Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 512.56

ШКАЛЫ ПОТЕНЦИАЛОВ ВЫЧИСЛИМОСТИ n–ЭЛЕМЕНТНЫХ АЛГЕБР С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА АРНОСТЬ

А. Г. Пинус

Аннотация: Ряд результатов о шкалах вычислимости n-элементных алгебр переносится на шкалы вычислимости n-элементных m-аров (алгебр, сигнатурные функции которых не более чем m-арны).

Ключевые слова: потенциал вычислимости алгебры, решетка, элементарная теория, программно-вычислимая функция.

В работе А. Г. Пинуса и С. В. Журкова [1] определено понятие шкалы потенциалов вычислимости n-элементных алгебр, основанное на результатах теории условных термов (обзор результатов этой теории см. в [2–4]). Эта шкала представляет собой частично упорядоченное множество $\langle CT_n; \leq\rangle$ и в последующих работах [5–7] был получен ряд результатов, связанных с глобальным и локальным строением этой шкалы, найдены некоторые параметры этого частично упорядоченного множества: число атомов, коатомов, длина и др.

Напомним основные определения связанные со шкалой $\langle CT_n; \leq\rangle$, где n — произвольное натуральное число. Через $CT(\mathcal{A})$ для произвольной универсальной алгебры $\mathcal{A}$ обозначим совокупность всех условно термальных функций алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ (всех программно-вычислимых функций на множестве A, программы вычислений которых построены из вычислений сигнатурных функций с помощью оператора суперпозиции и условного оператора). Как доказано в [8], для двух универсальных алгебр $\mathcal{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \langle A_2;\ \sigma_2\rangle$ и некоторой биекции π множества A_1 на A_2 равенство (включение) $\pi^{-1}CT(\mathcal{A}_2)\pi = CT(\mathcal{A}_1)$ $(\pi^{-1}CT(\mathcal{A}_2)\pi \subseteq CT(\mathcal{A}_1))$ имеет место тогда и только тогда, когда $\pi(\operatorname{Sub}\mathcal{A}_1) = \operatorname{Sub}\mathcal{A}_2$ и $\pi^{-1}\operatorname{Iso}\mathcal{A}_2\pi = \operatorname{Iso}\mathcal{A}_1$ $(\pi(\operatorname{Sub}\mathcal{A}_1) \subseteq \operatorname{Sub}\mathcal{A}_2$ и $\pi^{-1}\operatorname{Iso}\mathcal{A}_2\pi \supseteq \operatorname{Iso}\mathcal{A}_1)$, где $\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ — совокупность всех подалгебр алгебры $\mathcal{A}$, а $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$ — совокупность внутренних изоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ (изоморфизмов между подалгебрами алгебры $\mathcal{A}$). Описанную ситуацию (условно рациональную эквивалентность алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$) будем обозначать через $CT(\mathcal{A}_1) \sim CT(\mathcal{A}_2)$. Далее все n-элементные универсальные алгебры будем рассматривать на основном множестве $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Пусть $CT(n) = \{CT(\mathcal{A} \mid \mathcal{A}$ — n-элементная алгебра$\}$ и $CT_n = CT(n)/\sim$. Порядок $\leq$ на множестве CT_n индуцируется отношением включения $\subseteq$ на множестве $CT(n)$. Элемент $CT(\mathcal{A})/\sim$, обозначаемый далее как $\overline{\mathcal{A}}$, естественно рассматривать как потенциал вычислимости алгебры $\mathcal{A}$, а отношение $\leq$ между потенциалами $\overline{\mathcal{A}_1}$ и $\overline{\mathcal{A}_2}$ естественно проинтерпретировать как сравнение программно-вычислительных возможностей этих алгебр

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00258).

($\overline{\mathcal{A}_1} \leq \overline{\mathcal{A}_2}$ означает, что при некоторой перекодировке элементов алгебры $\mathcal{A}_1$ элементами алгебры $\mathcal{A}_2$ любая программно-вычислимая функция алгебры $\mathcal{A}_1$ будет программно-вычислимой и в алгебре $\mathcal{A}_2$). *Шкалой потенциалов вычислимости* n-элементных алгебр называется частично упорядоченное множество $\langle CT_n; \leq\rangle$. Как отмечалось выше, в работах [1, 5–7] выяснены некоторые особенности строения шкал $\langle CT_n; \leq\rangle$. В связи с этим возникает вопрос об изучении строения подмножеств шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$ при некоторых естественных ограничениях на алгебры $\mathcal{A}$, потенциалы вычислимости $\overline{\mathcal{A}}$ которых входят в эти подмножества. Среди подобных ограничений в первых рядах стоят ограничения на сигнатуры рассматриваемых алгебр $\mathcal{A}$: на число сигнатурных функций и на их арность (число аргументов, от которых зависят сигнатурные функции). Как доказано в работе [5], первое из указанного ограничением не является: для любой алгебры $\mathcal{A} = \langle n; \sigma\rangle$ существует алгебра $\mathcal{A}' = \langle n; \sigma'\rangle$, сигнатура которой состоит из одной единственной функции, такая, что $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}'$. В работе [9] начато изучение потенциалов вычислимости n-элементных унаров (алгебр, сигнатурные функции которых одноместны). В данной работе предпринято изучение шкал $\left\langle CT_n^m; \leq\right\rangle$ потенциалов вычислимости n-элементных m-аров (алгебр, сигнатурные функции которых не более чем m-местны).

