Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 512.27

О СОБСТВЕННЫХ АВТОМОРФИЗМАХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

А. Г. Пинус

Аннотация: Вводятся понятия собственного и чисто собственного автоморфизмов универсальной алгебры. Доказывается теорема представления группы группами подобных автоморфизмов. При некоторых условиях найдено синтаксическое описание центральных автоморфизмов конечных алгебр.

Ключевые слова: универсальная алгебра, решетка, поле, группа автоморфизмов, термальная функция, полиномиальная функция, условно термальная функция.

При изучении строения универсальных алгебр, а также конкретных классических алгебр: групп, колец, полей, решеток, булевых алгебр и т. д., большое значение имеет группа автоморфизмов. Играет важную роль (к примеру, в теории клонов функций) такая вариация понятия автоморфизма, как «слабый автоморфизм» (см. обзор [1], посвященный результатам о слабых автоморфизмах алгебр). Известны и другие вариации понятия автоморфизма: IC-автоморфизмы, I-автоморфизмы, формульные автоморфизмы (см., к примеру, [2–4]). Важное место в изучении строения групп занимает понятие внутреннего автоморфизма группы. Обобщая последнее, естественным образом приходим к изучению автоморфизмов универсальных алгебр, определяемых полиномиальными функциями этих алгебр. Напомним, что функция $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ называется *полиномиальной функцией алгебры* $\mathscr{A} = \langle A;\sigma\rangle$, если она определена на множестве A и при этом существуют терм $t(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ сигнатуры σ и элементы $d_1,\dots,d_m \in A$ такие, что для любых $a_1,\dots,a_n \in A$ имеет место равенство

$$\varphi(a_1,\dots,a_n) = t(a_1,\dots,a_n,d_1,\dots,d_m).$$

Автоморфизмы алгебры $\mathscr{A}$, определяемые полиномиальными функциями алгебры $\mathscr{A}$, будем считать собственными автоморфизмами алгебры $\mathscr{A}$ (ср. с определением I-автоморфизмов на многообразиях алгебр [3]). К собственным автоморфизмам алгебры $\mathscr{A}$ будем относить также и ее автоморфизмы, обратные к которым определяются полиномиальными функциями.

Наконец, сформулируем

Определение 1. (a) Автоморфизм φ алгебры $\mathscr{A}$ назовем ее *собственным автоморфизмом*, если он представим в виде произведения ее автоморфизмов, определяемых полиномиальными функциями алгебры $\mathscr{A}$ и обратными к таковым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00258).

(б) Автоморфизм φ алгебры $\mathscr{A}$ назовем ее *чисто собственным автоморфизмом*, если он представим в виде произведения ее автоморфизмов, определяемых термальными функциями алгебры $\mathscr{A}$ и обратными к таковым.

В силу того, что суперпозиция полиномиальных (термальных) функций и сама является полиномиальной (термальной), любой собственный (чисто собственный) автоморфизм φ алгебры $\mathscr{A}$ имеет представление вида

$$\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2^{-1} \cdot \varphi_3 \cdot \varphi_4^{-1} \cdot \ldots \cdot \varphi_{2n-1} \cdot \varphi_{2n}^{-1},$$

где φ_i — автоморфизмы алгебры, определяемые ее полиномиальными (термальными) функциями.

Совокупность $\mathrm{SAut}\,\mathscr{A}$ всех собственных автоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$ образует подгруппу группы $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$ всех ее автоморфизмов. Более того, если φ — собственный, а ψ — произвольный автоморфизмы алгебры $\mathscr{A}$ и $\varphi(x) = t(x, \bar{d})$, где $t(x, \bar{y})$ — терм и $\bar{d} \in A$, то

$$\psi^{-1}(\varphi(\psi(x))) = \psi^{-1}(t(\psi(x), \bar{d})) = t(x, \psi^{-1}(\bar{d}))$$

и тем самым $\psi^{-1}\varphi\psi$ также является собственным автоморфизмом алгебры $\mathscr{A}$. Таким образом, совокупность $\mathrm{SAut}\ \mathscr{A}$ всех собственных автоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$ образует нормальную подгруппу группы $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$ всех ее автоморфизмов. Без труда замечается, что совокупность $\mathrm{PSAut}\,\mathscr{A}$ всех чисто собственных автоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$ образует подгруппу центра группы $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$. Заметим также, что любой автоморфизм φ алгебры $\mathscr{A}$, реализуемый ее полиномиальной функцией, сохраняет конгруэнции алгебры $\mathscr{A}$, т. е. для любой $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathscr{A}$ и любых $a_1, a_2 \in A$ из $\theta(a_1, a_2)$ следует $\theta(\varphi(a_1), \varphi(a_2))$ (ср. с определением IC-автоморфизмов алгебр [2]).

Отметим, к примеру, что внутренние автоморфизмы группы $\mathscr{G}$ являются ее собственными автоморфизмами, автоморфизм φ вида $\varphi(x) = x^p$ на любом поле $\mathscr{F}$ характеристики p — чисто собственным автоморфизмом этого поля.

В настоящей работе изучается взаимоотношение групп $\mathrm{SAut}\,\mathscr{A}$, $\mathrm{PSAut}\,\mathscr{A}$, $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$ для универсальных алгебр $\mathscr{A}$, а также рассматриваются собственные и чисто собственные автоморфизмы классических алгебр: групп, полей, решеток, булевых алгебр. В заключение рассмотрены автоморфизмы, определяемые с помощью условных термов.

1. Как замечено выше, группа $\mathrm{SAut}\,\mathscr{A}$ является нормальной подгруппой группы $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$ для любой универсальной алгебры $\mathscr{A}$, а подгруппа $\mathrm{PSAut}\,\mathscr{A}$ группы $\mathrm{SAut}\,\mathscr{A}$ содержится в центре группы $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$. Хорошо известно, что любая группа представима группой автоморфизмов некоторой универсальной алгебры. Через $\mathrm{WAut}\,\mathscr{A}$ обозначим группу слабых автоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$. Как известно [5], группа $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$ является нормальной подгруппой группы $\mathrm{WAut}\,\mathscr{A}$, и условие нормальности — единственное ограничение на группу автоморфизмов как подгруппу группы слабых автоморфизмов: для любой группы G и любой ее нормальной подгруппы G_1 существуют универсальная алгебра $\mathscr{A}$ и изоморфизм φ группы G на группу $\mathrm{WAut}\,\mathscr{A}$ такие, что $\varphi(G_1) = \mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$ (см. [6]). Подобно этому для тройки $\langle G, G_1, G_2\rangle$ в роли $\langle \mathrm{Aut}\,\mathscr{A}, \mathrm{SAut}\,\mathscr{A}, \mathrm{PSAut}\,\mathscr{A}\rangle$, как показывает следующие утверждение, единственным требованием к G_1 является требование «быть нормальной подгруппой», а к G_2 — «быть подгруппой групп G_1 и центра $Z(G)$ группы G».

Теорема 1. *Для любых* (*конечной*) *группы G, ее нормальной подгруппы G_1 и подгруппы G_2 группы $G_1 \cap Z(G)$ существуют* (*конечная*) *универсальная* *алгебра* $\mathscr{A}$ *и изоморфизм* h *группы* G *на группу* $\operatorname{Aut}\mathscr{A}$ *такие, что* $h(G_1) = \operatorname{SAut}\mathscr{A}$ *и* $h(G_2) = \operatorname{PSAut}\mathscr{A}$.

Доказательство. Прежде всего построим алгебру $\mathscr{C}$ группы автоморфизмов, которая изоморфна группе G, но ни одна из полиномиальных функций этой алгебры не является отличной от тождественной биекции ее основного множества на себя.

Как известно [7], любая (конечная) группа G представима группой автоморфизмов некоторой (конечной) универсальной алгебры. Пусть алгебра $\mathscr{C}_1$ такова, что $\operatorname{Aut}\mathscr{C}_1 \cong G$, и конечна в случае конечности группы G. Будем считать, что $G = \operatorname{Aut}\mathscr{C}_1$. Пусть $\mathscr{C}_2$ — дизъюнктная с $\mathscr{C}_1$ и изоморфная ей алгебра, а g — некоторый изоморфизм алгебры $\mathscr{C}_1$ на $\mathscr{C}_2$. Пусть $\mathscr{C}_i = \langle C_i; \sigma' \rangle$. На множестве $C = C_1 \dot\cup C_2$ определим алгебру $\mathscr{C}$ сигнатуры $\sigma = \sigma' \cup \langle g' \rangle$ следующим образом: для любой $f^k \in \sigma$ и любых $c_1, \ldots, c_k \in C$ пусть

$$f^k_{\mathscr{C}}(c_1, \ldots, c_k) = f^k_{\mathscr{C}_2}(g'(c_1), \ldots, g'(c_k)),$$

где функция g' определена на C следующим образом:

$$g'(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in C_1, \\ x, & \text{если } x \in C_2. \end{cases}$$

Очевидно, что $\operatorname{Aut}\mathscr{C} \cong \operatorname{Aut}\mathscr{C}_1 = G$, и если $\varphi \in G$, то пусть $\overline{\varphi}$ — биекция C на C, определенная как

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in C_1, \\ g\varphi g^{-1}(x), & \text{если } x \in C_2, \end{cases}$$

т. е. отображение $\varphi \to \overline{\varphi}$ и является изоморфизмом группы $G = \operatorname{Aut}\mathscr{C}_1$ на группу $\operatorname{Aut}\mathscr{C}$. Так как значения любой термальной для алгебры $\mathscr{C}$ функции принадлежат множеству C_2, никакая полиномиальная для алгебры $\mathscr{C}$ функция не является нетождественной биекцией множества C на себя.

Пусть теперь $B = C \dot\cup G$. Через G_i $(i \in I)$ обозначим все попарно различные G-орбиты элементов множества C. Тем самым $C = \dot\bigcup\limits_{i\in I} G_i$, и пусть для любого $i \in I$ через c_i обозначен некоторый фиксированный элемент из G_i. Функции f_i $(i \in I)$ определим на множестве B следующим образом:

$$f_i(x) = \begin{cases} \overline{\varphi}(c_i), & \text{если } x = \varphi \in G, \\ x & \text{иначе}. \end{cases}$$

Для любой $f^k \in \sigma$ и любых $b_1, \ldots, b_k \in B$ полагаем

$$f^k(b_1, \ldots, b_k) = \begin{cases} f^k(b_1, \ldots, b_k), & \text{если } b_1, \ldots, b_k \in C, \\ b_1 & \text{иначе}. \end{cases}$$

Пусть $\mathscr{B} = \langle B; \sigma, f_i(i \in I) \rangle$. Так как

$$C = \dot\bigcup_{i\in I} (f_i(B) \setminus \operatorname{Fix} f_i),$$

для любого $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathscr{B}$ имеет место равенство $\varphi(C) = C$ и $\varphi(G) = G$. Здесь $\operatorname{Fix} f_i$ — совокупность неподвижных точек функции f_i. При этом для любых φ, $\psi \in \operatorname{Aut}\mathscr{B}$ имеют место эквивалентности

$$\varphi = \psi \Leftrightarrow \varphi \restriction C = \psi \restriction C \Leftrightarrow \varphi \restriction G = \psi \restriction G$$

и $\{\varphi \upharpoonright C \mid \varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathscr{B}\} = \mathrm{Aut}\,\mathscr{C}$. Тем самым для любого $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathscr{B}$ существует $\psi \in G$ такой, что $\varphi \upharpoonright C = \bar{\psi}$ и для любого $\eta \in G$ имеет место равенство $\varphi(\eta) = \psi\eta$. Обозначим подобный автоморфизм φ алгебры $\mathscr{B}$ через ψ'. Столь же очевидно, что для любого $\psi \in G$ отображение ψ' принадлежит группе $\mathrm{Aut}\,\mathscr{B}$. Таким образом, отображение $h(\psi) = \psi'$ задает изоморфизм группы G на группу $\mathrm{Aut}\,\mathscr{B}$. При этом никакая полиномиальная функция алгебры $\mathscr{B}$ не является нетождественной биекцией множества B на себя.

Для любого $\varphi \in G_1$ определим на множестве B двухместную функцию $t_\varphi(x, y)$ следующим образом:

$$t_\varphi(x,y) = \begin{cases} \psi'(\varphi'((\psi')^{-1}(x))), & \text{если } y = \psi \in G \text{ и } x \in B, \\ x & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $\mathscr{A}' = \langle B; \sigma, f_i(i \in I), t_\varphi(\varphi \in G_1)\rangle$. Заметим, что для любого $\eta \in G$ отображение η' является автоморфизмом алгебры $\mathscr{A}'$. Достаточно проверить, что для любых $x \in B$, $\psi \in G$ имеет место равенство

$$t_\varphi(\eta'(x), \eta'(\psi)) = \eta'(t(x, \psi)).$$

Действительно, если $x \in B$ и $\psi \in G$, то, так как $\eta'(\psi) = \eta\psi$, получим равенства

$$t_\varphi(\eta'(x), \eta'(\psi)) = \eta'(\psi'(\varphi'((\psi^{-1})'((\eta^{-1})'(\eta'(x))))))$$
$$= \eta'(\psi'(\varphi'((\psi^{-1})'(x)))) = \eta'(t_\varphi(x, \psi)).$$

Таким образом, отображение h является изоморфизмом группы G на группу $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}'$. При этом для любого $\psi \in G$ на $\mathscr{A}'$ истинно полиномиальное тождество

$$t_\varphi(x, \psi) = t_{\psi\psi\psi^{-1}}(x, e),$$

где e — единица группы G.

Для любого полинома $t_\varphi(x, e)$ имеет место равенство $t_\varphi(x, e) = \varphi'(x)$ при любом $x \in B$, т. е. $h(G_1) \subseteq \mathrm{SAut}\,\mathscr{A}'$. Кроме того, $t_{\varphi_1}(t_{\varphi_2}(x, e), e) = t_{\varphi_1\varphi_2}(x, e)$. Для любых $b \in B$, $c \in C$ справедливы полиномиальные тождества

$$t_\varphi(b, x) = x \quad \text{и} \quad t_\varphi(x, c) = x.$$

Как замечено выше, никакая полиномиальная функция сигнатуры $\langle \sigma, f_i(i \in I)\rangle$ не является нетождественной биекцией множества B на себя. Тем самым имеет место равенство $h(G_1) = \mathrm{SAut}\,\mathscr{A}'$.

Наконец, алгебру $\mathscr{A}$ определим как обогащение алгебры $\mathscr{A}'$ путем введения в ее сигнатуру новых функций $q_\varphi(x)$ для любого $\varphi \in G_2$ и определения этих функций на множестве B как

$$q_\varphi(x) = \varphi'(x)$$

для любого $x \in B$. Очевидно, что $h(G) = \mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$, $h(G_1) = \mathrm{SAut}\,\mathscr{A}$ и $h(G_2) = \mathrm{PSAut}\,\mathscr{A}$. Теорема доказана.

В связи с этой теоремой и указанным выше результатом о группах $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$ и $\mathrm{WAut}\,\mathscr{A}$ представляет интерес следующий открытый

Вопрос 1. *Для каких групп G, G_1, G_2, G_3 таких, что G_1 — нормальная подгруппа группы G, G_2 — нормальная подгруппа группы G_1 и $G_3 \subseteq G_2 \cap Z(G_1)$, существуют универсальная алгебра $\mathscr{A}$ и изоморфизм h группы G на группу $\mathrm{WAut}\,\mathscr{A}$ такие, что $h(G_1) = \mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$, $h(G_2) = \mathrm{SAut}\,\mathscr{A}$ и $h(G_3) = \mathrm{PSAut}\,\mathscr{A}$?*

В заключение пункта приведем еще два замечания, связанные с понятиями собственного и чисто собственного автоморфизмов.

Замечание 1. Пусть $\varphi \in \operatorname{SAut}\mathscr{A}$ и на алгебре $\mathscr{A}$ определяется полиномом $t(x, \bar{d})$, $\bar{d} \in \mathscr{A}$. Тогда, как замечено выше, φ сохраняет конгруэнции алгебры $\mathscr{A}$ и тем самым φ индуцирует отображение φ/θ алгебры $\mathscr{A}/\theta$ на себя для любой $\theta \in \operatorname{Con}\mathscr{A}$. Если это отображение — биекция (к примеру, $\mathscr{A}$ — конечная алгебра), то $\varphi/\theta \in \operatorname{SAut}\mathscr{A}/\theta$.

Замечание 2. Без труда замечается, что для любого квазимногообразия Q и некоторого терма $t(x)$ следующие условия эквивалентны:

а) терм $t(x)$ определяет некоторый чисто собственный автоморфизм на любой Q-алгебре;

б) на Q истинно квазитождество

$$t(x) = t(y) \to x = y,$$

для любой сигнатурной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ на Q истинно тождество

$$t(f(x_1, \dots, x_n)) = f(t(x_1), \dots, t(x_n)),$$

существует терм $q(x)$ такой, что на Q истинно тождество

$$t(q(x)) = x.$$

2. В этом пункте будут рассмотрены собственные и чисто собственные автоморфизмы классических алгебр: групп, полей, решеток и булевых алгебр.

Прежде всего очевидно, что в силу идемпотентности сигнатурных операций нетождественных чисто собственных автоморфизмов решеток не существует.

Покажем, что ситуация аналогична и для собственных автоморфизмов широкого класса решеток.

Пусть L — решетка без нуля (наименьшего элемента) и единицы (наибольшего элемента), $t(x, y_1, \dots, y_m)$ — несократимый терм решеточной сигнатуры, $a_1, \dots, a_m \in L$ и отображение $x \to \varphi(x) = t(x, a_1, \dots, a_m)$ является автоморфизмом решетки L. Через $t_1(x, y)$ обозначим терм $t(x, y, \dots, y)$. Так как свободная двупорожденная решетка четырехэлементна, то на L истинно одно из тождеств:

(а) $t_1(x, y) = x$,

(б) $t_1(x, y) = y$,

(в) $t_1(x, y) = x \wedge y$,

(г) $t_1(x, y) = x \vee y$.

Заметим, что любая термальная функция является монотонной на любой решетке по любому своему аргументу. В случае (в) пусть $a = a_1 \vee \dots \vee a_m$. Тогда для любого $x \in L$ имеет место неравенство $t(x, a_1, \dots, a_m) \leq t(x, a, \dots, a) = t_1(x, a) = x \wedge a$. Но тогда (в силу того, что a не является наибольшим элементом решетки L) выполнено включение

$$\operatorname{Rang}\varphi \subseteq \{b \in L \mid b \leq a\} \neq L,$$

что противоречит предположению о том, что $\varphi \in \operatorname{Aut} L$.

Аналогично рассматриваются случаи (б) и (г). Остается рассмотреть лишь случай (а), т. е. когда $t_1(x, y) = x$. Индукцией по длине терма $t(x, y_1, \dots, y_m)$ покажем, что в этом случае на L истинно тождество $t(x, y_1, \dots, y_m) = x$. Базис индукции очевиден, и пусть для термов $q(x, y_1, \dots, y_m)$, более коротких, чем терм $t(x, y_1, \dots, y_m)$, истинность на L тождества $q(x, y, \dots, y) = x$ влечет истинность на L тождества $q(x, y_1, \dots, y_m) = x$. Допустим, что $t(x, y_1, \dots, y_m) =$

$t'(x, y_1, \dots, y_m) \vee t''(x, y_1, \dots, y_m)$ (случай, когда $t = t' \wedge t''$, рассматривается аналогично) и на L истинно тождество $t(x, y, \dots, y) = x$, т. е. тождество $t'(x, y, \dots, y) \vee t''(x, y, \dots, y) = x$. При этом на L имеют место одно из тождеств

1) $t'(x, y, \dots, y) = x$,
2) $t'(x, y, \dots, y) = y$,
3) $t'(x, y, \dots, y) = x \vee y$,
4) $t'(x, y, \dots, y) = x \wedge y$

и одно из тождеств

(α) $t''(x, y, \dots, y) = x$,
(β) $t''(x, y, \dots, y) = y$,
(γ) $t''(x, y, \dots, y) = x \vee y$,
(δ) $t''(x, y, \dots, y) = x \wedge y$.

Очевидно, что варианты 2 и (α), 2 и (β), 2 и (γ), 2 и (δ) приводят к истинности на решетке L тождества $t(x, y, \dots, y) = x \vee y$ либо $t(x, y, \dots, y) = y$ в противоречие с предположением об истинности на L тождества $t(x, y, \dots, y) = x$.

Аналогично замечается невозможность случая 3.

Допустим теперь, что имеет место случай 1 (случай 4 рассматривается аналогично), т. е. на L истинно тождество $t'(x, y, \dots, y) = x$. По индукционному предположению на L истинно тождество $t'(x, y_1, \dots, y_m) = x$. С другой стороны, из возможных вариантов (α)–(δ) очевидно, что варианты (β), (γ) не совместимы со случаем 1 и истинностью на L тождества $t(x, y, \dots, y) = x$. Вариант (α) по индукционному предположению влечет истинность на L тождества $t''(x_1, y_1, \dots, y_m) = x$ и тем самым и истинность на L тождеств

$$t(x, y_1, \dots, y_m) = t'(x, y_1, \dots, y_m) \vee t''(x, y_1, \dots, y_m) = x \vee x = x.$$

Таким образом, остается рассмотреть лишь вариант 1 и (δ), т. е. когда на L истинны тождества $t'(x, y_1, \dots, y_m) = x$ и $t''(x, y, \dots, y) = x \wedge y$. В силу монотонности термов на L справедливы неравенства

$$t''(x, y_1, \dots, y_m) \le t''(x, y_1, \vee \dots \vee y_m, \dots, y_1, \vee \dots \vee y_m) = x \wedge (y_1 \vee \dots \vee y_m) \le x.$$

Поэтому

$$t(x, y_1, \dots, y_m) = t'(x, y_1, \dots, y_m) \vee t''(x, y_1, \dots, y_m) = x \vee t''(x, y_1, \dots, y_m) = x,$$

так что и в этом случае отображение $x \to \varphi(x) = t(x, a_1, \dots, a_m) = x$ является тождественным на L.

Итак, если L — решетка без нуля и единицы, то не существует нетождественных собственных автоморфизмов решетки L.

Заметим теперь, что индукцией по длине терма $t(x, y_1, \dots, y_m)$ без труда показывается, что если для некоторых элементов $a_2, \dots, a_n$ решетки с 1 (0) отображение $x \to t(x, 1, a_2, \dots, a_n)$ (отображение $x \to t(x, 0, a_2, \dots, a_n)$) является собственным автоморфизмом решетки L, то существует терм $t'(x, y_2, \dots, y_n)$ такой, что на L истинно полиномиальное тождество

$$t(x, 1, a_2, \dots, a_n) = t'(x, a_2, \dots, a_n).$$

Тем самым при рассмотрении собственных автоморфизмов решеток можно считать, что определяющие их полиномы не содержат элементов 1 и 0.

Исходя из этого замечания и анализируя приведенное выше доказательство отсутствия у решеток без нуля и единицы нетождественных собственных автоморфизмов, легко заметить, что оно остается справедливым и для решеток, у которых единица (если она есть) является $\vee$-неразложимой, а нуль (если он есть) — $\wedge$-неразложимым.

Итак, *решетки, у которых единица (если она есть) $\vee$-неразложима, а нуль (если он есть) $\wedge$-неразложим, не обладают нетривиальными собственными автоморфизмами.*

Остается открытым

Вопрос 2. *Описать собственные автоморфизмы произвольных решеток.*

Как заметил Габор Кун, решетки вида M_n $(n \geq 3)$ обладает нетривиальными собственными автоморфизмами.

Без особого труда доказываются следующие утверждения.

1. *Булевы алгебры не обладают нетождественными собственными автоморфизмами.*

2. *Все собственные автоморфизмы полей являются чисто собственными.*

3. *Поля характеристики нуль не имеют нетривиальных чисто собственных автоморфизмов.*

4. *Поля характеристики p имеют нетривиальные чисто собственные автоморфизмы φ тогда и только тогда, когда они совершенны и при этом $\varphi(x) = x^{p^k}$, где k — любое натуральное число.*

Рассмотрим теперь ситуацию с собственными автоморфизмами для групп. Напомним также, что группа $\mathscr{G}$ называется *n-абелевой*, если на $\mathscr{G}$ истинно тождество $(xy)^n = x^n y^n$.

Пусть для любого целого n отображение φ_n группы $\mathscr{G}$ в себя определено как $\varphi_n(x) = x^n$. Тогда $\varphi_n \in \operatorname{Aut}\mathscr{G}$ *в том и только в том случае, когда $\mathscr{G}$ — n-абелева группа с однозначным извлечением корня n-й степени.* В работе [3] доказано, что собственные автоморфизмы свободной группы суть внутренние автоморфизмы. В целом же вопрос о собственных автоморфизмах групп остается открытым.

3. В заключение рассмотрим еще одну возможность определения автоморфизмов средствами самой универсальной алгебры. В ряде работ автора были введены понятия условного и элементарно условного термов и получены свойства условно термальных и элементарно условно термальных функций на универсальных алгебрах (обзор этих понятий и результатов см. в [8]).

В работе [9] доказано, что для любой равномерно локально конечной алгебры $\mathscr{A}$ конечной сигнатуры (любой конечной алгебры $\mathscr{A}$) функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на основном множестве алгебры $\mathscr{A}$, является условно термальной тогда и только тогда, когда подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ замкнуты относительно f и f коммутирует со всеми внутренними изоморфизмами алгебры $\mathscr{A}$. Напомним, что внутренним изоморфизмом алгебры $\mathscr{A}$ называется любой изоморфизм между ее подалгебрами. Совокупность всех внутренних изоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$ обозначим как $\operatorname{Iso}\mathscr{A}$.

В [10] доказано, что для любой конечной алгебры $\mathscr{A}$ функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ является элементарно условно термальной тогда и только тогда, когда подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ замкнуты относительно f и f коммутирует со всеми автоморфизмами алгебры $\mathscr{A}$.

Будем говорить, что *автоморфизм φ алгебры $\mathscr{A}$ определим условным* (*элементарно условным*) *термом*, если существует условный (элементарно условный) терм $t(x)$ такой, что для любого $a \in \mathscr{A}$ имеет место равенство $\varphi(a) = t(a)$.

Определение 2. *Условно чисто собственным* (*элементарно условно чисто собственным*) будем называть любой автоморфизм алгебры $\mathscr{A}$, представимый в виде произведения автоморфизмов, определяемых условными (элементарно условными) термами и обратных к таковым.

Множество всех условно чисто собственных (элементарно условно чисто собственных) автоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$ обозначим через $\mathrm{CPSAut}\,\mathscr{A}$ ($\mathrm{ECPSAut}\,\mathscr{A}$). В силу замкнутости подалгебр алгебры относительно условных и элементарно условных термов очевидно, что для равномерно локально конечных (конечных) алгебр $\mathscr{A}$ совокупности $\mathrm{CPSAut}\,\mathscr{A}$ ($\mathrm{ECPSAut}\,\mathscr{A}$) образуют подгруппу группы $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$.

Из приведенных выше критериев условной и элементарно условной термальности функций вытекает

Теорема 2. (а) *Пусть $\mathscr{A}$ — равномерно локально конечная алгебра конечной сигнатуры (конечная алгебра произвольной сигнатуры). Тогда для любого автоморфизма φ алгебры $\mathscr{A}$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\varphi \in \mathrm{CPSAut}\,\mathscr{A}$,

2) *подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ замкнуты относительно φ, и φ коммутирует со всеми отображениями из* $\mathrm{Iso}\,\mathscr{A}$.

В частности, если $\mathscr{A}$ конечная алгебра без собственных подалгебр, то следующие условия эквивалентны:

1) $\varphi \in \mathrm{CPSAut}\,\mathscr{A}$,

2) $\varphi \in Z(\mathrm{Aut}\,\mathscr{A})$.

(б) *Для любой конечной алгебры $\mathscr{A}$ и любого ее автоморфизма φ следующие условия эквивалентны:*

1) $\varphi \in \mathrm{ECPSAut}\,\mathscr{A}$,

2) *подалгебры алгебры $\mathscr{A}$ замкнуты относительно φ, и $\varphi \in Z(\mathrm{Aut}\,\mathscr{A})$.*

Таким образом, получено синтаксическое описание центральных автоморфизмов, сохраняющих подалгебры на конечных алгебрах.

Заметим, что условно полиномиальные автоморфизмы на конечных алгебрах совпадают с произвольными автоморфизмами. Действительно, пусть $\mathscr{A} = \langle \{a_1, \dots, a_n\}, \sigma \rangle$ — конечная алгебра и $\varphi \in \mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$, при этом $\varphi(a_i) = a_{j_i}$. Тогда φ определим следующим условным полиномом:

$$t_\varphi(x) = \begin{cases} x = a_1 \to a_{j_1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x = a_n \to a_{j_n}. \end{cases}$$

Для бесконечных же алгебр в силу приведенного выше критерия условной термальности функций имеет место

Теорема 3. *Для любой равномерно локально конечной алгебры $\mathscr{A}$ конечной сигнатуры и любого ее автоморфизма φ следующие условия эквивалентны:*

1) *φ определим некоторым условным полиномом на $\mathscr{A}$,*

2) *существует конечная подалгебра $\mathscr{A}_1$ алгебры $\mathscr{A}$ (компактный элемент решетки $\mathrm{Sub}\,\mathscr{A}$) такая, что подалгебры алгебры $\mathscr{A}$, включающие в себя $\mathscr{A}_1$, замкнуты относительно φ ($\overline{\varphi}$ тождественно на конусе $\mathrm{Sub}\,\mathscr{A} \restriction \geq \mathscr{A}_1$ решетки $\mathrm{Sub}\,\mathscr{A}$) и φ коммутирует со всеми внутренними изоморфизмами алгебры $\mathscr{A}$, область определения которых включает в себя подалгебру $\mathscr{A}_1$ и которые тождественны на $\mathscr{A}_1$.*

Здесь $\overline{\varphi}$ — автоморфизм решетки $\operatorname{Sub}\mathscr{A}$, индуцированный автоморфизмом φ алгебры $\mathscr{A}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Glazek K.* Weak automorphisms in general algebras — a short survey // Алгебра и теория моделей. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. V. 3. P. 26–31.

2. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.

3. *Csakany B.* Inner automorphisms of universal algebras // Publ. Math. Debrecen. 1965. V. 12. P. 331–333.

4. *Grant I.* Automorphisms definable by formulas // Pacific J. Math. 1973. V. 44. P. 107–115.

5. *Dudek J., Plonka E.* Weak automorphisms of linear spaces // Colloq. Math. 1971. V. 22. P. 201—208.

6. *Sichler J.* Weak automorphisms of universal algebra // Algebra Univ. 1973. V. 3. P. 1–7.

7. *Birkhoff G.* On groups of automorphisms // Rev. Un. Math. Argentina. 1946. V. 11. P. 155–157.

8. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 4. С. 35–72.

9. *Пинус А. Г.* Характеризация условно термальных функций // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 161–165.

10. *Пинус А. Г.* О функциях, коммутирующих с полугруппами преобразований алгебр // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1409–1418.

Статья поступила 21 января 2003 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
`algebra@nstu.ru`