\in sa(\Sigma,B(X))$. Согласно определениям [1, 4.4] и 1 существует положительная мера $\mu\in ba(\Sigma)$ такая, что $m_p\ll\mu$. Следовательно, векторная мера $m_p$ сильно аддитивна (см. [12, I.5.3]).

Включения $T_m\in\mathscr{K}_w(B(X))$ и $A_T\in\mathscr{K}\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$ установлены в [12, VI.1.1] и [11, VI.4.8] соответственно.

Для доказательства включения $v_A\in\ell^\infty_{wk}(X,ba(\Sigma))$ достаточно заметить, что множество мер $\{\delta_x : x\in X\}$ ограничено по норме, а следовательно, множество $v_A(X)=\{A\delta_x : x\in X\}$ слабо компактно в $ba(\Sigma)$.

Покажем включение $p_v\in\mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma)$. Поскольку множество $\{p_v(x,\cdot) : x\in X\}$ слабо компактно в $ba(\Sigma)$, в силу [11, IV.9.12] существует положительная мера $\mu\in ba(\Sigma)$ такая, что $p(x,\cdot)\ll\mu$ равномерно по $x\in X$. $\square$

В [1, § 5] показано, что множество $\mathscr{P}(X,\Sigma)$ плотным образом вкладывается в некоторое банахово $K$-пространство $\overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$, и исследованы порядковые свойства этого вложения. Ниже (теорема 4) установлены аналогичные факты, касающиеся вложения $\mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma)$ в $\mathscr{P}(X,\Sigma)$.

Замечание 3. Пусть $\overline{V}$ — упорядоченное пространство и $V_0\subset V\subset\overline{V}$. Несложно показать, что если $V_0$ и $V$ наследственно вложены в $\overline{V}$, то $V_0$ наследственно вложено в $V$.

**Теорема 4.** *Пусть $(X, \Sigma)$ — атомное измеримое пространство (т. е. объединение всех атомов булевой алгебры $\Sigma$ совпадает с $X$).*

*(1) Множество $\mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$ является порядковым идеалом в $\mathscr{P}(X, \Sigma)$, т. е. для всех $p \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$ и $p_0 \in \mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$ из $0 \leq p \leq p_0$ вытекает $p \in \mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$.*

*(2) Множество $\mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$ минорирует $\mathscr{P}(X, \Sigma)$.*

*(3) Множество $\mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$ наследственно вложено в $\mathscr{P}(X, \Sigma)$.*

*(4) Введенное в [1, 5.3] отношение $\perp$ является отношением дизъюнктности на $\mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$ в смысле определения [1, 2.1].*

*(5) Каждый элемент $p \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$ представим в виде $p = o\text{-}\sum\limits_{\xi \in \Xi} p_\xi$ для некоторого дизъюнктного семейства $(p_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset \mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$.*

*(6) Множество $\mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$ является алгебраическим идеалом в $\mathscr{P}(X, \Sigma)$, т. е. $p * p_0, p_0 * p \in \mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$ для любых $p \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$ и $p_0 \in \mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$.*

Доказательство. Утверждение (1) с очевидностью вытекает из определения 1 в силу монотонности нормы в $B(X)$.

(2) Пусть $0 < p \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$. Выберем произвольную точку $x_0 \in X$, для которой $p(x_0, \cdot) > 0$, обозначим через $A$ атом $\Sigma$, содержащий $x_0$, и положим $p_0(x, E) = 1_A(x) p(x, E)$ для всех $x \in X$ и $E \in \Sigma$. Тогда $p_0 \in \mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$ и $0 < p_0 \leq p$.

(3) Аналогично доказательству утверждения (2) можно показать, что $\mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$ минорирует $K$-пространство $\overline{\mathscr{P}}(X, \Sigma)$, а значит, наследственно вложено в $\overline{\mathscr{P}}(X, \Sigma)$ в силу теоремы [1, 2.2]. Остается сослаться на утверждение (2) теоремы [1, 5.4] и замечание 3.

(4) Поскольку $\mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$ минорирует $\overline{\mathscr{P}}(X, \Sigma)$ (см. выше), достаточно использовать теорему [1, 2.2].

Упомянутое в (5) семейство $(p_\xi)_{\xi \in \Xi}$ можно определить формулами $p_\xi(x, E) = 1_\xi(x) p(x, E)$ для всех $\xi \in \Xi$, $x \in X$ и $E \in \Sigma$, где $\Xi$ — множество всех атомов $\Sigma$.

