Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 512.54

О ГРУППАХ, НАСЫЩЕННЫХ КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ГРУПП

А. К. Шлёпкин, А. Г. Рубашкин

Аннотация: Изучаются периодические группы, насыщенные конечным множеством конечных (простых неабелевых) групп. Получена некоторая информация об элементах насыщающего множества таких групп.

Ключевые слова: группа, насыщенная множеством групп, группа Шункова.

Напомним, что группа G *насыщена* группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая ее конечная подгруппа K содержится в конечной подгруппе, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [1]. Пусть группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{R}$ и для любой $X \in \mathfrak{R}$ в G найдется подгруппа L, изоморфная X. В этом случае мы будем говорить, что G *насыщена множеством групп* $\mathfrak{R}$, а само множество $\mathfrak{R}$ называть *насыщающим множеством групп* для G. Так, например, свободные бернсайдовы группы $B(m, n)$ [2] нечетного периода $n \geq 665$ насыщены одной циклической группой порядка n. Конечные подгруппы группы G, изоморфные группам из множества $\mathfrak{R}$, будем называть $\mathfrak{R}$*-группами.*

Пусть, как обычно в обозначениях конечных простых групп, q — степень простого числа, $\delta = \pm$, $k_{2'}$ — нечетная часть натурального числа k. Обозначим через $t(k)$ число слагаемых в двоичном разложении числа k. Более точно, если $k = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \ldots + 2^{r_t}$, где $r_1, \ldots, r_t$ — целые неотрицательные числа и $0 \leq r_1 < \ldots < r_t$, то $t(k) = t$.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество, состоящее из групп $E_6^\delta(q)$, где q нечетно и $\frac{(q-\delta 1)_{2'}}{(3,q-\delta 1)} > 3$, и групп $L_n^\delta(q)$, где q нечетно и либо $t(n) = 2$, $(q-\delta 1)_{2'} > 3$, либо $n > 2$, $t(n) \neq 2$, $\frac{(q-\delta 1)_{2'}}{(3,q-\delta 1)} > 3$.

Теорема 1. *Пусть периодическая группа G насыщена конечными простыми неабелевыми группами из конечного множества $\mathfrak{R}$, имеющего пустое пересечение с $\mathfrak{F}$. Тогда G конечна и изоморфна некоторой группе множества $\mathfrak{R}$.*

Группа G называется *группой Шункова*, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу [3].

Теорема 2. *Группа Шункова, насыщенная группами из произвольного конечного множества $\mathfrak{R}$ конечных групп, обладает периодической частью, изоморфной одной из групп множества $\mathfrak{R}$.*

Пусть бесконечная периодическая группа G насыщена произвольным конечным множеством $\mathfrak{R}$ конечных простых неабелевых групп. Рассмотрим некоторые ее свойства.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00356) и ККФН (грант 11F0202C).

Очевидна следующая

Лемма 1. *Все локально конечные подгруппы в G конечны, причем порядки их ограничены в совокупности. Каждая конечная подгруппа из G содержится в некоторой максимальной конечной подгруппе, которая проста и является $\mathfrak{R}$-группой. В частности, порядки конечных подгрупп из G ограничены в совокупности.*

Ввиду теоремы Фейта — Томпсона группа G содержит инволюции. По известной теореме Шункова [4] периодическая группа с почти регулярной инволюцией локально конечна и почти разрешима. Поэтому имеет место

Лемма 2. *Централизатор каждой инволюции в G бесконечен.*

Максимальные p-подгруппы группы G будем называть *силовскими p-подгруппами*, а максимальные конечные p-подгруппы, существующие ввиду леммы 1, — *конечными силовскими p-подгруппами.*

Лемма 3. *Силовские* 2*-подгруппы в G конечны и сопряжены.*

Доказательство. Каждая 2-группа является группой Шункова [3], а группа Шункова с бесконечным числом элементов конечного порядка обладает бесконечной локально конечной подгруппой [5]. Учитывая лемму 1, приходим к выводу, что силовские 2-подгруппы в G конечны. Как доказал В. П. Шунков [6], в этом случае силовские 2-подгруппы группы G сопряжены, при этом понятно, что каждая 2-подгруппа из G содержится в некоторой силовской. Лемма доказана.

Из леммы 3 следует

Лемма 4. *Группа G содержит конечное число классов сопряженных* 2*-подгрупп. В частности, множество J инволюций группы G распадается на конечное число классов $J_1, \dots , J_n$ сопряженных инволюций.*

Лемма 5. *Нормализатор каждой* 2*-подгруппы в G бесконечен.*

Доказательство. Пусть V — произвольная 2-подгруппа группы G. Ввиду леммы 3 подгруппа V конечна. В случае, когда $|V| = 2$, утверждение следует из леммы 2. В случае $|V| > 2$ можем считать, что для каждой подгруппы R индекса 2 из V подгруппа $M = N_G(R)$ бесконечна. Поскольку $V < M$ и фактор-группа M/R не локально конечна (лемма 1), в силу теоремы Шункова [4] централизатор инволюции V/R в M/R бесконечен. Переходя к прообразам, убеждаемся, что лемма верна.

Напомним некоторые определения и утверждения из [7].

Множество X конечных подгрупп группы G с нетривиальным пересечением T называется *веером X с основанием T*. Веер X называется *конечным* или *бесконечным* в зависимости от конечности или бесконечности множества X. Произвольное подмножество $Y \subseteq X$ называется *подвеером* веера X. *Амальгамой* $\Sigma(X)$ веера X называют теоретико-множественное объединение подгрупп этого веера.

