Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 517.512

ПРОСТРАНСТВО МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ФУРЬЕ — ХААРА

О. В. Лелонд, Е. М. Семенов, С. Н. Уксусов

Аннотация: Система Хаара образует безусловный базис в сепарабельном перестановочно-инвариантном (симметричном) пространстве E тогда и только тогда, когда мультипликатор, определяемый последовательностью $\lambda_{nk} = (-1)^n$, $k = 0, 1$, для $n = 0$ и $k = 0, 1, \dots, 2^n$ для $n \geq 1$, ограничен в E. Если пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ отлично от L_1 и L_∞, то существует мультипликатор по системе Хаара, который ограничен в $\Lambda(\varphi)$ и не ограничен в L_∞ и L_1.

Ключевые слова: система Хаара, перестановочно-инвариантные пространства, пространства Лоренца, мультипликаторы, безусловные базисы.

1. Система функций $\chi_0^0(t) = 1$,

$$\chi_n^k(t) = \begin{cases} 1, & (k-1)2^{-n} < t < (k - \frac{1}{2})2^{-n}, \\ -1, & (k - \frac{1}{2})2^{-n} < t < k2^{-n}, \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0,1], \end{cases}$$

где $1 \leq k \leq 2^n$, $n = 0, 1, \dots$, называется *системой Хаара*. Множество индексов (n, k), соответствующих функциям Хаара, будем обозначать через Ω. Формула $m = 2^n + k$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между Ω и множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и позволяет использовать одноиндексную систему Хаара $\{\chi_m\}$.

Всякая последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ порождает мультипликатор Λ, который на полиномах по системе Хаара определяется следующим образом:

$$\Lambda\Big(\sum_m c_m \chi_m\Big) = \sum_m \lambda_m c_m \chi_m.$$

Согласно классической теореме Пэли — Марцинкевича [1, теорема 3, следствие 2] или [2, разд. 2, с. 5] мультипликатор Λ ограничен в L_p $(1 < p < \infty)$, если $\sup\limits_m |\lambda_m| < \infty$. Более того, если $1 < p < \infty$, то

$$\|\Lambda\|_{L_p} \approx \|\lambda\|_{l_\infty} = \sup_m |\lambda_m|,$$

где знак $\approx$ означает двусторонние оценки с константами, которые не зависят от λ. Настоящая работа посвящена изучению пространств мультипликаторов, действующих в парах функциональных пространств. Мультипликаторы по системе Хаара изучались в работах [3–7] и многих других.

2. Приведем необходимые определения. Банахово функциональное пространство E на $[0, 1]$ с мерой Лебега называется *перестановочно-инвариантным* (r.i.) или *симметричным*, если

1) из $|x(t)| \le |y(t)|$ и $y \in E$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E \le \|y\|_E$;

2) из равноизмеримости $x(t)$, $y(t)$ и $y \in E$ следует $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что E сепарабельно или сопряжено к сепарабельному пространству.

Обозначим через $\varkappa_e(t)$ характеристическую функцию измеримого множества $e \subset [0,1]$.

Для любого $\tau > 0$ оператор

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(\frac{t}{\tau}), & 0 \le t \le \min(\tau, 1), \\ 0, & \min(\tau,1) < t \le 1, \end{cases}$$

ограничен в r.i. пространстве E и $\|\sigma_\tau\|_E \le \max(1,\tau)$. Числа

$$\alpha_E = \lim_{\tau \to 0} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}, \quad \beta_E = \lim_{\tau \to \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}$$

называются *индексами Бойда пространства* E. Всегда $0 \le \alpha_E \le \beta_E \le 1$. Без ограничения общности можно считать $\|\varkappa_{(0,1)}\|_E = 1$.