Утверждение (6) вытекает из теоремы 2 с учетом аналогичного свойства слабо компактных операторов (см., например, [11, VI.4.5]). $\square$

Если $p \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$ и $\varphi \in B(X)'$, то, как легко видеть, $\varphi \circ m_p \in ba(\Sigma)$, где векторная мера $m_p \in ba(\Sigma, B(X))$ определена в [1, 4.4]. Будем говорить, что переходная функция $p \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$ *слабо дизъюнктна* мере $\mu \in ba(\Sigma)$, если $\varphi \circ m_p \perp \mu$ для всех $\varphi \in B(X)'$.

**Теорема 5.** *Пусть $(X, \Sigma)$ — измеримое пространство и $\mu \in ba(\Sigma)$. Тогда каждая сильно аддитивная переходная функция $p \in \mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$ единственным образом разлагается в сумму $p = p_c + p_s$ двух сильно аддитивных переходных функций $p_c$ и $p_s$ таких, что $p_c \ll \mu$ и $p_s$ слабо дизъюнктна $\mu$.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться аналогичным результатом для сильно аддитивных векторных мер (см. [12, I.5.9]) и теоремой 2. $\square$

Определение 6. Переходную функцию $p \in \mathscr{P}(X, \Sigma)$ назовем *сильно счетно-аддитивной*, если существует положительная мера $\mu \in ca(\Sigma)$ такая, что $p \ll \mu$. (Этот термин впервые возник в работе [13], где он определен иным, но эквивалентным образом.) Множество всех сильно счетно-аддитивных переходных функций обозначим символом $\mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma)$. Ясно, что $\mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma)$ является упорядоченным нормированным подпространством $\mathscr{P}(X, \Sigma)$. Несложно заметить, что любая сильно счетно-аддитивная переходная функция является счетно-аддитивной (в смысле определения [1, 5.1]).

Определение 7. Переходную функцию $p \in \mathscr{P}(X,\Sigma)$ назовем *сильно чисто конечно-аддитивной*, если $p \ll \mu$ для некоторой положительной меры $\mu \in pfa(\Sigma)$. Множество всех сильно чисто конечно-аддитивных переходных функций обозначим через $\mathscr{P}_{spfa}(X,\Sigma)$. Очевидно, что $\mathscr{P}_{spfa}(X,\Sigma)$ является упорядоченным нормированным подпространством $\mathscr{P}(X,\Sigma)$.

**Лемма 8.** *Пусть $(X,\Sigma)$ — атомное измеримое пространство. Тогда множества $\mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)$, $\mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma)$, $\mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)$ и $\mathscr{P}_{spfa}(X,\Sigma)$ наследственно вложены в $\overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$.*

Доказательство. Мы докажем только, что $\mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)$ наследственно вложено в $\overline{\mathscr{P}}(X,\Sigma)$ (наследственная вложенность остальных пространств устанавливается совершенно аналогично).

Пусть $p = \sup\limits_{\xi\in\Xi} p_\xi$ в $\mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)$, где $p_\xi \geq 0$ для всех $\xi \in \Xi$. Допустим вопреки доказываемому, что $p(x_0,\cdot) \neq \sup\limits_{\xi\in\Xi} p_\xi(x_0,\cdot) = \mu_0$ для некоторой точки $x_0 \in X$, и обозначим через $A$ атом $\Sigma$, содержащий $x_0$. Ясно, что $p(x,\cdot) > \mu_0$ для всех $x \in A$. Положим

$$q(x,E) = 1_{X\setminus A}(x)p(x,E) + 1_A(x)\mu_0(E) \quad \text{для всех } x \in X,\ E \in \Sigma.$$

Очевидно, что $q \in \mathscr{P}(X,\Sigma)$. Согласно определению 6 найдется положительная мера $\mu \in ca(\Sigma)$ такая, что $p \ll \mu$. Как легко видеть, $q \ll \mu+\mu_0$ и, следовательно, $q \in \mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)$. С другой стороны, $p > q \geq p_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$, что противоречит соотношению $p = \sup\limits_{\xi\in\Xi} p_\xi$ в $\mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)$. $\square$

**Теорема 9.** *Пусть $(X,\Sigma)$ — измеримое пространство.*

(1) *Имеет место разложение*

$$\mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma) = \mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma) \oplus \mathscr{P}_{spfa}(X,\Sigma).$$

