Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 515.165.7

ПЯТИМЕРНЫЕ ДВОЙНЫЕ ЧАСТНЫЕ ГРУПП ЛИ

А. В. Павлов

Аннотация: В размерности 5 существуют ровно четыре попарно не диффеоморфные односвязные двойные частные групп Ли. Из них только одно не является однородным пространством.

Ключевые слова: двойное частное групп Ли, однородное пространство, рационально эллиптическое многообразие.

1. Введение

Пусть G — компактная группа Ли, а $H \subset G \times G$ — замкнутая подгруппа, действующая свободно на G двусторонними сдвигами: $(g_1, g_2)g = g_1 g g_2^{-1}$. Пространство орбит, которое мы будем обозначать через $G//H$, является гладким многообразием и называется *двойным частным*. Впервые двойные частные появились в работе Громола и Мейера [1], где в таком виде представлена экзотическая 7-мерная сфера. Двойные частные являются естественным обобщением однородных пространств (которые отвечают случаю $H \subset G \times 1$) и подобно им обладают римановыми метриками неотрицательной секционной кривизны. Более того, все известные неоднородные примеры многообразий положительной секционной кривизны являются двойными частными [2, 3].

Целью данной работы является классификация двойных частных в размерности 5. Если $M = G//H$ — двойное частное, то естественная проекция $G \to M$ является локально тривиальным расслоением со слоем H, поэтому всякое односвязное двойное частное рационально эллиптично. В размерности 4 всякое односвязное рационально эллиптическое многообразие гомеоморфно одному из пяти многообразий S^4, $\mathbb{C}P^2$, $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$, $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ [4]. Первые три из них являются однородными пространствами. Чигер [5] доказал, что связные суммы двух симметрических пространств ранга 1 обладают метриками неотрицательной секционной кривизны. В частности, он фактически представил $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ в виде двойного частного. Тотаро [6] показал, что и $\mathbb{C}P^n \# \mathbb{C}P^n$ является двойным частным. В размерности 6 им же было построено бесконечное семейство попарно гомотопически не эквивалентных двойных частных [7].

Мы доказываем следующий результат.

Теорема. *Существуют четыре типа диффеоморфизма пятимерных односвязных двойных частных групп Ли:*

1) *сфера* S^5;
2) *произведение сфер* $S^2 \times S^3$;
3) *многообразие Ву* $X_{-1} = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3)$;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00403).

4) *многообразие* X_∞.

Многообразия X_{-1} *и* X_∞ *получаются при различных склейках двух экземпляров нетривиального трехмерного расслоения над* S^2 *по общей границе* $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$. *Многообразие Ву характеризуется условием* $H_2(X_{-1}) = \mathbb{Z}_2$, *а* X_∞ *— условиями* $H^*(X_\infty) = H^*(S^2 \times S^3)$ *и* $w_2(X_\infty) \neq 0$. *В этом списке только* X_∞ *не является однородным пространством.*

Доказательство приводится ниже. В размерности 5 имеется лишь два рациональных гомотопических типа односвязных двойных частных. Мы формулируем необходимые результаты и рассматриваем оба случая. Заметим, что наш список двойных частных совпадает со списком эллиптических пространств этой размерности [5].

Автор благодарен И. А. Тайманову за постановку задачи и полезные обсуждения, а также Я. В. Базайкину за полезные обсуждения.

2. Сводка необходимых результатов

Многообразие M называется *рационально эллиптическим*, если суммарная размерность его рациональных гомотопических групп конечна: $\dim \pi_* M \otimes \mathbb{Q} < \infty$. Всякое односвязное двойное частное является рационально эллиптическим многообразием. В размерности 5 имеется лишь два рациональных гомотопических типа рационально эллиптических многообразий: S^5 и $S^2 \times S^3$ [8].

Мы будем рассматривать рационально-гомотопическую точную последовательность расслоения $H \to G \to M = G/H$, пользуясь для сужения круга возможных вариантов G и H следующими фактами.