Если E — r.i. пространство, то через E' обозначается множество измеримых на $[0,1]$ функций, для которых

$$\|x\|_{E'} = \sup_{\|y\|_E \le 1} \int\limits_0^1 x(t)y(t)\,dt < \infty.$$

Известно, что E' также r.i. пространство. Если E сепарабельно, то E' совпадает с сопряженным пространством E^* и их нормы равны. Если E сепарабельно, то вложение $E \subset E''$ изометрично.

Пространства Лоренца $L_{p,q}$ играют важную роль в теории r.i. пространств. Если $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, то через $L_{p,q}$ обозначается множество суммируемых функций, для которых

$$\|x\|_{L_{p,q}} = \left(\frac{q}{p} \int\limits_0^1 (x^*(t) t^{\frac{1}{p}})^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

где $x^*(t)$ — перестановка функции $|x(t)|$ в убывающем порядке. Для $q = \infty$ норма модифицируется обычным образом. Если $q > p$, то $\|\cdot\|_{L_{p,q}}$ — квазинорма, эквивалентная некоторой норме. Если $1 \le q < r \le \infty$, то $L_{p,q} \subset L_{p,r}$, и это вложение строгое. Очевидно, $L_{p,p}$ совпадает с L_p.

Обозначим через Φ множество возрастающих вогнутых на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих условию $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Всякая функция $\varphi \in \Phi$ порождает пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ с нормой

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int\limits_0^1 x^*(t) d\varphi(t).$$

Система $\left\{2^{\frac{n}{2}} \chi_n^k,\ (n,k) \in \Omega\right\}$ — полная ортонормированная система. Если r.i. пространство E сепарабельно, то множество полиномов по системе Хаара плотно в E.

Все изложенные выше сведения о r.i. пространствах содержатся в $[2, 8]$, о системе Хаара — в $[1, 2, 5, 6]$.

3. Обозначим через S множество мультипликаторов, удовлетворяющих условию $\lambda_{n,k} = \pm 1$ для всех $(n,k) \in \Omega$. Хорошо известно, что система Хаара образует безусловный базис в сепарабельном пространстве E тогда и только тогда, когда $\|\Lambda\|_E$ $(\Lambda \in S)$ равномерно ограничено. Обозначим через Λ_0 мультипликатор, определяемый последовательностью $\lambda_{n,k} = (-1)^n,\ (n,k) \in \Omega$.

Теорема 1. *Пусть E — r.i. пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *мультипликатор Λ_0 ограничен в E,*

(ii) *всякий мультипликатор Λ $(\Lambda \in S)$ ограничен в E и* $\sup\limits_{\Lambda \in S} \|\Lambda\|_E < \infty$,

(iii) $0 < \alpha_E \le \beta_E < 1$.

Доказательство. Эквивалентность условий (ii) и (iii) хорошо известна [2, разд. 2, с. 6] или [8, п. 2.9.6]. Импликация (ii)$\to$(i) тривиальна. Поэтому достаточно доказать лишь импликацию (i)$\to$(iii).

Покажем, что ограниченность мультипликатора Λ_0 влечет ограниченность оператора

$$H_2 x(t) = \int\limits_t^1 \frac{x(s)}{s}\, ds.$$

Рассмотрим функцию

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \chi_n^1(t) = -x_0 \varkappa_{(\frac{1}{2},1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-x_n + \sum_{k=0}^{n-1} x_k \right) \varkappa_{(2^{-n-1},2^{-n})}(t). \tag{1}$$

Если $x_{2n} = -x_{2n+1} > 0,\ n = 0, 1\ldots$, то

$$-x_n + \sum_{k=0}^{n-1} x_k = \begin{cases} -x_{2j-1}, & n = 2j-1, \\ -2x_{2j}, & n = 2j, \end{cases} \qquad j = 1, 2\ldots, \tag{2}$$

и

$$\begin{aligned} \Lambda_0 x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n \chi_n^1 \\ &= -x_0 \varkappa_{(\frac{1}{2},1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n x_n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x_k \right) \varkappa_{(2^{-n-1},2^{-n})}(t) \\ &= -x_0 \varkappa_{(\frac{1}{2},1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n x_n + \sum_{k=0}^{n-1} |x_k| \right) \varkappa_{(2^{-n-1},2^{-n})}(t). \end{aligned}$$