(2) *Справедливы следующие равенства:*

$$\mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma) = \mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma) \cap \mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma), \quad \mathscr{P}_{spfa}(X,\Sigma) = \mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma) \cap \mathscr{P}_{pfa}(X,\Sigma).$$

(3) *Множества $\mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)$ и $\mathscr{P}_{spfa}(X,\Sigma)$ являются взаимно дополнительными $\perp$-полосами в $\mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma)$, т. е.*

$$\mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)^\perp = \mathscr{P}_{spfa}(X,\Sigma), \quad \mathscr{P}_{spfa}(X,\Sigma)^\perp = \mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma).$$

(4) *Если $(X,\Sigma)$ — атомное измеримое пространство, то множества $\mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)$ и $\mathscr{P}_{spfa}(X,\Sigma)$ наследственно вложены в $\mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma)$.*

Доказательство. Утверждение (1) является прямым следствием теоремы 2 и теоремы Иосиды — Хьюитта для векторных мер (см. [12, I.5.8]).

(2) Мы покажем только равенство

$$\mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma) = \mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma) \cap \mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)$$

(второе устанавливается совершенно аналогично). Включение

$$\mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma) \subset \mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma) \cap \mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)$$

достаточно очевидно. Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольную переходную функцию $p \in \mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma) \cap \mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)$, представим ее в виде суммы двух переходных функций $p_{sca} \in \mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)$ и $p_{spfa} \in \mathscr{P}_{spfa}(X,\Sigma)$

(возможность такого представления вытекает из установленного выше утверждения (1)) и покажем, что $p_{spfa} = 0$. Пусть $x \in X$. С одной стороны, $p_{spfa} \ll \mu$, где $\mu \in pfa(\Sigma)$, и поэтому $p_{spfa}(x, \cdot) \in pfa(\Sigma)$ в силу теоремы [14, 3.7]. С другой стороны,

$$p_{spfa}(x, \cdot) = p(x, \cdot) - p_{sca}(x, \cdot) \in ca(\Sigma),$$

так как $p, p_{sca} \in \mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$. Следовательно, $p_{spfa}(x, \cdot) = 0$ для всех $x \in X$.

(3) Совершенно аналогично доказательству утверждения (1) теоремы [1, 5.7] можно показать, что

$$\mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma)^{\perp} \subset \mathscr{P}_{pfa}(X, \Sigma), \quad \mathscr{P}_{spfa}(X, \Sigma)^{\perp} \subset \mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma).$$

Следовательно, с учетом утверждения (2) доказываемой теоремы

$$\mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma)^{\perp} \subset \mathscr{P}_{spfa}(X, \Sigma), \quad \mathscr{P}_{spfa}(X, \Sigma)^{\perp} \subset \mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma).$$

Обратные включения достаточно очевидны.

Утверждение (4) вытекает из леммы 8 и замечания 3. □

**Предложение 10.** *Пусть $(X, \Sigma)$ — атомное измеримое пространство.*

(1) *Множество $\mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma)$ минорирует $\mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$.*

(2) *Множество $\mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma)$ наследственно вложено в $\mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$.*

(3) *Каждый элемент $p \in \mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$ представим в виде $p = o\text{-}\sum\limits_{\xi \in \Xi} p_\xi$ для некоторого дизъюнктного семейства $(p_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset \mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma)$.*

(4) *Множество $\mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma)$ является порядковым и алгебраическим идеалом в $\mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$.*

Доказательство. (1) Пусть $0 < p \in \mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$. Выберем произвольную точку $x_0 \in X$, для которой $p(x_0, \cdot) > 0$, обозначим через $A$ атом $\Sigma$, содержащий $x_0$, и положим $p_0(x, E) = 1_A(x) p(x, E)$ для всех $x \in X$ и $E \in \Sigma$. Тогда $p \in \mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma)$ и $0 < p_0 \leq p$.

Утверждение (2) следует из леммы 8 и замечания 3.

Упомянутое в (3) семейство $(p_\xi)_{\xi \in \Xi}$ можно определить формулами

$$p_\xi(x, E) = 1_\xi(x) p(x, E) \quad \text{для всех } \xi \in \Xi,\ x \in X,\ E \in \Sigma,$$

где $\Xi$ — множество всех атомов $\Sigma$.

(4) Пусть $p_0 \in \mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma)$, $p \in \mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$.

