Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 517.51

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПОЛУОСИ С МОНОТОННЫМИ ЯДРАМИ

В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова

Аннотация: Даются критерии ограниченности интегральных операторов на полуоси с неотрицательными монотонными ядрами в весовых пространствах Лебега.

Ключевые слова: весовые пространства Лебега, интегральный оператор.

Введение

В работе изучаются условия, при которых для всех измеримых по Лебегу функций $f(x) \geq 0$ на полуоси $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$ с константой $C \geq 0$, не зависящей от f, выполняется неравенство

$$\left(\int_0^\infty [Kf(x)]^q v(x)\,dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^\infty [f(x)]^p u(x)\,dx \right)^{1/p} \tag{1}$$

с измеримыми весовыми функциями $u(x) \geq 0$ и $v(x) \geq 0$ и интегральным оператором

$$Kf(x) := \int_0^\infty k(x,y) f(y)\,dy, \tag{2}$$

где измеримое на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ядро $k(x,y) \geq 0$ монотонно по одной или двум переменным. Примерами таких операторов являются преобразования Лапласа, Гильберта, Стильтьеса и ряд других, для которых оценки вида (1) изучались в работах [1–3].

При $p = 1, \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$ или $q = 1, \infty$ и $1 \leq p \leq \infty$ неравенства (1) характеризуются общей теоремой (см. [4, гл. XI, § 1.5, теорема 4]), а при $1 < q \leq p < \infty$ известен неявный критерий («тест Шура») [5, гл. I, теорема 4.8]. Отметим также, что при $0 < p < 1$, $q \leq \infty$ неравенство (1) выполняется только в тривиальном случае (см. [6, теорема 2]).

Целью данной работы является получение явных условий в терминах ядра и весовых функций, необходимых и/или достаточных для выполнения (1) при $0 < q < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $q \neq 1$. В § 1 даются ключевые леммы. Основные результаты доказаны в § 2 и проиллюстрированы в § 3 примерами, обобщающими в том числе работы [1–3].

Работа обоих авторов выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00017) и гранта 04–03–Г–01–049 ДВО РАН.

Всюду в статье соотношение $A \ll B$ подразумевает неравенство $A \leq cB$ с константой c, зависящей только от параметров суммирования p и q, причем $p' := p/(p-1)$ при $0 < p < \infty$, $p \neq 1$ и $r := pq/(p-q)$ при $0 < q < p < \infty$. Если $A \ll B \ll A$ или $A = cB$, мы пишем $A \approx B$. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными нулю.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Для $0 < q < \infty$ положим

$$K_q f(x) := \int_0^\infty [k(x,y)]^q f(y)\,dy,$$

$$K_q^* g(y) := \int_0^\infty [k(x,y)]^q g(x)\,dx, \quad K^* g := K_1^* g,$$

а также

$$Hf(x) := \int_0^x f(y)\,dy, \quad H^* g(y) := \int_y^\infty g(x)\,dx,$$

$$U(x) := \int_0^x [u(y)]^{1-p'}\,dy, \quad V^*(y) := \int_y^\infty v(x)\,dx.$$

Лемма 1. *Пусть ядро $0 \leq k(x,y) \leq 1$ убывает по y. Предположим, что $1 < q < \infty$ и $\int_0^\infty (Kf)^q v < \infty$. Тогда*

$$\alpha_q \int_0^\infty f(Hf)^{q-1} K_q^* v \leq \int_0^\infty (Kf)^q v \leq \beta_q \int_0^\infty f(Hf)^{q-1} K^* v, \tag{3}$$

где

$$\alpha_q := \min(2, 2^{q-1}), \quad \beta_q := \begin{cases} 2/(q-1), & 1 < q \leq 2, \\ 2^{q-1}, & q > 2. \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что если $F(y,t) = F(t,y)$, то

$$\int_0^\infty \int_0^\infty F(y,t)\,dy\,dt = 2\int_0^\infty dy \int_0^y F(y,t)\,dt.$$