Итак, $CT_n^m = \{\overline{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A} = \langle n; \sigma\rangle$ является m-аром$\}$. В работах [8, 10] для пары $\langle S, I\rangle$, где S — некоторая совокупность подмножеств множества n, а I — некоторая совокупность биекций между подмножествами, входящими в S, найдены необходимые и достаточные условия $(*)$ того, чтобы имело место равенство $\langle S, I\rangle = \langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}, \operatorname{Iso}\mathcal{A}\rangle$ для некоторой алгебры $\mathcal{A} = \langle n; \sigma\rangle$, для некоторого унара $\mathcal{A} = \langle n; \sigma\rangle$. В то же время, как указано выше, пара $\langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}, \operatorname{Iso}\mathcal{A}\rangle$ (с точностью до сопряжения перестановками множества n) выступает инвариантом потенциала вычислимости $\overline{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{A}$.

Найдем условия на пару $\langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}, \operatorname{Iso}\mathcal{A}\rangle$, где $\mathcal{A}$ — произвольная n-элементная алгебра, при которых существует m-ар $\mathcal{A}' = \langle n, \sigma\rangle$ такой, что $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}'$. Отметим также, что для любого $n \in \omega$ имеют место включения

$$CT_n^1 \subseteq CT_n^2 \subseteq \cdots \subseteq CT_n^m \subseteq CT_n^{m+1} \subseteq \cdots \subseteq CT_n.$$

Кроме того, , с учетом описанных выше инвариантов $\langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}, \operatorname{Iso}\mathcal{A}\rangle$ потенциала вычислимости $\overline{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{A}$ достаточно очевидно равенство $CT_n = CT_n^n$.

Через $P(A)$ обозначим совокупность всех подмножеств множества A, а через $Bi(A)$ — совокупность всевозможных биекций между подмножествами, входящими в $P(A)$. Пусть $S = \operatorname{Sub}\mathcal{A} \subseteq P(A)$ для некоторой алгебры $\mathcal{A}$. Для любого $B \subseteq A$ через $S(B)$ обозначим $\cap\{C \in S \mid B \subseteq C\}$, т. е. $S(B)$ — основное множество подалгебры алгебры $\mathcal{A}$, порожденной множеством B. Совокупность S назовем *m-замкнутой*, если для любых $B \subseteq A$, $c \in A$ таких, что $c \in S(B)$, существуют $l \in \omega$ и отображение f множества $\{0, 1, \dots, l-1\}$ в совокупность $P(A)$ такое, что $f(0) = B$, и для любого $0 < r \leq l-1$ и любого $a' \in f(r) \setminus f(r-1)$ существует $B' \subseteq f(r-1)$ такое, что $|B'| \leq m$ и $a' \in S(B')$, при этом $c \in f(l-1)$. Совокупность $I \subseteq Bi(A)$ назовем *m-замкнутой*, если для любой $f \in Bi(A)$ такой, что для любого $B_1 \subseteq \operatorname{Dom} f$ неравенство $|B_1| \leq m$ влечет включение $f \restriction S(B_1) \in I$, имеет место включение $f \in I$.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны для любой алгебры* $\mathcal{A} = \langle A; \sigma\rangle$ *и любого* $m \in \omega$*:*

1) *существует* m*-ар* $\mathcal{A}' = \langle A; \sigma'\rangle$ *такой, что* $\langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}, \operatorname{Iso}\mathcal{A}\rangle = \langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}', \operatorname{Iso}\mathcal{A}'\rangle$ *(т. е.* $\overline{\mathcal{A}} \in CT_n^m$*, если* $A = n$*);*

2) *совокупности* $S = \operatorname{Sub}\mathcal{A}$ *и* $I = \operatorname{Iso}\mathcal{A}$ *m-замкнуты.*

Доказательство. Импликация 1) $\to$ 2) очевидна. Покажем справедливость обратной импликации 2) $\to$ 1). Идея доказательства восходит к Йонссону и аналогична доказательству теоремы 3 из [8].

Для любых элементов $a_1, \dots, a_k \in A$ $(k \le m)$ и любого $a \in S(\{a_1, \dots, a_k\})$ введем в рассмотрение k-местную функцию $f_{\bar a, a}(x)$ на множестве A (здесь $\bar a = \langle a_1, \dots, a_k\rangle$ и $\bar x = \langle x_1, \dots, x_k\rangle$), определенную следующим образом:

$$f_{\bar a,a}(b_1,\dots,b_k) = \begin{cases} g(a), & \text{если существует } g \in \operatorname{Iso}\mathcal{A} \text{ такое, что} \\ & \qquad b_1 = g(a_1), \dots b_k = g(a_k), \\ b_1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Без труда замечается корректность определения функции $f_{\bar a,a}$.