Если $0 \leq p \leq p_0$, то с учетом утверждения (1) теоремы 4 имеем $p \in \mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma)$, откуда $p \in \mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma)$ в силу утверждения (2) теоремы 9.

Далее, согласно теореме [1, 5.2] и утверждению (6) теоремы 4 имеют место включения $p_0 * p, p * p_0 \in \mathscr{P}_{sa}(X, \Sigma) \cap \mathscr{P}_{ca}(X, \Sigma)$, откуда $p_0 * p, p * p_0 \in \mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma)$ в силу утверждения (2) теоремы 9. □

**Теорема 11.** *Каждое из пространств*

$$\mathscr{P}_{sca}(X, \Sigma), \quad \mathscr{K}_{wo}(B(X)), \quad \mathscr{K}\mathscr{L}_w(ba(\Sigma), ca(\Sigma)), \quad ca(\Sigma, B(X)), \quad \ell^\infty_{wk}(X, ca(\Sigma))$$

*является упорядоченной банаховой подалгеброй*

$$\mathscr{P}(X, \Sigma), \quad \mathscr{L}(B(X)), \quad \mathscr{L}_w(ba(\Sigma)), \quad ba(\Sigma, B(X)), \quad \ell^\infty_w(X, ba(\Sigma))$$

*соответственно. Диаграмма, вершинами которой служат эти пять подалгебр, а ребрами — соответствующие сужения двадцати отображений, определенных в*

[1, 4.4], *коммутативна. Кроме того, каждое из двадцати сужений является изоморфизмом между соответствующими пространствами, где под изоморфизмом понимается линейная изометрия, сохраняющая произведение и являющаяся порядковым изоморфизмом.*

Доказательство. Тот факт, что множество $\mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)$ является упорядоченной банаховой подалгеброй $\mathscr{P}(X,\Sigma)$, вытекает из утверждения (2) теоремы 9 и теорем [1, 5.2] и 2. Остается установить включения

$$m_p \in ca(\Sigma, B(X)), \quad T_m \in \mathscr{K}_{wo}(B(X)), \quad A_T \in \mathscr{K}\mathscr{L}_w(ba(\Sigma), ca(\Sigma)),$$
$$v_A \in \ell^\infty_{wk}(X, ca(\Sigma)), \quad p_v \in \mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)$$

для любых

$$p \in \mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma), \quad m \in ca(\Sigma, B(X)), \quad T \in \mathscr{K}_{wo}(B(X)),$$
$$A \in \mathscr{K}\mathscr{L}_w(ba(\Sigma), ca(\Sigma)), \quad v \in \ell^\infty_{wk}(X, ca(\Sigma)).$$

Включение $m_p \in ca(\Sigma, B(X))$ следует из теорем [12, I.2.4] и [12, I.5.2], а включение $T_m \in \mathscr{K}_{wo}(B(X))$ — из теорем [1, 5.2] и [12, VI.1.1].

Заметим, что $A_T \in \mathscr{K}\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$ в силу теоремы 2; поэтому для доказательства включения $A_T \in \mathscr{K}\mathscr{L}_w(ba(\Sigma), ca(\Sigma))$ достаточно рассмотреть произвольную меру $\mu \in ba(\Sigma)$ и показать, что $A_T\mu \in ca(\Sigma)$. Используя секвенциальную $o$-непрерывность оператора $T$ и замечание [1, 2.3], несложно установить, что $A_T\delta_x \in ca(\Sigma)$ для всех $x \in X$, откуда $A_T\Delta(\Sigma) \subset ca(\Sigma)$, где $\Delta(\Sigma)$ — линейная оболочка множества $\{\delta_x : x \in X\}$. Как известно, множество $\Delta(\Sigma)$ слабо$^*$ плотно в $ba(\Sigma)$ (см. [15, 4.9]), поэтому существует сеть элементов $\mu_\alpha \in \Delta(\Sigma)$, слабо$^*$ сходящаяся к $\mu$. Тогда $A_T\mu_\alpha \in ca(\Sigma)$ для всех $\alpha$ и $A_T\mu_\alpha \to A_T\mu$ слабо в $ba(\Sigma)$, откуда $A_T\mu \in ca(\Sigma)$ в силу слабой замкнутости $ca(\Sigma)$ в $ba(\Sigma)$ (см., например, [11, V.3.13]).