Любая связная компактная группа Ли G представима в виде произведения $G = G_0 \times G_1 \times \ldots \times G_n$, где G_0 — центр группы G, а каждая из групп G_i накрывается простой группой Ли. Односвязную накрывающую группы G_i будем называть *простым фактором* группы G.

Как показано в [6], всякое односвязное двойное частное M можно представить в виде $M = G//H$, где группа G односвязна, группа H связна, а действие задается при помощи гомоморфизма $H \to (G \times G)/\Delta Z$, где $\Delta Z \subset G \times G$ — диагонально вложенный центр группы G. Группа $(G \times G)/\Delta Z$ двусторонне действует на G:

$$(g_1 z, g_2 z) g = g_1 g g_2^{-1}.$$

При этом G и H можно выбрать так, что H не будет действовать транзитивно ни на каком простом факторе G_i группы G. Запись $G//H$ далее будет означать именно такое представление двойного частного. Заметим, что группа G является произведением простых групп Ли в силу односвязности.

Простая группа Ли имеет нетривиальные рациональные гомотопические группы только в нечетных размерностях. Поэтому рационально-гомотопическая точная последовательность расслоения $H \to G \to M = G//H$ распадается на отрезки вида

$$0 \to \pi_{2d}^{\mathbb{Q}} M \xrightarrow{\partial_*} \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} H \xrightarrow{i_*} \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} G \xrightarrow{p_*} \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} M \to 0.$$

Мы обозначаем символом $\pi_k^{\mathbb{Q}} X$ группу $\pi_k X \otimes \mathbb{Q}$. *Показателями* группы Ли G называются целые числа d такие, что группа $\pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} G$ нетривиальна (с кратностями). Показатели простых групп известны. Будем говорить, что простой фактор G_i группы G *вносит в* M *показатель* d, если гомоморфизм $p_* : \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} G_i \to \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} M$ нетривиален, т. е. гомоморфизм $i_* : \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} H \to \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} G_i$ не сюръективен.

Приведем в удобном для наших целей виде два результата работы [7].

Теорема A (Тотаро). *Пусть $M = G//H$ — односвязное двойное частное. Каждый простой фактор G_1 группы G вносит в M по крайней мере один показатель d. Если $d \leqslant 3$, то верно одно из следующих утверждений:*

1) G_1 вносит в M старший показатель d,

2) $G_1 \cong \mathrm{SU}(4)$ вносит в M второй по величине показатель $d = 3$, а группа H имеет простой фактор $H_1 \cong \mathrm{Sp}(2)$, который действует нетривиально в точности с одной стороны G_1,

3) $G_1 \cong \mathrm{SU}(3)$ вносит в M показатель 2, а в H имеется простой фактор $H_1 \cong \mathrm{SU}(3)$, который действует на G_1 так: $h(g) = hgh^t$.

В случае 1 имеется конечный набор дальнейших возможностей, который для показателей $d \leqslant 3$ сводится к следующей альтернативе.

Теорема B (Тотаро). *Пусть $M = G//H$ — односвязное двойное частное, а G_1 — простой фактор группы G, вносящий в M только старший показатель $d \leqslant 3$. Тогда либо $G_1 \cong \mathrm{SU}(2)$ вносит показатель 2, либо $G_1 \cong \mathrm{SU}(3)$ вносит показатель 3. Во втором случае H имеет нетривиально действующий на G_1 простой фактор H_1, изоморфный* $\mathrm{SU}(2)$.

В размерности 5 имеется классификация замкнутых односвязных многообразий с точностью до диффеоморфизма, построенная Смейлом [9] для случая спин-многообразий и завершенная Барденом [10] для общего случая. Приведем формулировку теоремы.

Второй класс Штифеля — Уитни $w_2(M)$ односвязного пятимерного многообразия M можно рассматривать как гомоморфизм $H_2(M) \to \mathbb{Z}_2$. Группа $H_2(M)$ такого многообразия конечно порождена, и в ней можно выбрать специальный базис так, что w_2 не обращается в нуль только на одном элементе этого базиса. Порядок этого элемента есть 2^i, где число $i = i(M)$ зависит только от класса диффеоморфизма многообразия M.