Отсюда по теореме Фубини

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (Kf)^2 v &= \int_0^\infty v(x)\,dx \int_0^\infty \int_0^\infty k(x,y)k(x,t)f(y)f(t)\,dydt \\ &= 2\int_0^\infty v(x)\,dx \int_0^\infty dy \int_0^y k(x,y)k(x,t)f(y)f(t)\,dt \\ &= 2\int_0^\infty f(y)\,dy \int_0^y f(t)\,dt \int_0^\infty k(x,y)k(x,t)v(x)\,dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку $k(x,y) \le k(x,t) \le 1$ для $0 \le t \le y$, то

$$2\int_0^\infty f(Hf)K_2^*v \le \int_0^\infty (Kf)^2 v \le 2\int_0^\infty f(Hf)K^*v. \tag{5}$$

Пусть $q > 2$, $w = v(Kf)^{q-2}$. Из (5) следует, что

$$\int_0^\infty (Kf)^q v = \int_0^\infty (Kf)^2 w \le 2\int_0^\infty f(Hf)K^*w.$$

По неравенству Гёльдера с показателями $(q-1)/(q-2)$, $q-1$

$$K^*w(y) = \int_0^\infty k(x,y)v(x)\,dx \left(\int_0^\infty k(x,z)f(z)\,dz\right)^{q-2}$$
$$\le \left(\int_0^\infty k(x,y)v(x)\,dx\right)^{1/(q-1)}$$
$$\times \left(\int_0^\infty k(x,y)v(x)\,dx \left(\int_0^\infty k(x,z)f(z)\,dz\right)^{q-1}\right)^{(q-2)/(q-1)}.$$

Отсюда, еще раз применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\int_0^\infty (Kf)^q v \le 2\int_0^\infty f(Hf)(K^*v)^{1/(q-1)}(K^*[v(Kf)^{q-1}])^{(q-2)/(q-1)}$$
$$\le 2\left(\int_0^\infty f(Hf)^{q-1}K^*v\right)^{1/(q-1)} \left(\int_0^\infty fK^*[v(Kf)^{q-1}]\right)^{(q-2)/(q-1)}$$
$$= 2\left(\int_0^\infty f(Hf)^{q-1}K^*v\right)^{1/(q-1)} \left(\int_0^\infty (Kf)^q v\right)^{(q-2)/(q-1)},$$

откуда следует оценка сверху в (3). Аналогично проведем оценку снизу:

$$\int_0^\infty (Kf)^q v = \int_0^\infty (Kf)^2 w \ge 2\int_0^\infty f(Hf)K_2^*w$$
$$\ge 2\int_0^\infty f(y)\,dy \int_0^y f(t)\,dt \int_0^\infty [k(x,y)]^2 v(x)\,dx \left(\int_0^y k(x,z)f(z)\,dz\right)^{q-2}$$
$$\ge 2\int_0^\infty f(y)[Hf(y)]^{q-1}\,dy \int_0^\infty [k(x,y)]^q v(x)\,dx.$$

При $1 < q < 2$, пользуясь (4), запишем

$$\int\limits_0^\infty (Kf)^q v = \int\limits_0^\infty (Kf)^2 w$$
$$= 2\int\limits_0^\infty f(y)\,dy \int\limits_0^y f(t)\,dt \int\limits_0^\infty k(x,y)k(x,t)v(x)\,dx \left(\int\limits_0^\infty k(x,z)f(z)\,dz\right)^{q-2}.$$

Имеем

$$\int\limits_0^\infty k(x,z)f(z)\,dz \geq \int\limits_0^t k(x,z)f(z)\,dz \geq k(x,t)Hf(t).$$