Пусть $\mathcal{A}' = \langle A; f_{\bar a,a} \mid \text{ где } k \le m,\ a_1, \dots, a_k \in A \text{ и } a \in S\ (\{a_1, \dots, a_k\})\rangle$. В силу определения алгебры $\mathcal{A}'$ очевидно равенство $\operatorname{Sub}_m \mathcal{A} = \operatorname{Sub}_m \mathcal{A}'$, здесь $\operatorname{Sub}_m \mathcal{B}$ — совокупность всех не более чем m-порожденных подалгебр алгебры $\mathcal{B}$. Совокупность $\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ m-замкнута по условию, а совокупность $\operatorname{Sub}\mathcal{A}'$ m-замкнута, так как сигнатура алгебры $\mathcal{A}'$ состоит из не более чем m-местных функций. Равенство $\operatorname{Sub}_m \mathcal{A} = \operatorname{Sub}_m \mathcal{A}'$ и m-замкнутость совокупностей $\operatorname{Sub}\mathcal{A}$, $\operatorname{Sub}\mathcal{A}'$ влекут очевидным образом равенство $\operatorname{Sub}\mathcal{A} = \operatorname{Sub}\mathcal{A}'$.

Аналогично в силу m-замкнутости совокупностей $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Iso}\mathcal{A}'$ замечается и равенство $\operatorname{Iso}\mathcal{A} = \operatorname{Iso}\mathcal{A}'$. Тем самым для m-ара $\mathcal{A}'$ имеет место равенство $\langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}, \operatorname{Iso}\mathcal{A}\rangle = \langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}', \operatorname{Iso}\mathcal{A}'\rangle$. Теорема доказана.

Утверждение этой теоремы позволяет заметить, что для любого натурального n и любого $1 \le k < n$ имеет место строгое включение $CT_n^k \subset CT_n^{k+1}$. Действительно, пусть $S = P(n)$, $Bi_k(n) = \{\varphi \in Bi(n) \mid |\operatorname{Dom}\varphi| \le k\}$ и $I_k = Bi_k(n) \cup \{\mathrm{id}_C \mid C \subseteq n, |C| \ge k+1\}$. Здесь id_C — тождественное отображение множества C на себя. Очевидно, что пара $\langle S, I_k\rangle$ удовлетворяет условиям $(*)$, при которых существует алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $S = \operatorname{Sub}\mathcal{A}$, $I_k = \operatorname{Iso}\mathcal{A}$. Столь же очевидно, что S и I_k $(k+1)$-замкнуты, но не k-замкнуты. Следовательно, существует $(k+1)$-ар $\mathcal{A}' = \langle n; \sigma'\rangle$ такой, что $\langle S, I_k\rangle = \langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}', \operatorname{Iso}\mathcal{A}'\rangle$, и не существует k-ара $\mathcal{A}'' = \langle n; \sigma''\rangle$ такого, что $\langle S, I_k\rangle = \langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}'', \operatorname{Iso}\mathcal{A}''\rangle$, т. е. $\overline{\mathcal{A}}' \in CT_n^{k+1} \setminus CT_n^k$. Таким образом, для любого $n \in \omega$ имеет место

$$CT_n^1 \subset CT_n^2 \subset \dots \subset CT_n^k \subset CT_n^{k+1} \subset \dots \subset CT_n^{n-1} \subset CT_n^n = CT_n.$$

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная n-элементная алгебра, и пусть S — совокупность подмножеств множества n, входящих в *m-замыкание* совокупности $\operatorname{Sub}(\mathcal{A})$, т. е. $S = \{S_m(B) \mid B \subseteq n\}$ и $S_m(B) = \{c \in n \mid$ существуют $l \in \omega$ и отображение g множества $\{0, 1, \dots, l-1\}$ в совокупность $P(n)$ такое, что $g(0) = B$ и для любого $0 < r \le l-1$, любого $a' \in f(r) \setminus f(r-1)$ существует $B' \subseteq f(r-1)$ такое, что $|B'| \le m$, $a' \in \operatorname{Sub}(\mathcal{A})(B') = \operatorname{Sub}_m(\mathcal{A})(B')$ и $c \in f(l-1)\}$. Пусть $I \subseteq Bi(n)$ и $\varphi \in I$ тогда и только тогда, когда для любого $B_1 \subseteq \operatorname{Dom}\varphi$ неравенство $|B_1| \le m$ влечет включение $\varphi \restriction \operatorname{Sub}(B_1) \in \operatorname{Iso}_m(\mathcal{A})$. Здесь $\operatorname{Iso}_m(\mathcal{A}) = \{\varphi \in \operatorname{Iso}\mathcal{A} \mid \operatorname{Dom}\varphi = \operatorname{Sub}(\mathcal{A})(B),\ B \subseteq P(n),\ |B| \le m\}$. Непосредственно проверяется, что пара $\langle I, B\rangle$ удовлетворяет условию $(*)$ и является m-замкнутой. В силу этого существует m-ар $\mathcal{A}' = \langle n; \sigma'\rangle$ такой, что $\langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}', \operatorname{Iso}\mathcal{A}'\rangle = \langle S, I\rangle$. При этом если $\mathcal{A}$ является m-аром, то очевидно, что $\langle S, I\rangle = \langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}, \operatorname{Iso}\mathcal{A}\rangle$, и если $\overline{\mathcal{A}_1} < \overline{\mathcal{A}_2}$, то $\operatorname{Sub}\mathcal{A}_1' \supseteq \operatorname{Sub}\mathcal{A}_2'$, $\operatorname{Iso}\mathcal{A}_1' \supseteq \operatorname{Iso}\mathcal{A}_2'$. Таким образом, отображение ψ, определенное на CT_n следующим образом: $\psi(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}'$, является монотонным отображением шкалы $\langle CT_n; \le\rangle$ на шкалу $\left\langle CT_n^m; \le\right\rangle$, оставляющим на месте точки из CT_n^m. Тем самым имеет место