Включения $v_A \in \ell^\infty_{wk}(X, ca(\Sigma))$ и $p_v \in \mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)$ очевидны. □

**Теорема 12.** *Для произвольной переходной функции $p \in \mathscr{P}(X,\Sigma)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $p \in \mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)$;

(2) *существует мера $\mu \in ca(\Sigma)$ такая, что $p(x,\cdot) \ll \mu$ для всех $x \in X$;*

(3) $\{p(x,\cdot) : x \in X\}$ *— слабо компактное подмножество $ca(\Sigma)$;*

(4) $p \in \mathscr{P}_{ca}(X,\Sigma)$, *и множество $\{p(\cdot, E) : E \in \Sigma\}$ слабо компактно в $B(X)$.*

Доказательство. Импликация (1) ⇒ (2) очевидна, импликация (2) ⇒ (3) с учетом теоремы 11 следует из [12, I.2.1] и [11, IV.9.2], импликация (3) ⇒ (1) вытекает из [11, IV.9.12], а эквивалентность условий (1) и (4) является следствием [12, I.5.3], теоремы 2 и утверждения (2) теоремы 9. □

Для удобства обозначим через $(\cdot)_{ca}$ и $(\cdot)_{pfa}$ проекторы, соответствующие разложению $ba(\Sigma) = ca(\Sigma) \oplus pfa(\Sigma)$. Таким образом, записи $\mu_{ca}$ и $\mu_{pfa}$ трактуются как счетно-аддитивная и чисто конечно-аддитивная части меры $\mu \in ba(\Sigma)$ соответственно.

Замечание 13. Пусть $A \in \mathscr{K}\mathscr{L}_w(ba(\Sigma))$. Согласно теоремам 2 и 9 переходная функция $p_A \in \mathscr{P}_{sa}(X,\Sigma)$ представляется в виде суммы $p_A = p_{ca} + p_{pfa}$, где $p_{ca} \in \mathscr{P}_{sca}(X,\Sigma)$ и $p_{pfa} \in \mathscr{P}_{spfa}(X,\Sigma)$. Обозначим через $A_{ca}$ и $A_{pfa}$ операторы, определяемые переходными функциями $p_{ca}$ и $p_{pfa}$ по формулам [1, 4.4], т. е. $A_{ca} = A_{p_{ca}}$ и $A_{pfa} = A_{p_{pfa}}$. Учитывая слабую замкнутость множеств $ca(\Sigma)$ и $pfa(\Sigma)$ в $ba(\Sigma)$, несложно показать, что $A_{ca} : ba(\Sigma) \to ca(\Sigma)$ и

$A_{pfa} : ba(\Sigma) \to pfa(\Sigma)$. Более того, имеют место равенства $A_{ca}\mu = (A\mu)_{ca}$ и $A_{pfa}\mu = (A\mu)_{pfa}$ для всех $\mu \in ba(\Sigma)$. Действительно,

$$A_{ca}\mu + A_{pfa}\mu = A\mu = (A\mu)_{ca} + (A\mu)_{pfa},$$

откуда и следуют упомянутые выше равенства (в силу единственности разложения меры в сумму счетно-аддитивной и чисто конечно-аддитивной мер).

Автор выражает благодарность А. Е. Гутману за постановку задачи и ценные замечания.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Гутман А. Е., Сотников А. И.* Порядковые свойства пространства конечно-аддитивных переходных функций // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45. С. 80–102.
2. *Биркгоф Г.* Теория решеток. М.: Наука, 1984.
3. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
4. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. С. 63–211.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
6. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
7. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 1. С. 3–95.
8. *Кусраев А. Г.* Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу. Новосибирск: Наука, 1987. С. 84–123.
9. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
10. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators. New York: Acad. Press, 1985.
11. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
12. *Diestel J., Uhl J. J., Jr.* Vector measures. Providence: Amer. Math. Soc., 1977.
13. *Жданок А. И., Беляков К. И.* Переходная функция как векторная мера. Квазикомпактность и сильная феллеровость // Латвийский мат. ежегодник. 1989. № 33. С. 463–476.
14. *Сотников А. И.* Пространство сильно аддитивных переходных функций. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2004. (Препринт).
15. *Yosida K., Hewitt E.* Finitely additive measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72, N 1. P. 46–66.

*Статья поступила 18 февраля 2004 г.*

*Сотников Алексей Игоревич*
*Тывинский гос. университет, ул. Ленина, 36, Кызыл 667000, Республика Тува*
SotnikovAI@ngs.ru