Отсюда, так как $k(x,t) \leq 1$,

$$\int\limits_0^\infty (Kf)^q v \leq 2\int\limits_0^\infty f(y)\,dy \int\limits_0^y [Hf(t)]^{q-2} f(t)\,dt \int\limits_0^\infty k(x,y)[k(x,t)]^{q-1} v(x)\,dx$$
$$\leq 2\int\limits_0^\infty f(y)K^* v(y)\,dy \int\limits_0^y (Hf)^{q-2}\,dHf = \frac{2}{q-1}\int\limits_0^\infty f(Hf)^{q-1}K^* v,$$

и оценка сверху в (3) доказана. Для оценки снизу применим неравенство Гёльдера с показателями $1/(q-1)$, $1/(2-q)$:

$$K_q^* v(t) = \int\limits_0^\infty [k(x,t)]^q v(x)\,dx$$
$$= \int\limits_0^\infty [k(x,t)]^{q-1}[Kf(x)]^{(q-2)(q-1)}[Kf(x)]^{(2-q)(q-1)} k(x,t)v(x)\,dx$$
$$\leq \left(\int\limits_0^\infty [k(x,t)]^2 [Kf(x)]^{q-2} v(x)\,dx\right)^{q-1} \left(\int\limits_0^\infty k(x,t)[Kf(x)]^{q-1} v(x)\,dx\right)^{2-q}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\int\limits_0^\infty f(Hf)^{q-1}K_q^* v \leq \int\limits_0^\infty f(t)\,dt \left(Hf(t)\int\limits_0^\infty [k(x,t)]^2[Kf(x)]^{q-2}v(x)\,dx\right)^{q-1}$$
$$\times \left(\int\limits_0^\infty k(x,t)[Kf(x)]^{q-1}v(x)\,dx\right)^{2-q}$$

(второй раз применяя неравенство Гёльдера)

$$\leq \left(\int\limits_0^\infty f(t)Hf(t)\,dt \int\limits_0^\infty [k(x,t)]^2[Kf(x)]^{q-2}v(x)\,dx\right)^{q-1}$$

$$\times\left(\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^\infty k(x,t)[Kf(x)]^{q-1}v(x)\,dx\right)^{2-q}=I_1^{q-1}\,I_2^{2-q}.$$

Левое неравенство в (5) влечет

$$I_1=\int_0^\infty f(Hf)K_2^*w\le\frac{1}{2}\int_0^\infty (Kf)^q v,$$

а также

$$I_2=\int_0^\infty (Kf)^q v.$$

Отсюда

$$2^{q-1}\int_0^\infty f(Hf)^{q-1}K_q^*v\le\int_0^\infty (Kf)^q v.\quad\square$$

Лемма 2. *Пусть ядро $k(x,y)\ge 0$ убывает по y, $1<q<\infty$ и $\int_0^\infty (Kf)^q v<\infty$. Тогда*

$$\alpha_q\int_0^\infty f(Hf)^{q-1}K_q^*v\le\int_0^\infty (Kf)^q v\le\beta_q\int_0^\infty f(H^*f)^{q-1}K_q^*v.\tag{6}$$

Доказательство. Оценка снизу доказана в лемме 1. Покажем оценку сверху. Из (4), используя неравенство

$$k(x,y)\le k(x,t),\quad t\le y,$$

получаем

$$\int_0^\infty (Kf)^2 v\le 2\int_0^\infty f(y)\,dy\int_0^y f(t)\,dt\int_0^\infty [k(x,t)]^2 v(x)\,dx=2\int_0^\infty f(t)K_2^*v(t)H^*f(t)\,dt.\tag{7}$$