Следствие 1. *Для любых натуральных чисел n и $1 \le m \le n$ шкала потенциалов вычислимости n-элементных m-аров $\left\langle CT_n^m; \le \right\rangle$ является ретрактом шкалы $\langle CT_n; \le \rangle$ и имеет место следующая цепочка строгих включений:*

$$CT_n^1 \subset CT_m^2 \subset \cdots \subset CT_n^k \subset CT_n^{k+1} \subset \cdots \subset CT_n^{n-1} \subset CT_n^n = CT.$$

Отметим также, что условия m-замкнутости совокупностей $\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Iso}\mathcal{A}$ при $m = 1$ превращаются в условия из работы [10], описывающие условия на пару $\langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}, \operatorname{Iso}\mathcal{A} \rangle$, при которых конечная алгебра $\mathcal{A}$ условно рационально эквивалентна некоторому унару.

В работе [1] описаны все коатомы шкалы $\langle CT_n; \le \rangle$. Напомним, что $\overline{\mathcal{A}}$ является коатомом шкалы $\langle CT_n; \le \rangle$, если либо

1) $\operatorname{Sub}\mathcal{A} = \{n, B\}$, где $\varnothing \subset B \subset n$ и $\operatorname{Iso}\mathcal{A} = \{id_n, id_B\}$,

либо

2) $\operatorname{Sub}\mathcal{A} = \{n\}$, $\operatorname{Iso}\mathcal{A} = \{\varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^p\}$, где p — простой делитель числа n и перестановка φ на множестве и есть объединение p-циклов.

Очевидным образом для любого подобного коатома $\overline{\mathcal{A}}$ пара $\langle \operatorname{Sub}\mathcal{A}, \operatorname{Iso}\mathcal{A} \rangle$ является 1-замкнутой и тем самым совокупности коатомов в шкалах $\left\langle CT_n^k; \le \right\rangle$, $\langle CT_n; \le \rangle$ при любом $1 \le k \le n$ одни и те же. Число же коатомов в этих шкалах равно $(n-1) + K(n)$, где $K(n)$ — число различных простых делителей числа n.

Первый вопрос, возникающий при рассмотрении свойств шкал $\left\langle CT_n^m; \le \right\rangle$, это вопрос о разрешимости элементарной теории класса

$$\mathcal{S}_m = \left\{ \left\langle CT_n^m; \le \right\rangle \mid n \in \omega \right\}$$

всех шкал потенциалов вычислимости конечных m-аров. Действительно, в случае разрешимости этой теории при нахождении «доверительных интервалов» для мощностей этих шкал, т. е. некоторой рекурсивной последовательности натуральных чисел $a_1, a_2 \ldots, a_n, \ldots$ такой, что $\left| CT_n^m \right| \le a_n < \left| CT_{n+1}^m \right|$, все вопросы строения шкал $\left\langle CT_n^m; \le \right\rangle$ решались бы с помощью одного алгоритма. Но, как показывает утверждение теоремы 2, элементарная теория класса $\mathcal{S}_m$ неразрешима при любом $m \ge 1$.

Далее через $\operatorname{Iso}'\mathcal{A}$ будем обозначать такие $\varphi \in \operatorname{Iso}\mathcal{A}$, что φ отлично от $\mathrm{id}_{\operatorname{Dom}\varphi}$ и $|\operatorname{Dom}\varphi| \ne 1$.

Напомним, что если $\overline{\mathcal{A}} \in CT_n^1$ и $B, C \in \operatorname{Sub}\mathcal{A}$, то $B \cup C \in \operatorname{Sub}\mathcal{A}$.

Будем считать натуральное число n достаточно большим, чтобы не делать тривиальных оговорок.

Пусть C_{1n} — совокупность указанных выше коатомов шкалы $\left\langle CT_n^1; \le \right\rangle$ первого типа, а C_{2n} — второго.