Существуют две серии $X_{-1}, X_0, \ldots, X_\infty$ и $M_2, \ldots, M_\infty$ односвязных пятимерных многообразий, которые характеризуются следующими условиями:

1) $H_2(X_{-1}) = \mathbb{Z}_2$, $X_0 = S^5$, $H_2(X_j) = \mathbb{Z}_{2^j} \oplus \mathbb{Z}_{2^j}$ при $1 \leqslant j < \infty$ и $H_2(X_\infty) = \mathbb{Z}$,

2) $H_2(M_k) = \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_k$ при $2 \leqslant k < \infty$, $M_\infty = S^2 \times S^3$,

3) $i(M_k) = 0$ для всех k, $i(X_j) \neq 0$ при любом $j \neq 0$.

Теорема C (Барден). *Класс диффеоморфизма односвязного пятимерного замкнутого многообразия M вполне определяется $H_2(M)$ и $i(M)$. Кроме того, имеется однозначное представление*

$$M = X_j \# M_{k_1} \# \ldots \# M_{k_s},$$

где $-1 \leqslant j \leqslant \infty$, $0 \leqslant s$, $1 < k_1$ и для любого i либо k_i делит k_{i+1}, либо $k_{i+1} = \infty$.

3. Случай S^5

Пусть $M = G//H$ имеет рационально-гомотопический тип S^5. Все рациональные гомотопические группы такого многообразия, кроме $\pi_5^{\mathbb{Q}} M = \mathbb{Q}$, тривиальны. Из точной последовательности расслоения следует, что отображение $\pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} H \to \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} G$ не является изоморфизмом только при $d = 3$, поэтому G вносит в M единственный показатель 3, а значит, G — простая группа. Из теорем A и B вытекает, что G есть либо $\mathrm{SU}(3)$, либо $\mathrm{SU}(4)$, причем в первом случае H имеет простой фактор $\mathrm{SU}(2)$, а во втором — простой фактор $\mathrm{Sp}(2)$, действующий в точности с одной стороны. Таким образом, возможные варианты исчерпываются списком: $\mathrm{SU}(3)//\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SU}(4)/\mathrm{Sp}(2)$ и $\mathrm{SU}(3)//(\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2) = \mathrm{SU}(3)//\mathrm{SO}(3)$ (группа $\mathrm{Sp}(2)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{SO}(5)$ не является подгруппой $\mathrm{SU}(4)$).

Если односвязное многообразие имеет вид $M = G//H$, где $G = \mathrm{SU}(3)$, $H = \mathrm{SO}(3)$, то $\pi_2 G = \pi_1 G = 0$, а $\pi_1 H = \mathbb{Z}_2$. Поэтому $\pi_2 M = H_2(M) = \mathbb{Z}_2$. Согласно теореме C среди односвязных многообразий размерности 5 существует единственное с точностью до диффеоморфизма многообразие X_{-1} с $H_2(X_{-1}) = \mathbb{Z}_2$. Оно называется *многообразием Ву* и получается из двух экземпляров нетривиального трехмерного расслоения F над S^2 при некоторой склейке по общей границе $\partial F_{(i)} = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$. Таким образом, M диффеоморфно X_{-1}.

Многообразия $\mathrm{SU}(3)//\mathrm{SU}(2)$ и $\mathrm{SU}(4)/\mathrm{Sp}(2)$ диффеоморфны S^5 вне зависимости от вида действия, как следует, например, из теоремы C.