Полурешеткой $L(X)$ веера X называется нижняя полурешетка (относительно включения $\leq$) всех подгрупп, содержащихся в подгруппах веера X. Веер X называется *ограниченным*, если все цепи из полурешетки $L(X)$ имеют конечную длину, и *неограниченным* в противном случае.

Амальгама бесконечного неограниченного веера содержит бесконечную локально конечную подгруппу [7], поэтому в наших исследованиях будут возникать только ограниченные правильные вееры. Бесконечный веер X с основанием T называется *правильным*, если основание любого бесконечного подвеера из X совпадает с T, $T \notin X$, и для любой подгруппы $V \leq T$ такой, что $|N_G(V) \cap \Sigma(X)| < \infty$, имеет место включение $N_G(V) \cap \Sigma(X) \leq T$.

Если X — ограниченный бесконечный веер произвольной группы G, то существует разбиение

$$X = Y \cup X_1 \cup \ldots \cup X_\gamma$$

веера X на конечный (или пустой) подвеер Y и бесконечные правильные подвееры X_i с различными основаниями T_i.

Пусть T — произвольная 2-подгруппа из G, $H = N_G(T)$ и $C = C_G(T)$. С учетом лемм 1, 3, 5 верна

Лемма 6. *Индекс $|H : C|$ конечен, $C \lhd H$, C — бесконечная группа, и все локально конечные подгруппы групп C и H конечны, а порядки их ограничены в совокупности. Веер X всех максимальных конечных подгрупп из G, содержащих подгруппу T, состоит из $\mathfrak{R}$-групп и содержит бесконечные вееры сопряженных между собой подгрупп. Если дополнительно $|T| = 2$, то амальгама $\Sigma(X)$ веера X содержит множество $J(G)$ всех инволюций группы G.*

Из теоремы 7 [8] следует

Лемма 7. *Если G — конечная простая неабелева группа, S — силовская 2-подгруппа G и $C = O(C_G(S)) \neq 1$, то имеет место одно из утверждений:*

(1) $G \simeq L_k^\delta(q)$, где $\delta = \pm$, q нечетно, $k = 2^{t_1} + \ldots + 2^{t_s}$, $0 \leq t_1 < \ldots < t_s$, $s \geq 2$, и $C = C_1 \times \ldots \times C_{s-1}$, где C_i — циклическая группа порядка $(q-\delta 1)_{2'}$ при $1 \leq i \leq s-2$ и порядка $(q-\delta 1)_{2'}/(q-\delta 1, k)_{2'}$ при $i = s-1$;

(2) $G \simeq E_6^\delta(q)$, где q нечетно, и C — циклическая группа порядка $(q-\delta 1)_{2'}/(3, q-\delta 1)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть S — некоторая силовская 2-подгруппа из G. Как следует из леммы 6, в $S \cdot C_G(S)$ найдется конечная подгруппа $M = S \times C$, где C — неединичная группа нечетного периода. По условиям теоремы M содержится в некоторой конечной простой $\mathfrak{R}$-подгруппе $L < G$. Тогда по лемме 7 L изоморфна одной из групп $L_k^\delta(q)$, $E_6^\delta(q)$, где q нечетно. Учитывая ограничения на числа $\delta 1$, q, n и m в теореме и строение подгруппы C в лемме 7, выводим, что C — группа периода 3. Значит, и фактор-группа $S \cdot C_G(S)/S$ имеет период 3. Хорошо известно, что такая группа локально конечна [9]. По теореме Шмидта группа $S \cdot C_G(S)$ также локально конечна; возникает противоречие между леммами 1 и 6. Полученное противоречие означает, что G не может быть бесконечной. Но тогда она, очевидно, изоморфна одной из групп множества $\mathfrak{R}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Действительно, если G содержит бесконечно много элементов конечного порядка, то она содержит бесконечную локально конечную подгруппу [5], что в нашей ситуации невозможно. Следовательно, G содержит лишь конечное множество элементов конечного порядка, которые, очевидно, порождают конечную нормальную подгруппу $M \lhd G$, и по условию насыщенности M изоморфна одной из групп множества $\mathfrak{R}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлёпкин А. К.* О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Мат. труды. 1998. Т. 1, № 1. С. 129–138.
2. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.

3. *Созутов А. И.* О группах Шункова без элементарных абелевых подгрупп ранга 2 // Междунар. алгебраическая конф. памяти А. К. Фадеева.: Сб. тез. СПб., 1997. С. 286–287.

4. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–494.

5. *Шлепкин А. К.* О сопряженно бипримитивно конечных группах // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 2. С. 266–271.

6. *Шунков В. П.* Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 4. С. 484–496.

7. *Созутов А. И.* О существовании в группе f-локальных подгрупп // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 5. С. 573–598.

8. *Кондратьев А. С., Мазуров В. Д.* 2-сигнализаторы конечных простых групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 5. С. 594–623.

9. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Статья поступила 12 апреля 2004 г.

Шлёпкин Анатолий Константинович, *Рубашкин Артем Геннадьевич*
Красноярский гос. аграрный университет,
пр. Мира, 88а, Красноярск 660049
`ak_kgau@mail.ru`, `ar_kgau@pochta.ru`