Лемма 1. *Для не простых n множество C_{1n} является формульным подмножеством шкалы $\left\langle CT_n^1; \le \right\rangle$, причем для всех подобных n совокупность C_{1n} выделяется в CT_n^1 одной и той же формулой независимо от n.*

Доказательство. Пусть $\overline{\mathcal{A}} \in C_{1n}$ и $\overline{\mathcal{B}}$ — некоторое нижнее покрытие точки $\overline{\mathcal{A}}$ в шкале $\left\langle CT_n^1; \le \right\rangle$. Тогда алгебра $\mathcal{B}$ имеет один из следующих видов:

1) $\operatorname{Sub}\mathcal{B} = \{n, B, C\}$, $\operatorname{Iso}'\mathcal{B} = \varnothing$, где $\varnothing \subset C \subset B$;

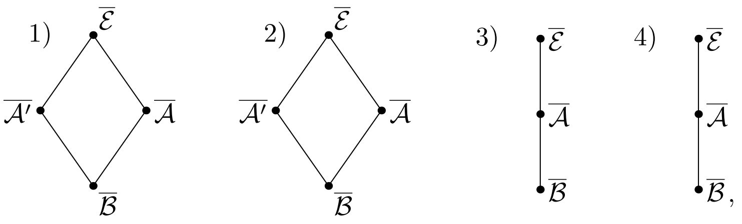
2) $\operatorname{Sub}\mathcal{B} = \{n, B, C\}$, $\operatorname{Iso}'\mathcal{B} = \varnothing$, где $B \subset C \subset n$;

3) $\operatorname{Sub}\mathcal{B} = \{n, B\}$, $\operatorname{Iso}'\mathcal{B} = \{\varphi, \ldots, \varphi^{q-1}\}$, где φ — перестановка на множестве B, q — простой делитель числа $|B|$ и φ есть объединение q-циклов;

4) $\operatorname{Sub}\mathcal{B} = \{n, B\}, \operatorname{Iso}'\mathcal{B} = \{\psi, \ldots, \psi^{r-1}\}$, где ψ — перестановка на n, тождественная на B, r — простой делитель числа $n \setminus |B|$ и ψ на множестве $n \setminus B$ является объединением r-циклов.

5) $\operatorname{Sub}\mathcal{B} = \{n, B, C\}$, $\operatorname{Iso}'\mathcal{B} = \varnothing$, где $\varnothing \subset B \subset n$ и $C = n \setminus B$.

Фильтры шкалы $\langle CT_n^1; \leq \rangle$, порожденные точкой $\overline{\mathcal{B}}$, имеют соответствующие случаям 1–4 виды:



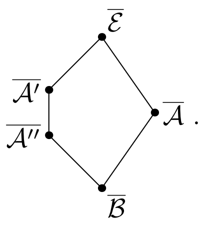
где алгебра $\mathcal{A}'$ в случаях 1, 2 такова, что $\operatorname{Sub}\mathcal{A}' = \{n, C\}$, $\operatorname{Iso}'\mathcal{A}' = \varnothing$.

Фильтр шкалы $\langle CT_n^1; \leq \rangle$, порожденный точкой $\overline{\mathcal{B}}$, в случае 5 имеет вид, совпадающий с видом аналогичного фильтра в случае либо 1 (когда $|B| \neq |C|$), либо 3 (когда $|B| = |C|$).

Пусть n — не простое натуральное число, и пусть теперь $\overline{\mathcal{A}} \in C_{2n}$ и $D = \{0, \varphi(0), \ldots, \varphi^{p-1}(0)\} \subset n$. Пусть алгебра $\mathcal{B}$ такова, что $\operatorname{Sub}\mathcal{B} = \{n, D\}$, $\operatorname{Iso}\mathcal{B} = \{\psi^0, \psi, \ldots, \psi^{p-1}\} \cup \{\varphi^0, \varphi, \ldots, \varphi^{p-1}\}$, где ψ — ограничение перестановки φ на множество D. Очевидно, что точка $\overline{\mathcal{B}}$ является нижним покрытием точки $\overline{\mathcal{A}}$. Рассмотрим алгебры $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$ такие, что

$$\operatorname{Sub}\mathcal{A}' = \{n, D\}, \quad \operatorname{Iso}'\mathcal{A}' = \varnothing, \quad \operatorname{Sub}\mathcal{A}'' = \{n, D\}, \quad \operatorname{Iso}'\mathcal{A}'' = \{\psi, \ldots, \psi^{p-1}\}.$$

Очевидно, что фильтр шкалы $\langle CT_n^1; \leq \rangle$, порожденный точкой $\overline{\mathcal{B}}$, имеет вид



Тем самым формульность множества C_{1n} (при непростом n) — не существует нижнего покрытия, рассматриваемого коатома такого, что фильтр, порожденный этим покрытием, является пентагоном — в шкалах $\langle CT_n^1; \leq \rangle$ доказана.

Пусть элементарные формулы $\phi(x)$ и $\phi_1(x)$ выделяют в шкалах $\langle CT_n^1; \leq \rangle$ (при непростом n) совокупности всех коатомов и множество C_{1n} соответственно.