Отсюда $\Lambda_0 x(t) = -x_0$ для $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ и

$$\Lambda_0 x(t) = \sum_{k=0}^{2n} |x_k| \tag{3}$$

для $t \in (2^{-2n-1}, 2^{-2n})$, $n = 1, 2\ldots.$

Рассмотрим функцию

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| \varkappa_{(2^{-k-1},2^{-k})}(t).$$

Имеем

$$(H_2y)(2^{-n}) = \int\limits_{2^{-n}}^{1} \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| \varkappa_{(2^{-k-1},2^{-k})}(t)\frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^{n-1} |x_k| \int\limits_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \frac{dt}{t} = \ln 2 \sum_{k=0}^{n-1} |x_k|.$$

В силу монотонности функции $(H_2y)(t)$ получаем

$$(H_2y)(t) \le \ln 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |x_k| \right) \varkappa_{(2^{-n},2^{-n+1})}(t).$$

Сравнивая последнее неравенство с (2), видим, что

$$\frac{1}{\ln 2} H_2y(t) \le |\Lambda_0 x(t)| + |\sigma_2 \Lambda_0 x(t)|.$$

Так как $\|\sigma_\tau\|_E \le \max(\tau, 1)$ для всех $\tau > 0$ [8, п. 2.4.16], имеем

$$\|Hy\|_E \le 3 \ln 2 \|\Lambda_0 x\|_E.$$

Заметим, что в силу (1), (3)

$$|x| \le 2|y|.$$

Поэтому

$$\|H_2y\|_E \le 3 \ln 2 \|\Lambda_0\|_E \|x\|_E \le 6 \ln 2 \|\Lambda_0\|_E \|y\|_E. \tag{4}$$

Рассмотрим также оператор

$$H_1x(t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t x(s)\, ds.$$

Операторы H_1 и H_2 сопряженные друг к другу в том смысле, что

$$\int\limits_0^1 H_1u(t)v(t)\, dt = \int\limits_0^1 u(t) H_2 v(t)\, dt \tag{5}$$

для любых $u, v \in L_2$. Если же H_1 ограничен в r.i. пространстве E, то H_2 ограничен в r.i. пространстве E' и (5) справедливо для всех $u \in E$, $v \in E'$. Так как H_1 — положительный оператор, его норма в любом r.i. пространстве достигается на множестве неотрицательных функций. Более того, она достигается на множестве неотрицательных невозрастающих на $[0, 1]$ функций. Действительно, в силу неравенства (2.2.12) из [8]

$$(H_1u)(t) \le H_1u^*(t). \tag{6}$$

Из неравенства (2.2.25) в [8] и очевидного равенства $(H_1u^*)^* = H_1u^*$ вытекает, что

$$\int\limits_0^1 H_1u(t)v(t)\, dt \le \int\limits_0^1 H_1u^*(t)v^*(t)\, dt$$

для любых $u \in E$, $v \in E'$. Это означает, что норма оператора H_1 в любом r.i. пространстве E достигается на множестве неотрицательных невозрастающих функций. То же самое в силу (5) справедливо и для H_2.

Пусть $u = u^* \in E$ и $a > 1$. Тогда функция

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(a^{-k})\chi_{(a^{-k-1},a^{-k})}(t) \tag{7}$$

обладает следующим свойством:

$$v(t) \le u(t) \le \sigma_a v(t).$$

Отсюда вытекает, что $\|v\|_E \le \|u\|_E \le \|\sigma_a v\|_E \le a\|v\|_E$ и

$$\|H_2\|_E \le a \sup \|H_2 v\|, \tag{8}$$

где точная верхняя граница берется по всем функциям v вида (7) и $\|u\|_E \le 1$. Применяя (4) и (8) с $a = 4$, получаем

$$\|H_2\|_E \le 24 \ln 2 \|\Lambda_0\|_E.$$

Таким образом, из ограниченности мультипликатора Λ_0 в E вытекает ограниченность H_2 в E.