Пусть $q>2$. Применяя (7), находим

$$\int_0^\infty (Kf)^q v\le 2\int_0^\infty f(H^*f)K_2^*w.$$

По неравенству Гёльдера

$$K_2^*w(t)=\int_0^\infty [k(x,t)]^2 v(x)\,dx\left(\int_0^\infty k(x,z)f(z)\,dz\right)^{q-2}$$
$$\le\left(\int_0^\infty [k(x,t)]^q v(x)\,dx\right)^{1/(q-1)}\left(\int_0^\infty k(x,t)v(x)[Kf(x)]^{q-1}\,dx\right)^{(q-2)/(q-1)}.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty (Kf)^q v \le 2\int_0^\infty f(H^*f)(K_q^*v)^{1/(q-1)}(K^*[v(Kf)^{q-1}])^{(q-2)/(q-1)}$$

$$\le 2\left(\int_0^\infty f(H^*f)^{q-1}K_q^*v\right)^{1/(q-1)}\left(\int_0^\infty (Kf)^q v\right)^{(q-2)/(q-1)}$$

и приходим к правому неравенству в (6).

Пусть $1 < q < 2$. Из (4) перестановкой интегралов получаем

$$\int_0^\infty (Kf)^q v = \int_0^\infty (Kf)^2 w$$

$$= 2\int_0^\infty f(y)\,dy\int_0^y f(t)\,dt\int_0^\infty k(x,y)k(x,t)v(x)[Kf(x)]^{q-2}\,dx$$

$$= 2\int_0^\infty f(t)\,dt\int_t^\infty f(y)\,dy\int_0^\infty k(x,y)k(x,t)v(x)[Kf(x)]^{q-2}\,dx$$

$$\le 2\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^\infty k(x,t)v(x)\,dx\int_t^\infty k(x,y)f(y)\,dy\left(\int_y^\infty k(x,z)f(z)\,dz\right)^{q-2}$$

$$\le \frac{2}{q-1}\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^\infty k(x,t)v(x)\,dx\left(\int_t^\infty k(x,z)f(z)\,dz\right)^{q-1}$$

$$\le \frac{2}{q-1}\int_0^\infty f(H^*f)^{q-1}K_q^*v. \quad \square$$

Замечание 1. В доказательстве левой оценки в (3) использовалась только монотонность ядра $k(x,y)$ по y, а для получения правой оценки в (3) при $q \ge 2$ — только ограниченность ядра $k(x,y) \le 1$.

Замечание 2. Утверждения, аналогичные леммам 2 и 1, справедливы для ядер $k(x,y) \ge 0$, убывающих по x. В этом случае аналогом (6) является

$$\alpha_q\int_0^\infty f(Hf)^{q-1}K_q v \le \int_0^\infty (K^*f)^q v \le \beta_q\int_0^\infty f(H^*f)^{q-1}K_q v, \tag{8}$$

и если $k(x,y) \le 1$, то правую часть в (8) можно заменить оценкой

$$\int_0^\infty (K^*f)^q v \le \beta_q\int_0^\infty f(Hf)^{q-1}Kv.$$

Тем же способом доказываются аналогичные оценки для ядер $k(x,y) \ge 0$, возрастающих по x, y. Детали мы опускаем.

§ 2. Основные результаты

Мы будем считать константу $C \geq 0$ в неравенстве (1) выбранной наименьшей из возможных. Если

$$\underline{A} \leq C \leq \overline{A},$$

то условие $\overline{A} < \infty$ достаточно для выполнения (1), а $\underline{A} < \infty$ необходимо.

Нам потребуются критерии выполнения весового неравенства Харди (см. [7, § 1.3; 8])

$$\left(\int\limits_0^\infty (Hf)^q v\right)^{1/q} \leq C \left(\int\limits_0^\infty f^p u\right)^{1/p}, \tag{9}$$

согласно которым при $1 < p \leq q < \infty$

$$C \approx \sup_{t>0} [V^*(t)]^{1/q} [U(t)]^{1/p'}, \tag{10}$$

при $0 < q < p < \infty$, $p > 1$

$$C \approx \left(\int\limits_0^\infty (V^*)^{r/q} U^{r/q'} u^{1-p'}\right)^{1/r}, \tag{11}$$

а при $0 < q < 1 = p$

$$C \approx \left(\int\limits_0^\infty \underline{u}^{q/(q-1)} (V^*)^{q/(1-q)} v\right)^{(1-q)/q}, \tag{12}$$

где $\underline{u}(t) = \operatorname*{ess\,inf}_{0<x<t} u(x)$.

Теорема 1. *Пусть ядро $0 \leq k(x,y) \leq 1$ убывает по y, причем $K^*v(\infty) = K_q^*v(\infty) = 0$. Тогда для константы C в (1) выполняются следующие оценки.*

(a) *Если $1 < p \leq q < \infty$, то*

$$\sup_{t>0} [K_q^* v(t)]^{1/q} [U(t)]^{1/p'} \ll C \ll \sup_{t>0} [K^* v(t)]^{1/q} [U(t)]^{1/p'}. \tag{13}$$

(b) *Если $1 < q < p < \infty$, то*

$$\left(\int\limits_0^\infty (K_q^* v)^{r/q} U^{r/q'} u^{1-p'}\right)^{1/r} \ll C \ll \left(\int\limits_0^\infty (K^* v)^{r/q} U^{r/q'} u^{1-p'}\right)^{1/r}. \tag{14}$$

(c) *Если $0 < q < 1 < p < \infty$, то*

$$\left(\int\limits_0^\infty (K_q^* v)^{p'/q} u^{1-p'}\right)^{1/p'} \leq C \ll \left(\int\limits_0^\infty (K_q^* v)^{r/q} U^{r/q'} u^{1-p'}\right)^{1/r}. \tag{15}$$

(d) *Если $0 < q < 1 = p$, то*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}_+} [K_q^* v(x)]^{1/q} [u(x)]^{-1} \leq C \ll \left(\int\limits_0^\infty \underline{u}^{q/(q-1)} (K_q^* v)^{q/(1-q)}\, d(-K_q^* v)\right)^{(1-q)/q}, \tag{16}$$

причем в утверждениях (c) *и* (d), *а также в левой части оценок* (13) *и* (14) *ограниченность ядра* $k(x,y)\le 1$ *не обязательна.*

Доказательство. Пусть $\Phi(x)\ge 0$ не возрастает на $\mathbb{R}_+$ и $\Phi(\infty)=0$. Тогда при $q>0$ и финитной f имеем

$$\int_0^\infty f(x)[Hf(x)]^{q-1}\Phi(x)\,dx=\frac{1}{q}\int_0^\infty [Hf(x)]^q\,d[-\Phi(x)],$$

поэтому неравенства

$$\left(\int_0^\infty f(x)[Hf(x)]^{q-1}\Phi(x)\,dx\right)^{1/q}\le C\left(\int_0^\infty [f(x)]^p u(x)\,dx\right)^{1/p}$$

и

$$\left(\int_0^\infty [Hf(x)]^q\,d[-\Phi(x)]\right)^{1/q}\le C\left(\int_0^\infty [f(x)]^p u(x)\,dx\right)^{1/p} \tag{17}$$

эквивалентны. Применяя критерии (10), (11) к неравенству (17) и учитывая утверждение (3) леммы 1, получаем оценки (13) и (14).

Для доказательства (15), (16) предположим, что (1) выполняется с конечной константой C. Тогда по неравенству Минковского

$$\int_0^\infty f(K_q^*v)^{1/q}\le\left(\int_0^\infty (Kf)^q v\right)^{1/q}.$$

Отсюда по обратному неравенству Гёльдера

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}_+}\big[K_q^*v(x)\big]^{1/q}[u(x)]^{-1}\le C,\quad p=1,$$

и

$$\left(\int_0^\infty (K_q^*v)^{p'/q}u^{1-p'}\right)^{1/p'}\le C,\quad 1<p<\infty,$$

мы приходим к левым оценкам в (15) и (16). Для доказательства правых оценок заметим, что при $0<q<1$ имеем

$$\int_0^\infty (Kf)^q v=\int_0^\infty v(x)\,dx\int_0^\infty k(x,y)f(y)\,dy\left(\int_0^\infty k(x,t)f(t)\,dt\right)^{q-1}$$
$$=\int_0^\infty f(y)\,dy\int_0^\infty k(x,y)v(x)\,dx\left(\int_0^\infty k(x,t)f(t)\,dt\right)^{q-1}\le\int_0^\infty f(Hf)^{q-1}K_q^*v,$$

так как

$$\int_0^\infty k(x,t)f(t)\,dt\ge\int_0^y k(x,t)f(t)\,dt\ge k(x,y)Hf(y).$$

Поскольку $K_q^* v(x)$ не возрастает, в силу сделанного выше замечания константа C в (1) не превышает наилучшей константы $q^{1/q}C$ в неравенстве

$$\left(\int_0^\infty (Hf)^q \, d(-K_q^* v)\right)^{1/q} \le q^{1/q} C \left(\int_0^\infty f^p u\right)^{1/p}.$$

Используя (11), получаем, что если $K_q^* v(\infty) = 0$, то

$$C \ll \left(\int_0^\infty U^{r/p'} (K_q^* v)^{r/p} \, d(-K_q^* v)\right)^{1/r} \approx \left(\int_0^\infty (K_q^* v)^{r/q} U^{r/q'} u^{1-p'}\right)^{1/r}, \quad p > 1.$$

Если $p = 1$, то, применяя (12), имеем

$$C \ll \left(\int_0^\infty \underline{u}^{q/(q-1)} (K_q^* v)^{q/(1-q)} \, d(-K_q^* v)\right)^{(1-q)/q}. \quad \square$$

Теорема 2. *Пусть ядро $k(x, y) \ge 0$ убывает по y, причем $K_q^* v(\infty) = 0$. Тогда правые оценки в (13), (14) нужно заменить следующими.*

(a) *Для $1 < p \le q < \infty$*

$$C \ll \sup_{t>0} \left(\int_0^t (K_q^* v)^{p'} u^{1-p'}\right)^{1/p'q} [U^*(t)]^{1/p'q'}. \tag{18}$$

(b) *Для $1 < q < p < \infty$*

$$C \ll \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t (K_q^* v)^{p'} u^{1-p'}\right)^{r/qp'} [U^*(t)]^{r/q'p'-1} [u(t)]^{1-p'} \, dt\right)^{1/r}. \tag{19}$$

Доказательство. По лемме 2 и неравенству Гёльдера получаем

$$\left(\int_0^\infty (Kf)^q v\right)^{1/q} \le \beta_q \left(\int_0^\infty f (H^* f)^{q-1} K_q^* v\right)^{1/q}$$
$$\le \beta_q \left(\int_0^\infty f^p u\right)^{1/qp} \left(\int_0^\infty (H^* f)^{p'(q-1)} (K_q^* v)^{p'} u^{1-p'}\right)^{1/qp'}.$$

Поскольку $1 < p \le q < \infty \iff 1 < p \le p'(q-1) < \infty$ и $1 < q < p < \infty \iff 1 < p'(q-1) < p < \infty$, то (18) и (19) вытекают из критериев весовой ограниченности сопряженного оператора Харди. $\square$

§ 3. Примеры

Символ $\mathbb{N}$ обозначает множество всех натуральных чисел.

Пусть функции $a(t) \geq 0$ и $b(t) \geq 0$ возрастают на $\mathbb{R}_+$.

Пример 1. Пусть $\varphi(s)$ убывает, $0 \leq \varphi(s) \leq 1$, $\varphi(\infty) = 0$ и для любого $t \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi(2t) \leq D[\varphi(t)]^2, \quad D > 0. \tag{20}$$

Предположим также, что для всех $x \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство

$$a(2x) \geq \delta a(x), \quad \delta > 1, \tag{21}$$

и пусть $N_\delta \in \mathbb{N}$ такое, что $\delta^{N_\delta} \geq 2$. Пусть существует $\Delta \geq 1$ такое, что для любого $x \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^{2x} v(s)\,ds \leq \Delta \int_0^x v(s)\,ds. \tag{22}$$

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{L}f(x) = \int_0^\infty \varphi[a(x)b(y)]f(y)\,dy.$$

При сделанных выше предположениях для всех $t \in \mathbb{R}_+$ таких, что $\mathfrak{L}^*v(t) < \infty$, справедливо

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}^*v(t) &= \int_0^\infty \varphi[a(x)b(t)]v(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty v(x)\,dx \int_x^\infty d(-\varphi[a(z), b(t)]) = \int_0^\infty d(-\varphi[a(z)b(t)]) \int_0^z v(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty d(-\varphi[a(2z)b(t)]) \int_0^{2z} v(x)\,dx \leq \Delta \int_0^\infty d(-\varphi[a(2z)b(t)]) \int_0^z v(x)\,dx \\
&= \Delta \int_0^\infty v(x)\varphi[a(2x)b(t)]\,dx \leq \Delta \int_0^\infty \varphi[\delta a(x)b(t)]v(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Продолжим, если нужно, рассуждение N_δ раз. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}^*v(t) &\leq \Delta^{N_\delta} \int_0^\infty \varphi[\delta^{N_\delta} a(x)b(t)]v(x)\,dx \\
&\leq \Delta^{N_\delta} \int_0^\infty \varphi[2a(x)b(t)]v(x)\,dx \leq D\Delta^{N_\delta} \int_0^\infty (\varphi[a(x)b(t)])^2 v(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Повторяя, если это необходимо, последнее рассуждение N_q раз, где $N_q \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{N_q} \geq q$ для фиксированного q, получаем

$$\mathfrak{L}^*v(t) \leq (D\Delta^{N_\delta})^{N_q} \int_0^\infty (\varphi[a(x)b(t)])^q v(x)\,dx = (D\Delta^{N_\delta})^{N_q} \mathfrak{L}_q^* v(t).$$

Отсюда в силу утверждений (a) и (b) из теоремы 1 вытекает следующий критерий.

Теорема 3. *Пусть φ, $a(x)$ и v удовлетворяет условиям* (20), (21) *и* (22) *соответственно. Тогда неравенство*

$$\left(\int\limits_0^\infty [\mathfrak{L}f(x)]^q v(x)\,dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int\limits_0^\infty [f(x)]^p u(x)\,dx\right)^{1/p}$$

для $1 < p \leq q < \infty$ *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{t>0}[\mathfrak{L}_q^* v(t)]^{1/q}[U(t)]^{1/p'} < \infty.$$

При $1 < q < p < \infty$ *исходное неравенство выполняется, если и только если*

$$\left(\int\limits_0^\infty (\mathfrak{L}_q^* v)^{r/q} U^{r/q'} u^{1-p'}\right)^{1/r} < \infty.$$

Теорема 3 имеет двойственный вариант.

Теорема 4. *Пусть φ, $b(y)$ и v удовлетворяет условиям* (20), (21) *и* (22) *соответственно. Тогда неравенство*

$$\left(\int\limits_0^\infty (\mathfrak{L}^* g)^q v\right)^{1/q} \leq C\left(\int\limits_0^\infty g^p u\right)^{1/p}$$

выполнено тогда и только тогда, когда для $1 < p \leq q < \infty$

$$\sup_{t>0}[\mathfrak{L}_q v(t)]^{1/q}[U(t)]^{1/p'} < \infty,$$

а при $1 < q < p < \infty$

$$\left(\int\limits_0^\infty (\mathfrak{L}_q v)^{r/q} U^{r/q'} u^{1-p'}\right)^{1/r} < \infty.$$

Пример 2. Пусть неотрицательные функции $a(t)$, $b(t)$ возрастают на $\mathbb{R}_+$ и существует обратная к $b(t)$ функция $b^{-1}(s)$. Далее, положим

$$k(x,y) = \varphi[a(x) + b(y)],$$

где φ монотонна и для всех $x \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi(2x) \approx \varphi(x).$$

Тогда

$$Kf(x) \approx \varphi[a(x)] \int\limits_0^{b^{-1}(a(x))} f(y)\,dy + \int\limits_{b^{-1}(a(x))}^\infty \varphi[b(y)]f(y)\,dy,$$

следовательно,

$$\int\limits_0^\infty (Kf)^q v \approx \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^{b^{-1}(a(x))} f(y)\,dy\right)^q (\varphi[a(x)])^q v(x)\,dx$$

$$+ \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{b^{-1}(a(x))}^\infty \varphi[b(y)]f(y)\,dy\right)^q v(x)\,dx.$$

Применяя критерии выполнения неравенства Харди, получаем, что при $1 < p \le q < \infty$

$$C \approx \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty (\varphi[a(x)])^q v(x)\,dx \right)^{1/q} \left(\int_0^{b^{-1}(a(t))} u^{1-p'} \right)^{1/p'} + \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty v \right)^{1/q} \left(\int_{b^{-1}(a(t))}^\infty (\varphi[b(y)])^{p'} [u(y)]^{1-p'}\,dy \right)^{1/p'},$$

для $0 < q < p < \infty$, $p > 1$

$$C \approx \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty (\varphi[a(x)])^q v(x)\,dx \right)^{r/p} \left(\int_0^{b^{-1}(a(t))} u^{1-p'} \right)^{r/p'} (\varphi[a(t)])^q v(t)\,dt \right)^{1/r} + \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t v \right)^{r/p} \left(\int_{b^{-1}(a(t))}^\infty (\varphi[b(y)])^{p'} [u(y)]^{1-p'}\,dy \right)^{r/p'} v(t)\,dt \right)^{1/r},$$

а в случае $0 < q < 1 = p$

$$C \approx \left(\int_0^\infty [u_1(t)]^{q/(q-1)} \left(\int_t^\infty (\varphi[a(x)])^q v(x)\,dx \right)^{q/(1-q)} (\varphi[a(t)])^q v(t)\,dt \right)^{(1-q)/q} + \left(\int_0^\infty [u_2(t)]^{q/(q-1)} \left(\int_0^t v \right)^{q/(1-q)} v(t)\,dt \right)^{(1-q)/q},$$

где

$$u_1(t) = \operatorname*{ess\,inf}_{0<x<b^{-1}(a(t))} u(x), \quad u_2(t) = \operatorname*{ess\,inf}_{b^{-1}(a(t))<x<\infty} u(x).$$

Замечание 3. Пример 1 обобщает результаты работы [1], а пример 2 — работ [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bloom S.* Hardy integral estimates for the Laplace transform // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 116, N 2. P. 417–426.
2. *Andersen K. F.* Weighted inequalities for the Stieltjes transformation and Hilbert's double series // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1980. V. 86, N 1–2. P. 75–84.
3. *Sinnamon G.* A note on the Stieltjes transformation // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1988. V. 110, N 1–2. P. 73–78.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
5. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.

6. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* Весовые оценки для операторов Римана — Лиувилля и приложения // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2003. Т. 243. С. 278–301.
7. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. Л.: ЛГУ, 1985.
8. *Sinnamon G., Stepanov V. D.* The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1996. V. 54, N 2. P. 89–101.

Статья поступила 19 июля 2004 г.

Степанов Владимир Дмитриевич, Ушакова Елена Павловна
Вычислительный центр ДВО РАН, ул. Тихоокеанская, 153, Хабаровск 680042
stepanov@as.khb.ru, ushakova@as.khb.ru