Пусть формула $\phi'(x)$ сигнатуры $\langle \leq \rangle$ такова, что

$$\phi'(x) = \exists z_1, z_2, z_3 \Bigg(\bigwedge_{\substack{1 \leq i,j \leq 3 \\ i \neq j}} z_i \neq z_j; \& \bigwedge_{i=1}^{3} z_i > x \& \forall y \Bigg(y > x \to \bigvee_{i=1}^{3} y = z_i \Bigg)$$

$$\& \forall u (z_1 \geq u) \& \bigwedge_{i=2}^{3} \phi_1(z_i) \Bigg).$$

Очевидно, что если $\langle CT_n^1; \leq \rangle \models \phi'(\overline{\mathcal{A}})$, то $\operatorname{Sub}\mathcal{A} = \{n, B_1, B_2\}$, $\operatorname{Iso}'\mathcal{A} = \phi$ и $\phi \subset B_1 \subset B_2 \subset n$ либо $B_2 = n \setminus B_1$ и $|B_1| \neq |B_2|$.

Теорема 2. *Элементарная теория класса* $\mathcal{S}_1 = \{\langle CT_n^1; \leq\rangle \mid n \in \omega\}$ *неразрешима.*

Доказательство. Совокупность натуральных чисел $n_1 < \dots < n_k$ назовем Σ-*свободной*, если для любых $n_{i_1}, \dots, n_{i_s}, n_j \in \{n_1, \dots, n_k\}$ $(1 < s \leq k)$ имеет место неравенство $n_{i_1} + \dots + n_{i_s} \neq n_j$. Очевидно существование Σ-свободных совокупностей любой длины.

Хорошо известна (см., к примеру, [11]) наследственная неразрешимость элементарной теории класса K всех конечных дважды линейно упорядоченных множеств. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно построить относительно элементарную интерпретацию класса K в классе $\mathcal{S}_1$.

Пусть $\langle k; \leq_1, \leq_2\rangle \in K$ и $i_1 <_1 \dots <_1 i_k$, $j_1 < \dots < j_k$, а для любого $0 \leq p < k$ имеют место равенства $p = i_{r(p)} = j_{q(p)}$. Выберем числа n и $1 < m_1 < \dots < m_k < n_1 < \dots < n_k < l_1 \dots < l_k$ такими, что $n = l_1 + \dots + l_k$, совокупность $\{m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k, l_1, \dots, l_k\}$ Σ-свободна и $l_1 > m_1 + \dots + m_k + n_1 + \dots + n_k$.

Рассмотрим n-элементные алгебры $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, $\mathcal{A}'''$ такие, что $\operatorname{Iso}'\mathcal{A} = \operatorname{Iso}'\mathcal{A}' = \operatorname{Iso}'\mathcal{A}'' = \operatorname{Iso}'\mathcal{A}''' = \varnothing$ и $\operatorname{Sub}\mathcal{A}$ — совокупность подмножеств множества n, являющаяся замыканием относительно операции объединения $\cup$ совокупности множеств

$$\{B_1^1, \dots, B_{r(1)}^1, B_1^2, \dots, B_{r(2)}^2, \dots, B_1^k, \dots, B_{r(k)}^k,\\ C_1^1, \dots, C_{q(1)}^1, C_1^2, \dots, C_{q(2)}^2, \dots, C_1^k, \dots, C_{q(k)}^k, D_1, \dots, D_k\}$$

таких, что множества каждой из совокупностей $\{B_1^1, \dots, B_{r(k)}^k, C_1^1, \dots, C_{q(k)}^k\}$ $\{D_1, \dots, D_k\}$ попарно дизъюнктны и имеют место включения $B_j^i \subset D_i$, $C_t^i \subset D_i$ для любых $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq r(i)$, $1 \leq t \leq q(i)$; кроме того, $|D_i| = l_i$, $|B_j^i| = m_j$, $|C_j^i| = n_j$,

$$\operatorname{Sub}\mathcal{A}' = \{n, B_1', \dots, B_k'\}, \quad \text{где } B_1' \subset \dots \subset B_k',\ |B_i'| = m_i,$$
$$\operatorname{Sub}\mathcal{A}'' = \{n, C_1', \dots, C_k'\}, \quad \text{где } C_1' \subset \dots \subset C_k',\ |C_i'| = n_i,$$
$$\operatorname{Sub}\mathcal{A}''' = \{n, D_1', \dots, D_k'\}, \quad \text{где } D_1' \subset \dots \subset D_k',\ |D_i'| = |D_i|.$$

Пусть $T = \{\overline{\mathcal{L}} \in CT_n^1 \mid \langle CT_n^1\rangle \models \phi_1(\overline{\mathcal{L}}) \& \overline{\mathcal{A}}''' < \overline{\mathcal{L}}\}$. Тогда очевидно, что $T = \{\overline{\mathcal{L}_1}, \dots, \overline{\mathcal{L}_k}\}$, где $\operatorname{Iso}'\mathcal{L}_i = \varnothing$ и $\operatorname{Sub}\mathcal{L}_i = \{n, D_i'\}$.