Всякий мультипликатор Λ является самосопряженным оператором в L_2 и, в частности, из ограниченности Λ_0 в E следуют его ограниченность в E' и равенство $\|\Lambda_0\|_E = \|\Lambda_0\|_{E'}$ [7, формула (4)]. Применяя доказанное выше утверждение к E', получаем, что оператор H_2 ограничен в E'. Тогда в силу (5) H_1 ограничен в E. Хорошо известно [8, теоремы 2.6.6 и 2.6.8], что ограниченность операторов H_1 и H_2 в E влечет (iii). $\square$

Итак, система Хаара образует безусловный базис в сепарабельном r.i. пространстве E тогда и только тогда, когда мультипликатор Λ_0 ограничен в E. Покажем, что аналогичным свойством обладают и некоторые другие мультипликаторы $\Lambda \in S$.

Если $(n,k) \in \Omega$, то через $O(n,k)$ будем обозначать множество таких $(i,j) \in \Omega$, что $\operatorname{supp}\chi_i^j \subset \operatorname{supp}\chi_n^k$. Всякая последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$, где $\varepsilon_n = \pm 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, порождает последовательность $\lambda_{n,k} = \varepsilon_n$ для всех $(n,k) \in \Omega$ и соответствующий мультипликатор Λ_ε. Пусть m_n — монотонно возрастающая последовательность целых чисел, $c_{n,k} \in \mathbb{R}^1$ для всех $(n,k) \in \Omega$. Из определения системы Хаара и свойств независимых функций вытекает, что функции

$$\sum_{(n,k)\in\Omega} c_{n,k}\chi_n^k(t), \qquad \sum_{(n,k)\in\Omega} c_{n,k} \sum_{(m_n,i)\in O(n,k)} \chi_{m_n}^i(t)$$

равноизмеримы. Это простое замечание приводит к следующему утверждению.

Следствие 2. *Если последовательность ε содержит бесконечное множество значений $+1$ и -1, то ограниченность мультипликатора Λ_ε в r.i. пространстве E эквивалентна условиям* (ii) *или* (iii) *теоремы* 1.

Как было видно из доказательства теоремы 1, мультипликатор Λ_1, определяемый последовательностью

$$\lambda_{n,k} = \begin{cases} (-1)^n, & k = 1, \\ 1, & 1 < k \le 2^n, \ n = 1, 2 \dots, \end{cases}$$

обладает тем же свойством, что и Λ_0, т. е. ограниченность Λ_1 в r.i. пространстве E эквивалентна условиям (ii) или (iii) теоремы 1. Однако не каждый мультипликатор Λ с бесконечным числом $+1$ и -1 обладает свойством, описанным в теореме 1.

Пусть $\varepsilon_n = \pm 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через Λ_2 мультипликатор, определяемый последовательностью

$$\lambda_{n,k} = \begin{cases} \varepsilon_n, & k = 2, \\ 1, & k \ne 2, \ n = 1, 2 \dots. \end{cases}$$

Теорема 3. *Мультипликатор Λ_2 ограничен в любом r.i. пространстве E, и $\|\Lambda_2\|_E \le 3$.*

Доказательство. Обозначим через P проектор на подсистему $\{\chi_n^2,\ n = 1, 2\ldots\}$ и докажем, что $\|P\|_{L_\infty} = 1$. Напомним, если $n \in \mathbb{N}$, то

$$\chi_n^2(t) = \begin{cases} 1, & t \in \triangle_{n+1}^3, \\ -1, & t \in \triangle_{n+1}^4. \end{cases}$$

Если $\operatorname{supp} u \subset \triangle_{n+1}^3$, $\operatorname{supp} v \subset \triangle_{n+1}^4$,

$$\int_0^1 u(t) = \int_0^1 v(t)\, dt = 0$$

и функция $w(t)$ постоянна на $\triangle_n^2$, то простые оценки доказывают неравенство

$$\left\|\chi_n^2 + u + v + w\right\|_{L_\infty} \ge \left\|\chi_n^2 + w\right\|_{L_\infty} \ge 1.$$

Это означает, что $\|Px\|_{L_\infty} \le \|x\|_\infty$ для всех $x \in L_\infty$. Неравенство $\|P\|_{L_\infty} \ge 1$ очевидно. Поэтому $\|P\|_{L_\infty} = 1$.

Из соображений двойственности $\|P\|_{L_1} = \|P\|_{L_\infty} = 1$. В силу интерполяционной теоремы Кальдерона — Митягина [8, пп. 2.4.9, 2.4.10] $\|P\|_E = 1$ для любого r.i. пространства E. То же самое справедливо для любой последовательности n_i. Обозначим через $\{n_i\}$ множество тех n, для которых $\varepsilon_n = -1$, и пусть P — проектор на подсистему $\{\chi_{n_i}^2,\ i = 1, 2\ldots\}$. Так как $\Lambda_2 = I - 2P$, где I — тождественный оператор, то $\|\Lambda_2\|_E \le 3$. $\square$

Таким образом, теоремы 1 и 3 описывают противоположные свойства мультипликаторов Λ_0 (или Λ_1) и Λ_2.

Однако возможна ситуация, когда мультипликатор не ограничен в L_∞ и ограничен в r.i. пространстве с тривиальными индексами Бойда. Более того, справедлива

Теорема 4. *Пусть $\varphi \in \Phi$ и*

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\varphi(t)} = 0. \tag{9}$$

Существует такой мультипликатор $M \in S$, что M ограничен в $\Lambda(\varphi)$ и не ограничен в L_∞.

Доказательство. В силу предположения (9) существует такая последовательность $n_i \in \mathbb{N}$, что

$$\varphi(2^{-n_{i+1}}) \le \frac{1}{2}\varphi(2^{-n_i}) \tag{10}$$

и

$$2^{n_{i+1}}\varphi(2^{-n_{i+1}}) \ge 2^{n_i+1}\varphi(2^{-n_i}) \tag{11}$$

для всех $i \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность

$$\lambda_{n,k} = \begin{cases} -1, & n = n_i,\ k = 1, \\ 1 & \text{для остальных } (n,k) \in \Omega \end{cases}$$

и соответствующий мультипликатор M.

Можно считать, что $n_{i+1} \geq n_i + 2$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Выберем $m_i \in \mathbb{N}$ так, чтобы $n_{i+1} > m_i > n_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Функция

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bigl(\chi^1_{n_i}(t) - \chi^1_{m_i}(t)\bigr)$$

ограничена, и $\|x\|_{L_\infty} = 1$. Однако функция

$$Mx(t) = -\sum_{i=1}^{\infty} \bigl(\chi^1_{n_i}(t) + \chi^1_{m_i}(t)\bigr)$$

не ограничена в окрестности нуля, что и доказывает неограниченность мультипликатора M в L_∞.

Докажем ограниченность M в $\Lambda(\varphi)$. Обозначим через Q проектор на подсистему Хаара $\bigl\{\chi^1_{n_i},\ i \in \mathbb{N}\bigr\}$. Так как $Q = \frac{1}{2}(I - M)$, нам достаточно показать ограниченность Q в $\Lambda(\varphi)$. Если $e \subset [0,1]$, то

$$Q\varkappa_e(t) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{n_i} \int\limits_e \chi^1_{n_i}(s)ds\chi^1_{n_i}(t)$$

и

$$\|Q\varkappa_e\|_{\Lambda(\varphi)} \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{n_i} \operatorname{mes}(e \cap (0, 2^{-n_i}))\varphi(2^{-n_i}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{n_i} \min(\operatorname{mes} e, 2^{-n_i})\varphi(2^{-n_i}).$$

Положим $\operatorname{mes} e = \tau$ и допустим дополнительно, что $\tau = 2^{-n_j}$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$. Используя (10) и (11), получаем

$$\begin{aligned}\|Q\varkappa_e\|_{\Lambda(\varphi)} &\leq \sum_{i=1}^{j} 2^{n_i - n_j}\varphi(2^{-n_i}) + \sum_{j=j+1}^{\infty} 2^{n_i - n_i}\varphi(2^{-n_i}) \\ &\leq 2^{-n_j}2^{n_j}\varphi(2^{-n_j})(1 + 1/2 + \dots) + \varphi(2^{-n_j})(1/2 + 1/4 + \dots) = 3\varphi(2^{-n_j}).\end{aligned}$$

Таким образом, неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{n_i} \min(\tau, 2^{-n_i})\varphi(2^{-n_i}) \leq 3\varphi(\tau) \tag{12}$$

установлено для всех $\tau = 2^{-n_j}$, $j \in \mathbb{N}$. Функция, стоящая в левой части (12), линейна по τ на всяком промежутке $[2^{-n_{j+1}}, 2^{-n_j}]$, а функция φ вогнута. Поэтому (12) справедливо для всех $\tau \in [0,1]$. В силу [8, лемма 2.5.2]

$$\|Qx\|_{\Lambda(\varphi)} \leq 6\|x\|_{\Lambda(\varphi)} \tag{13}$$

для любой ступенчатой функции $x(t)$. Так как множество ступенчатых функций плотно в $\Lambda(\varphi)$ [8, лемма 2.5.1] и Q ограничен в L_2, то (13) справедливо для всех $x \in \Lambda(\varphi)$. Отсюда $\|Q\|_{\Lambda(\varphi)} \leq 6$ и

$$\|M\|_{\Lambda(\varphi)} = \|I - 2Q\|_{\Lambda(\varphi)} \leq 13. \qquad \square$$

Заметим: условие (9) означает, что $\Lambda(\varphi)$ не совпадает с L_∞ и L_1.

Согласно теореме Яно [3] если $1 < p < q < \infty$, то

$$\|\Lambda\|_{L_p, L_q} \approx \sup_{(n,k)\in\Omega} |\lambda_{n,k}| 2^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}, \tag{14}$$

где константы эквивалентности зависят только от p, q. Простые оценки показывают, что

$$\sup_{(n,k)\in\Omega} |\lambda_{n,k}| 2^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \approx \sup_{m\in N} |\lambda_m| m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Формула (14) допускает обобщение на пространства $L_{p,q}$.

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $1 \le r,\ s \le \infty$. *Для того чтобы*

$$\|\Lambda\|_{L_{p,r},L_{q,s}} \approx \sup_{(n,k)\in\Omega} |\lambda_{n,k}| 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})},$$

необходимо и достаточно, чтобы $r \le s$.

Доказательство. Необходимость. Ясно, что наше утверждение достаточно доказать при дополнительном предположении о конечности r, s. Предположим, что мультипликатор Λ, где $\lambda_{n,k} = 2^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$, ограничен из $L_{p,r}$ в $L_{q,s}$. Тогда

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} c_n \chi_n^2\right\|_{q,s} \le C \left\|\sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n^2\right\|_{p,r}$$

для некоторой константы $C > 0$ и любых последовательностей $\{c_k\}$, для которых правая часть этого неравенства конечна. Пусть $c_n 2^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \uparrow \infty$, тогда и $c_n \uparrow \infty$. Так как носители функций χ_n^2 попарно дизъюнктны, то

$$\left(\frac{s}{q}\int_0^1 \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} c_n \varkappa_{(2^{-n-1},2^{-n})}(t)\right) t^{\frac{1}{q}}\right)^s \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\le C\left(\frac{r}{p}\int_0^1 \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varkappa_{(2^{-n-1},2^{-n})}(t)\right) t^{\frac{1}{p}}\right)^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Отсюда

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})s} (2^{-n\frac{s}{q}} - 2^{-(n+1)\frac{s}{q}}) c_n^s\right)^{\frac{1}{s}} \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n\frac{r}{p}} - 2^{-(n+1)\frac{r}{p}}) c_n^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

и

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\frac{s}{p}} c_n^s\right)^{\frac{1}{s}} \le \frac{(1-2^{-\frac{r}{p}})^{\frac{1}{r}}}{(1-2^{-\frac{s}{q}})^{\frac{1}{s}}} C \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\frac{r}{p}} c_n^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Обозначая $2^{-\frac{n}{p}} c_n = d_n$, $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n^s\right)^{\frac{1}{s}} \le C_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n^r\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{15}$$

где

$$C_1 = \frac{(1-2^{-\frac{r}{p}})^{\frac{1}{r}}}{(1-2^{-\frac{s}{q}})^{\frac{1}{s}}} C.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Положим

$$c_n = \begin{cases} 2^{\frac{n}{p}}, & n \le m, \\ 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+\frac{m}{q}}, & n \ge m. \end{cases}$$

Тогда

$$d_n = \begin{cases} 1, & n \le m, \\ 2^{\frac{m-n}{q}}, & n \ge m, \end{cases}$$

и в силу (15)

$$\left(m+\sum_{n=m+1}^{\infty}2^{\frac{m-n}{q}s}\right)^{\frac{1}{s}}\le C_1\left(m+\sum_{n=m+1}^{\infty}2^{\frac{m-n}{q}r}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Отсюда

$$\left(m+\frac{1}{1-2^{-\frac{s}{q}}}\right)^{\frac{1}{s}}\le C_1\left(m+\frac{1}{1-2^{-\frac{r}{q}}}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ясно, что из справедливости этого неравенства при всех $m=1,2\dots$ вытекает $s\ge r$.

Докажем вторую часть теоремы. Ограниченность мультипликатора Λ, где

$$\lambda_{n,k}\le C2^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})},\quad (n,k)\in\Omega,\quad C>0,$$

из $L_{p,r}$ в $L_{q,r}$ для всех $r\in[1,\infty]$ была доказана в [7, теорема 1]. Так как $L_{q,r}\subset L_{q,s}$ при $r\le s$ [2, п. 2.b.9], отсюда вытекает ограниченность Λ из $L_{p,r}$ в $L_{q,s}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кашин Б. С., Саакян А. Л.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
2. *Lindenstrauss L., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. Function spaces. Berlin: Springer-Verl., 1979.
3. *Yano S.* On a Lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier series // Tohoku Math. J. 1959. V. 11. P. 191–215.
4. *Кротов В. Г.* О безусловной сходимости рядов Хаара в Λ_ω^p // Мат. заметки. 1978. Т. 5, № 23. С. 685–695.
5. *Novikov I. Ya., Semenov E. M.* Haar series and linear operators. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
6. *Голубов Б. И.* Ряды Фурье по системе Хаара // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 109–146. (Итоги науки и техники).
7. *Брыскин И. Б., Лелонд О. В., Семенов Е. М.* Мультипликаторы рядов Фурье — Хаара // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 4. С. 758–766.
8. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 26 апреля 2004 г.

Лелонд Ольга Владимировна
Тольяттинский гос. университет, кафедра высшей математики,
ул. Белорусская, 14, Тольятти 445067, Самарская обл.
office@tlt.su.ru

Семенов Евгений Михайлович, Уксусов Сергей Николаевич
Воронежский гос. университет, кафедра теории функций и геометрии,
Университетская пл., 1, Воронеж 394693
root@func.vsu.ru