4. Случай $S^2 \times S^3$

Пусть $M = G//H$ имеет рациональный гомотопический тип $S^2 \times S^3$. Тогда $\pi_2^{\mathbb{Q}} M = \mathbb{Q}$, $\pi_3^{\mathbb{Q}} M = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$. Из длинной точной последовательности расслоения получаем изоморфизм $\pi_1^{\mathbb{Q}} H \cong \mathbb{Q}$ и короткую точную последовательность

$$0 \to \pi_3^{\mathbb{Q}} H \xrightarrow{i_*} \pi_3^{\mathbb{Q}} G \xrightarrow{p_*} \pi_3^{\mathbb{Q}} M \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \to 0.$$

Следовательно, H содержит абелев фактор S^1, а G вносит в M два показателя 2, поэтому $G = G_1 \times G_2$, где G_i — простые группы. Каждая из них изоморфна либо $\mathrm{SU}(2)$, либо $\mathrm{SU}(3)$, причем в последнем случае у H имеется простой фактор $H_i \cong \mathrm{SU}(3)$. Из соображений размерности возможны следующие варианты:

1) $M = (\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))/S^1$;

2) $M = (\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(3))/H$, где H имеет простые факторы S^1 и $H' \cong \mathrm{SU}(3)$.

Однако в последнем случае у H должны иметься еще простые факторы суммарной размерности 2, что противоречит условию $\pi_1^{\mathbb{Q}} H \cong \mathbb{Q}$.

Итак, всякое пятимерное двойное частное, имеющее рациональный гомотопический тип $S^2 \times S^3$, имеет вид $M = G//U$, где $G = S^3 \times S^3$, а $U = S^1$ действует при помощи некоторого гомоморфизма $S^1 \to G^2/\Delta Z(G)$. Так как $Z(G)$ конечна, этот гомоморфизм поднимается до гомоморфизма $U \to G^2$, так что можно считать S^1 замкнутой однопараметрической подгруппой $G \times G$, которая действует свободно.

Мы знаем, что $H^*(M;\mathbb{Q}) = H^*(S^2 \times S^3;\mathbb{Q})$. Рассматривая спектральную последовательность расслоения $S^1 \to G \to M$, можно убедиться, что гомологии M не имеют кручения. Согласно теореме C существуют лишь два типа диффеоморфизмов односвязных пятимерных многообразий с $H_2(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Они различаются вторым классом Штифеля — Уитни $w_2(M)$: при $w_2 = 0$ получаем $S^2 \times S^3$, а при $w_2 \neq 0$ — многообразие X_∞, появляющееся, как и многообразие Ву, при склейке двух экземпляров нетривиального трехмерного расслоения над S^2 по общей границе $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$.

Лемма. *Многообразие X_∞ является двойным частным.*

Доказательство. Рассмотрим свободное действие окружности на $S^3 \times S^3$, составленное из свободного действия на первой S^3 и поворота в последних двух координатах на второй. Это двустороннее действие: поворот задается формулой (мы отождествляем S^3 с $\mathrm{SU}(2)$)

$$e^{i\varphi}\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \bar{z} \end{pmatrix} Y^{-1} = \begin{pmatrix} z & e^{2i\varphi} w \\ -\overline{e^{2i\varphi} w} & \bar{z} \end{pmatrix},$$

где

$$Y = Y(e^{i\varphi}) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $M = (S^3 \times S^3)//S^1$ соответствующее двойное частное. Рассмотрим подмногообразие $\widetilde{N}$ в $S^3 \times S^3$, которое задается в координатах (w, z) условием $\operatorname{Re} z = 0$. Оно инвариантно относительно действия окружности, которое свободно на нем. Его фактор N по этому действию является замкнутым подмногообразием в M. Действие окружности на $\widetilde{N} = S^3 \times S^2$ свободно на первом сомножителе S^3. Проекция на второй сомножитель S^2 орбиты произвольной точки $(x, y) \in S^3 \times S^2$, где y не является полюсом, есть дважды пройденная параллель. Значит, орбита такой точки содержит ровно два представителя вида $(\pm x', y')$, где $x' \in S^3$, а $y' \in S^2$ принадлежит фиксированному заранее меридиану I. Поэтому $N = \widetilde{N}//S^1$ представляет собой цилиндр $\mathbb{R}P^3 \times I$ с некоторым отождествлением, а именно на обоих основаниях цилиндра приклеено по одному экземпляру $S^2 = \mathbb{C}P^1$ по отображению Хопфа $\mathbb{R}P^3 \to \mathbb{C}P^1$.

Заметим, что цилиндр $S^3 \times I$ с аналогичным отождествлением по отображению Хопфа $h : S^3 \to \mathbb{C}P^1$ представляет собой связную сумму $Q = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$, которая является S^2-расслоением над $S^2 = \mathbb{C}P^1$. Проекция в этом расслоении задается формулой $p : (x, t) \mapsto h(x)$ для $x \in S^3$, $0 < t < 1$. N получается из Q факторизацией по антиподальной инволюции в каждой окружности $(S^1)_{t,y} = \{(x, t) \mid p(x) = y\}$, $0 < t < 1$, $y \in S^2$. Поэтому N топологически не отличается от Q.

Известно, что $w_2(Q) \neq 0$ (см., например, [11, лемма 1.3.]). Если многообразие M содержит ориентируемое подмногообразие Q коразмерности 1 с $w_2(Q) \neq 0$, то M само имеет нетривиальный второй класс Штифеля — Уитни. Обозначим через $i : Q \to M$ вложение. Сужение $TM|_Q$ является суммой Уитни

$$TM|_Q = TQ \oplus \nu_Q,$$

где через ν_Q обозначено одномерное нормальное расслоение подмногообразия $Q \subset M$. По формуле Уитни

$$w_2(TM|_Q) = w_2(Q) + w_1(Q) \cup w_1(TQ) + w_2(\nu_Q),$$

где w_k — классы Штифеля — Уитни и $w_k(Q) = w_k(TQ)$. Так как Q ориентируемо, то $w_1(Q) = 0$. Расслоение ν_Q одномерно, поэтому $w_2(\nu_Q) = 0$. Имеем $i^*(w_2(M)) = w_2(TM|_Q) = w_2(Q) \neq 0$, следовательно, $w_2(M) \neq 0$. Для $M = (S^3 \times S^3)//S^1$ согласно теореме C это значит, что M диффеоморфно X_∞. □

Многообразие X_∞ не является однородным пространством, как следует из классификации однородных эйнштейновых многообразий размерности 5 [12]. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gromoll D., Meyer W.* An exotic sphere with nonnegative sectional curvature // Ann. Math. 1974. V. 100. P. 401–406.
2. *Eschenburg J.-H.* New examples of manifolds with strictly positive curvature // Invent. Math. 1982. V. 66. P. 469–480.
3. *Базайкин Я. В.* Об одном семействе 13-мерных замкнутых римановых многообразий положительной кривизны // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1219–1237.
4. *Paternain G. P., Petean J.* Minimal entropy and collapsing with curvature bounded from below // Invent. Math. 2003. V. 151. P. 415–450.

5. *Cheeger J.* Some examples of manifolds of nonnegative curvature // J. Differential Geom. 1973. V. 8, N 4. P. 623–628.
6. *Totaro B.* Cheeger manifolds and the classification of biquotients // J. Differential Geom. 2002. V. 61, N 3. P. 397–451.
7. *Totaro B.* Curvature, diameter, and quotient manifolds // Math. Res. Lett. 2003. V. 10, N 2–3. P. 191–203.
8. *Павлов А. В.* Оценки чисел Бетти рационально эллиптических многообразий // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1332–1338.
9. *Smale S.* On the structure of 5-manifolds // Ann. of Math. (2). 1962. V. 75. P. 38–46.
10. *Barden D.* Simply connected five-manifolds // Ann. of Math. (2). 1965. V. 82. P. 365–385.
11. *Мандельбаум Р.* Четырехмерная топология. М.: Мир, 1981.
12. *Alekseevsky D., Dotti Miatello I., Ferraris C.* Homogeneous Ricci positive 5-manifolds // Pacific. J. Math. 1996. V. 175, N 1. P. 1–12.

Статья поступила 2 сентября 2004 г.

Павлов Александр Викторович
НИИ математики при Якутском гос. университете,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
saaska@yahoo.com