Отношение $\leq_1$ на множестве T определим следующей формулой:

$$\psi_1(x, y, \overline{\mathcal{A}}', \overline{\mathcal{A}}''', \overline{\mathcal{A}}) = \phi_1(x) \& \phi_1(y) \& \overline{\mathcal{A}}''' \leq x \& \overline{\mathcal{A}}''' \leq y\\ \& \forall z[(\phi'(z) \& z \leq x \& z \leq \overline{\mathcal{A}} \& z \leq \overline{\mathcal{A}}') \to z \leq y].$$

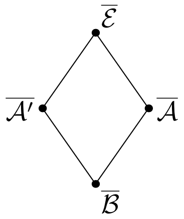
В силу отмеченного выше очевидно, что $\langle CT_n^1; \leq\rangle \models \psi_1(\overline{\mathcal{L}_i}, \overline{\mathcal{L}_j}, \overline{\mathcal{A}}', \overline{\mathcal{A}}''', \overline{\mathcal{A}})$ для любого $1 \leq i \leq s$ тогда и только тогда, когда для любого $1 \leq r \leq s$ неравенство $r \leq r(i)$ (т. е. включение $B_r^i \subseteq D_i$) влечет неравенство $r \leq r(j)$ (т. е. включение $B_r^j \subseteq D_j$). Таким образом, $\langle CT_n^1; \leq\rangle \models \psi_1(\overline{\mathcal{L}_i}, \overline{\mathcal{L}_j}, \overline{\mathcal{A}}', \overline{\mathcal{A}}''', \overline{\mathcal{A}})$ тогда и только тогда, когда $i \leq_1 j$.

Аналогично заменой в формуле ψ_1 точки $\overline{\mathcal{A}}'$ точкой $\overline{\mathcal{A}}''$ определим порядок $\leq_2$ на множестве T. Таким образом, при достаточно большом не простом натуральном n формулы

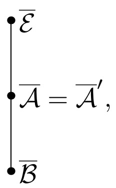
$$\phi_1(x) \& \overline{\mathcal{A}}''' < x, \quad \psi_1(x, y, \overline{\mathcal{A}}', \overline{\mathcal{A}}''', \overline{\mathcal{A}}), \quad \psi_1(x, y, \overline{\mathcal{A}}'', \overline{\mathcal{A}}''', \overline{\mathcal{A}})$$

относительно элементарно определяют в шкале $\langle CT_n^1; \leq\rangle$ модель $\langle k; \leq_1, \leq_2\rangle$. Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается неразрешимость элементарных теорий классов $\mathcal{S}_m = \{\langle CT_n^m; \leq\rangle \mid n \in \omega\}$ при $m \geq 2$. В доказательстве аналога леммы 1 требуется рассмотреть лишь измененный случай 5 для алгебры $\mathcal{B}$: $\operatorname{Sub} B = \{n, B, C\}$, $\operatorname{Iso}' \mathcal{B} = \varnothing$, где $B \cap C = \varnothing$. При этом фильтр шкалы $\langle CT_n^m; \leq\rangle$, порожденный подобной точкой $\overline{\mathcal{B}}$, имеет вид



либо



где алгебра $\mathcal{A}'$ такова, что $\operatorname{Sub} \mathcal{A}' = \{n, C\}$, $\operatorname{Iso}' \mathcal{A}' = \varnothing$. Далее рассуждения леммы 1 и теоремы 2 сохраняются дословно. Тем самым имеет место

Теорема 2′. *Элементарная теория класса* $\mathcal{S}_m = \{\langle CT_n^m; \leq\rangle \mid n \in \omega\}$ *неразрешима при любом* $m \geq 2$.

В работе [1] показано, что для любого $n \geq 3$ шкала $\langle CT_n; \leq\rangle$ не является ни нижней, ни верхней полурешеткой. На самом деле это же имеет место и для любой из шкал $\langle CT_n^m; \leq\rangle$ при $m \leq n$ и $n \geq 3$. Действительно, рассмотрим алгебры $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$, определенные на множестве $n \geq 3$ и такие, что $\operatorname{Iso}' \mathcal{A}_i = \varnothing$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, а $\operatorname{Sub} \mathcal{A}_1 = \{n, \{0\}\}$, $\operatorname{Sub} \mathcal{A}_2 = \{n, \{0, 1\}\}$, $\operatorname{Sub} \mathcal{A}_3 = \{\{n, \{0\}, \{0, 1\}\}$, $\operatorname{Sub} \mathcal{A}_4 = \{n, \{0\}, \{1, 2\}\}$. Очевидно, что $\overline{\mathcal{A}_i} \in CT_n^1$, точки $\overline{\mathcal{A}_3}, \overline{\mathcal{A}_4}$ являются покрытиями точек $\overline{\mathcal{A}_1}, \overline{\mathcal{A}_2}$ в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$ и четверка точек $\overline{\mathcal{A}_1}$, $\overline{\mathcal{A}_2}$, $\overline{\mathcal{A}_3}$, $\overline{\mathcal{A}_4}$ образует дыру (см. [1]) в шкале $\langle CT_n; \leq\rangle$, а значит, в силу замеченного выше (о том, что шкала $\langle CT_n^1; \leq\rangle$ является ретрактом шкалы $\langle CT_n^m; \leq\rangle$ при $1 \leq m \leq n$) и в любой шкале $\langle CT_n^m; \leq\rangle$ при $1 \leq m \leq n$. Тем самым действительно шкалы $\langle CT_n^m; \leq\rangle$ при $n \geq 3$ не являются ни нижними, ни верхними полурешетками.

В работе [1] доказано, что для любой конечной решетки L существуют натуральное n, элементы $\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}} \in CT_n$ такие, что интервал $[\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}]$ шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$ является решеткой, и вложение ψ решетки L (как решетки) в интервал $[\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}]$. Так как сигнатуры строящихся в доказательстве этого утверждения алгебр $\mathcal{L}$, для которых точки $\overline{\mathcal{L}}$ входят в интервал $[\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}]$, состоят из не более чем двухместных функций, соответствующее утверждение имеет место и для шкал $\langle CT_n^m; \leq\rangle$ вместо шкалы $\langle CT_n; \leq\rangle$ при любом $m \geq 2$.

Заметим, что это же утверждение верно и для шкалы $\langle CT_n^1; \leq\rangle$. Действительно, пусть L — некоторая конечная решетка. Как известно [12], L вложима в решетку разбиений некоторого множества $k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Тем самым достаточно построить вложение ψ решетки разбиений $\operatorname{Part} k$ множества k в подходящий интервал $[\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}]$ шкалы $\langle CT_n^1; \leq\rangle$ для некоторого n. Пусть $m_1, \ldots, m_k$ — Σ-свободная совокупность натуральных чисел и $n = m_1 + \cdots + m_k$. Пусть попарно дизъюнктные подмножества $D_1, \ldots, D_k$ множества n таковы, что $|D_i| = m_i$, и пусть унар $\mathcal{A} = \langle n; \sigma\rangle$ таков, что $\operatorname{Iso}' \mathcal{A} = \varnothing$ и $\operatorname{Sub} \mathcal{A} = \{\bigcup_{i \in R} D_i \mid R \subseteq k\}$, а унар $\mathcal{B} = \langle n; \sigma'\rangle$ таков, что $\operatorname{Iso}' \mathcal{B} = \varnothing$ и $\operatorname{Sub} \mathcal{B} = \{n\}$. В силу Σ-свободности совокупности чисел $m_1, \ldots, m_k$ очевидно, что интервал $[\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}]$ шкалы $\langle CT_n^1; \leq\rangle$ изоморфен решетке подрешеток решетки $\operatorname{Sub} \mathcal{A}$. Для любого отношения эквивалентности P на множестве k (разбиения множества k) унар $\mathcal{A}_P = \langle n; \sigma_P\rangle$

выберем таким, что $\mathrm{Iso}'\,\mathcal{A}_P = \varnothing$ и $\mathrm{Sub}\,\mathcal{A}_P$ есть булева алгебра подмножеств множества n, атомы которой имеют вид $\bigcup\limits_{j \in {}^i/_P} D_j$, где $i \in n$. Тогда очевидно, что отображение ψ решетки $\mathrm{Part}\,k$ в решетку $[\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}]$, определенное как $\psi(P) = \overline{\mathcal{A}_P}$, и является искомым вложением решетки $\mathrm{Part}\,k$ в решетку $[\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}]$. Тем самым имеет место

Теорема 3. *Для любой конечной решетки L для любого натурального m существуют натуральное n, интервал $[\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}]$ шкалы $\langle CT_n^m; \leq \rangle$, являющийся решеткой, и вложение φ решетки L (как решетки) в решетку $[\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}]$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пинус А. Г., Журков С. В.* О шкалах потенциалов вычислимости универсальных алгебр // Вычислит. системы. 2002. Т. 169. С. 26–38.
2. *Пинус А. Г.* Условные термы и их приложения в алгебре и в теории вычислений // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 4. С. 37–72.
3. *Пинус А. Г.* Программно вычислимые функции на универсальных алгебрах // Мат. вопросы кибернетики. 2001. Т. 10. С. 235–244.
4. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
5. *Пинус А. Г., Журков С. В.* Некоторые замечания о шкалах потенциалов вычислимости n-элементных алгебр // Алгебра и теория моделей. 3. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. Т. 3. С. 107–113.
6. О длинах шкал потенциалов вычислимости n-элементных алгебр // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 858–863.
7. *Пинус А. Г., Журков С. В.* Об автоморфизмах шкал потенциалов вычислимости n-элементных алгебр // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 44, № 3. С. 606–621.
8. *Пинус А. Г.* Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 4. С. 432–459.
9. *Журков С. В.* О шкалах потенциалов вычислимости n-элементных унаров // Вестн. НГУ. 2003. Т. 3, № 2. С. 20–31.
10. *Пинус А. Г.* Внутренние изоморфизмы и условно рациональная эквивалентность унарам и полям // Алгебра и теория моделей. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1997. С. 131–142.
11. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. Новосибирск: Наука, 1980.
12. *Pudlak P., Tuma J.* Every finite lattice can be embedded into a finite partition lattice // Algebra Univ. 1980. V. 10, N 1. P. 74–95.

Статья поступила 23 апреля 2003 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru