Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 517.5

МОНОТОННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКИХ СРЕД

В. С. Климов

Аннотация: Устанавливается разрешимость краевых задач, описывающих стационарные и периодические течения вязкопластических сред. В случае стационарных течений исследуется вопрос о сходимости метода Галёркина. Для задачи о периодических течениях доказывается вариант второй теоремы Боголюбова.

Ключевые слова: многозначные отображения, векторное поле, девиатор скоростей деформаций, стационарные и периодические течения.

Доказывается разрешимость краевых задач, описывающих стационарные и периодические течения вязких сред [1]. Отличительной особенностью изучаемой модели является многозначность связи динамических и кинематических характеристик движения. Исследуется вопрос о сходимости метода Галёркина; для задачи о периодических течениях приводится вариант второй теоремы Боголюбова.

Значительную роль в работе играют идеи и методы теории монотонных операторов, в первую очередь понятие вращения (степени) многозначного отображения. В ряде интересных для приложений случаев доказывается совпадение топологических характеристик многозначных отображений монотонного типа и специальным образом конструируемых однозначных вполне непрерывных векторных полей.

Ниже $\|x;X\|$ — норма элемента x в B-пространстве X; X^* — сопряженное к X пространство; (x,x^*) — значение функционала $x^*\in X^*$ на элементе $x\in X$; $\sigma(X,X^*)$, $\sigma(X^*,X)$ — слабые топологии на X и X^*, порождаемые формой $(\cdot,\cdot)$; $\mathfrak{B}_X=\{x\in X, \|x;X\|\le 1\}$ — единичный шар в пространстве X; $\mathrm{Cv}(X)$ — совокупность непустых выпуклых замкнутых подмножеств B-пространства X; $\Gamma(X)$ — множество конечномерных подпространств пространства X; $\theta_X(M_1,M_2)$ — уклонение множества $M_1\subset X$ от множества $M_2\subset X$:

$$\theta_X(M_1,M_2)=\sup_{x_1\in M_1}\inf_{x_2\in M_2}\|x_1-x_2;X\|;$$

$N(X)$ — топология в X, порождаемая нормой $\|\cdot;X\|$; $L^p(\Omega,X)$ $(1\le p\le\infty)$ — пространство измеримых по Лебегу — Бохнеру на множестве $\Omega\subset\mathbb{R}^k$ функций со значениями в B-пространстве X, норма в $L^p(\Omega,X)$ определяется стандартным образом [2, с. 154]. Как обычно, совпадающие п. в. относительно k-мерной лебеговой меры mes_k функции отождествляются; $C(J,X)$ — пространство непрерывных на отрезке $J\subset\mathbb{R}$ функций со значениями в X; $C_w(J,X)$ — пространство слабо непрерывных на J функций со значениями в X. Определяющая топологию в $C_w(J,X)$ система полунорм задается равенством

$$\|y\|_l=\max\{|l(y(t))|,\, t\in J\},\quad l\in X^*;$$

$X_1 \times X_2$ — прямое произведение B-пространств X_1 и X_2. Если X_1, X_2 вложены в отделимое топологическое пространство X_0, то с X_1, X_2 связаны B-пространства X_1+X_2, $X_1 \cap X_2$ [2, с. 22–24]. Все B-пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел; $\mathbb{R}^k$ — k-мерное евклидово пространство; $x \cdot y = x_1y_1 + \dots + x_ky_k$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k)$ из $\mathbb{R}^k$.

М-отображение (многозначное отображение) $\mathscr{F}$ множества $\mathscr{D}_1$ в множество $\mathscr{D}_2$ — это оператор, сопоставляющий каждой точке v из $\mathscr{D}_1$ непустое множество $\mathscr{F}(v) \subset \mathscr{D}_2$, называемое образом точки v; $\mathscr{F}(M) = \bigcup \mathscr{F}(v)$ $(v \in M)$ — область значений м-отображения $\mathscr{F}$ на множестве $M \subset \mathscr{D}_1$. Если образы м-отображения $\mathscr{F} : \mathscr{D}_1 \to \mathscr{D}_2$ ($\mathscr{D}_2$ — подмножество B-пространства Y) принадлежат $\mathrm{Cv}(Y)$, то будем записывать это следующим образом: $\mathscr{F} : \mathscr{D}_1 \to \mathrm{Cv}(Y)$. М-отображение $\mathscr{F} : X \to Y$ (X, Y — банаховы пространства) назовем: 1) *ограниченным*, если для каждого ограниченного множества $M \subset X$ область значений $\mathscr{F}(M)$ есть ограниченное подмножество Y; 2) *замкнутым*, если его график

$$\mathrm{Gr}\,\mathscr{F} = \{(x; y), x \in X, y \in \mathscr{F}(x)\}$$

есть замкнутое подмножество прямого произведения $X \times Y$. М-отображение $\mathscr{A} : X \to X^*$ *монотонно*, если

$$(u - v, u^* - v^*) \geq 0 \quad \forall (u; u^*), (v; v^*) \in \mathrm{Gr}\,\mathscr{A};$$

строго монотонно, если

$$(u - v,\, u^* - v^*) > 0 \quad \forall (u; u^*), (v, v^*) \in \mathrm{Gr}\,\mathscr{A},\ u \neq v.$$

Через $\mathbb{M}_p(X)$ $(1 < p < \infty)$ обозначается совокупность замкнутых строго монотонных м-отображений $\mathscr{A} : X \to \mathrm{Cv}(X^*)$, удовлетворяющих условию $0 \in \mathscr{A}(0)$ и неравенствам

$$\varkappa_1 \|x\|^p - \varkappa_0 \leq (x, x^*), \quad \|x^*\|^q \leq \varkappa_2 \|x\|^p + \varkappa_0,$$
$$(x; x^*) \in \mathrm{Gr}\,\mathscr{A}, \quad \varkappa_i > 0 \ (i = 0, 1, 2), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

константы $\varkappa_i$ могут быть различными для различных отображений $\mathscr{A}$. Оператор тождественного преобразования обозначается символом I. В работе используется терминология, принятая в теории вполне непрерывных многозначных отображений (см., например, [3, 4]).

§ 1. Многозначные отображения монотонного типа

1.1. Пусть V — рефлексивное сепарабельное B-пространство с нормой $\|\cdot\|$, V^* — сопряженное к нему с нормой $\|\cdot\|_*$. Обозначим через $S(V)$ совокупность ограниченных м-отображений $\mathscr{F} : V \to \mathrm{Cv}(V^*)$, удовлетворяющих условию: для произвольной последовательности $(v_n, v_n^*) \in \mathrm{Gr}\,\mathscr{F}$, обладающей свойствами

$$v_n \to v \text{ в } \sigma(V, V^*), \quad v_n^* \to v^* \text{ в } \sigma(V^*, V), \quad \varlimsup_{n\to\infty} (v_n, v_n^*) \leq (v, v^*), \tag{1}$$

выполняются соотношения

$$v^* \in \mathscr{F}(v), \quad v_n \to v \text{ в } N(V). \tag{2}$$

Близкие классы однозначных отображений рассматривались в [5–8]. Примеры м-отображений класса $S(V)$ можно найти в [9–13]. Остановимся на играющем в последующем важную роль многозначном операторе суперпозиции.

Пусть E — конечномерное евклидово пространство, Ω — измеримое подмножество $\mathbb{R}^k$, $0 < \operatorname{mes}_k \Omega < \infty$, $1 < p < \infty$. Отображение a класса $\mathbb{M}_p(E)$ порождает м-отображение $\mathscr{A}_0 : L^p(\Omega, E) \to L^q(\Omega, E)$, сопоставляющее функции y из $L^p(\Omega, E)$ множество измеримых сечений отображения $x \to a(y(x))$ $(x \in \Omega)$. Несложно проверить включение $\mathscr{A}_0(y) \in \mathrm{Cv}(L^q(\Omega, E))$ $\forall y \in L^p(\Omega, E)$.

Предложение 1. *Пусть $a \in \mathbb{M}_p(E)$. Тогда порождаемое a м-отображение $\mathscr{A}_0 : L^p(\Omega, E) \to L^q(\Omega, E)$ принадлежит классу $S(L^p(\Omega, E)) \cap \mathbb{M}_p(L^p(\Omega, E))$.*

Предложение 1 вытекает из результатов [12, 13].

Элемент v из V назовем *особой точкой* м-отображения $\mathscr{F}$ класса $S(V)$, если $0 \in \mathscr{F}(v)$. Отображение $\mathscr{F}$ невырожденно на множестве $\mathscr{M} \subset V$, если $\mathscr{M}$ не содержит особых точек. Пересечение множества особых точек м-отображения класса $S(V)$ с любым ограниченным замкнутым подмножеством пространства V есть компакт в пространстве V.

Для м-отображения класса $S(V)$ можно ввести понятие вращения (степени). Опишем схему введения этого понятия, отсылая за деталями к работам [6–11].

Пусть E — конечномерное подпространство V $(E \in \Gamma(V))$, j_E — оператор вложения E в V, $j_E^* : V^* \to E^*$ — сопряженный к нему. М-отображению $\mathscr{F}$ класса $S(V)$ можно сопоставить полунепрерывное сверху м-отображение $\mathscr{F}_E = j_E^* \mathscr{F} j_E : E \to \mathrm{Cv}(E^*)$. Если ω — ограниченная область в пространстве V и м-отображение $\mathscr{F}$ невырожденно на $\partial\omega$, то существует такое пространство $E_0 \in \Gamma(V)$, что для любого $E \supset E_0$, $E \in \Gamma(V)$, поле $\mathscr{F}_E$ невырожденно на $E \cap \partial\omega$ и вращение $\gamma(\mathscr{F}_E, E \cap \omega)$ многозначного векторного поля [3, 4] $\mathscr{F}_E$ на $E \cap \partial\omega$ одинаково для всех таких пространств E. Число $\gamma(\mathscr{F}_E, E \cap \omega)$ обозначают через $\gamma(\mathscr{F}, \omega)$ и называют *вращением поля* F (*степенью отображения* $\mathscr{F}$) на границе $\partial\omega$ области ω.

Один из способов нахождения подходящего пространства E_0 основан на аппроксимациях Галёркина. Последовательность $E_n \in \Gamma(V)$ $(n = 1, 2, \dots)$ назовем *исчерпывающей* пространство V, если $E_n \subset E_{n+1}$ и объединение всех пространств E_n всюду плотно в V. В качестве E_0 можно взять, например, пространство E_n $(n \gg 1)$. В частности,

$$\gamma(\mathscr{F}, \omega) = \gamma(\mathscr{F}_{E_n}, E_n \cap \omega)$$

при $n \ge n_0 \gg 1$; иногда $\gamma(\mathscr{F}, \omega)$ называют *аппроксимативным вращением* поля $\mathscr{F}$.

Указанная выше целочисленная характеристика м-отображений класса $S(V)$ гомотопически инвариантна, аддитивна и обладает свойствами:

1) если $(v - v_0, v^*) \ge 0$ $(v \in \partial\omega, v^* \in \mathscr{F}(v))$ для некоторого v_0 из ω и $0 \notin \mathscr{F}(\partial\omega)$, то $\gamma(\mathscr{F}, \omega) = 1$ (свойство нормировки);

2) если $\gamma(\mathscr{F}, \omega) \ne 0$, то область ω содержит особую точку отображения $\mathscr{F}$ (принцип ненулевого вращения).

Если v_0 — изолированная особая точка поля $\mathscr{F}$ класса $S(V)$, то вращение поля $\mathscr{F}$ на границах шаров $v_0 + \rho\mathfrak{B}_V$ достаточно малых радиусов $\rho > 0$ одинаково. Оно называется *индексом особой точки* v_0 поля $\mathscr{F}$ и обозначается символом $\operatorname{ind}(v_0, \mathscr{F})$. Вопрос о вычислении индекса $\operatorname{ind}(v_0, \mathscr{F})$ изучался многими авторами [3–14]. Наиболее простым представляется случай, когда $\mathscr{F} : V \to V^*$ — однозначное дифференцируемое по Фреше в точке v_0 отображение и уравнение $\mathscr{F}'(v_0)v = 0$ имеет только нулевое решение; в этой ситуации (при некоторых дополнительных ограничениях [7, 8, 14]) $|\operatorname{ind}(v_0, F)| = 1$. Ряд результатов о вычислении индекса установлен в случае потенциального или однородного поля $\mathscr{F}$ [7–11].

Если множество всех особых точек поля $\mathscr{F}$ ограничено, то вращение поля $\mathscr{F}$ на границах шаров $R\mathfrak{B}_V$ достаточно больших радиусов R постоянно. Оно обозначается символом $\operatorname{ind}(\infty, \mathscr{F})$ и называется *индексом* на ∞ поля $\mathscr{F}$. Если поле $\mathscr{F}$ невырожденно на V, то $\operatorname{ind}(\infty, \mathscr{F}) = 0$. Для удовлетворяющего условию острого угла

$$(v, v^*) > 0 \quad (\|v\| \geq R,\ v^* \in F(v)) \tag{3}$$

поля $\mathscr{F}$ класса $S(V)$ имеем $\operatorname{ind}(\infty, \mathscr{F}) = 1$. Условие (3) влечет разрешимость включения $0 \in \mathscr{F}(v)$. Если при этом отображение $\mathscr{F}$ строго монотонно, то решение единственно.

Вращение векторного поля играет важную роль при исследовании сходимости метода Галёркина. Пусть E_n — исчерпывающая V последовательность конечномерных пространств, $j_n : E_n \to V$ — оператор вложения, $j_n^* : V^* \to E_n^*$ — сопряженный к нему. Заменим включение

$$0 \in \mathscr{F}(v) \tag{4}$$

конечномерным включением

$$0 \in j_n^* \mathscr{F}(j_n v), \tag{5}$$

под решением которого понимается элемент v_n пространства E_n. Это означает существование элемента v_n^* из $\mathscr{F}(v_n)$, удовлетворяющего соотношению моментов

$$\big(w, v_n^*\big) = 0 \quad \forall w \in E_n. \tag{6}$$

Обозначим через $\mathscr{U}$ множество решений включения (4), через $\mathscr{U}_n$ — множество решений включения (5). Таким образом, $\mathscr{U}_n \subset E_n \subset V$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Теорема 1. *Пусть ω — ограниченная область в пространстве V, $\mathscr{U} \cap \partial\omega = \varnothing$ и $\gamma(\mathscr{F}, \omega) \neq 0$. Тогда*

1) *$\mathscr{U} \cap \omega \neq \varnothing$;*
2) *$\mathscr{U}_n \cap \omega \neq \varnothing$ при достаточно больших n;*
3) *$\theta_V(\mathscr{U}_n \cap \omega, \mathscr{U} \cap \omega) \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. По условию $\gamma(\mathscr{F}, \omega) \neq 0$. Так как

$$\gamma(\mathscr{F}, \omega) = \gamma\big(j_n^* \mathscr{F}_{jn}, E_n \cap \omega\big) \quad \text{при } n \geq n_0 \gg 1,$$

то $\gamma\big(j_n^* \mathscr{F} j_n, E_n \cap \omega\big) \neq 0$ при $n \geq n_0$. В силу принципа ненулевого вращения

$$\mathscr{U} \cap \omega \neq \varnothing, \quad \mathscr{U}_n \cap \omega \neq \varnothing \quad \text{при } n \geq n_0.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$\mathbb{N}(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}, \theta_V(\mathscr{U}_n \cap \omega, \mathscr{U} \cap \omega) > \varepsilon\}.$$

Если множество $\mathbb{N}(\varepsilon)$ бесконечно, то, производя перенумерацию, можно считать, что $\mathbb{N}(\varepsilon) = \mathbb{N}$. Фиксируем v_n из $\mathscr{U}_n \cap \omega$ так, что

$$\theta_V(v_n, \mathscr{U} \cap \omega) > \varepsilon \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ввиду рефлексивности пространства V можно считать последовательность v_n слабо сходящейся к элементу v. Поскольку $v_n \in \mathscr{U}_n$, найдется элемент v_n^* из

$\mathscr{F}(v_n)$, для которого справедливо соотношение (6). Без ограничения общности можно считать последовательность v_n^* слабо сходящейся; из (6) следует, что $v_n^* \to 0$ в $\sigma(V^*, V)$. Последовательности v_n, v_n^* обладают свойствами (1) с $v^* = 0$, поэтому $0 \in \mathscr{F}(v)$, $v_n \to v$ в $N(V)$. Так как $0 \in \mathscr{F}(v)$, то $v \in \mathscr{U} \cap \omega$, в частности,

$$\theta_V(v_n, \mathscr{U} \cap \omega) \leq \|v_n - v\| = o(1).$$

Это противоречит предположению $\theta_V(v_n, \mathscr{U} \cap \omega) > \varepsilon$. Теорема доказана.

Следствие. *Если в условиях теоремы* 1 *включение* (4) *имеет единственное в области* ω *решение* v_0, *то при больших* n *включение* (5) *также имеет решение* v_n *и* $v_n \to v_0$ *в* $N(V)$ (*сильная сходимость метода Галёркина*).

1.2. В некоторых случаях аппроксимативное вращение $\gamma(\mathscr{F}, \omega)$ сводится к вращению специальным образом конструируемого однозначного вполне непрерывного векторного поля. В этом пункте рассматривается м-отображение $\mathscr{F} : V \to \mathrm{Cv}(V^*)$, представимое в виде

$$\mathscr{F}(v) = \mathscr{D}(v, v) - \mathscr{K}(v), \tag{7}$$

где $\mathscr{K} : V \to V^*$ — однозначное вполне непрерывное отображение, а $\mathscr{D} : V \times V \to \mathrm{Cv}(V^*)$ — ограниченное м-отображение, обладающее следующими свойствами.

I. Если

$$u_n, v_n \in V,\ g_n \in \mathscr{D}(u_n, v_n),\ u_n \to u \text{ и } v_n \to v \text{ в } \sigma(V, V^*),$$

$$g_n \to g \text{ в } \sigma(V^*, V),\ \varlimsup_{n\to\infty} (v_n, g_n) \leq (v, g),$$

то

$$v_n \to v \text{ в } N(V),\ g \in \mathscr{D}(u, v).$$

II. Отображение $\mathscr{D}$ строго монотонно по второму аргументу и

$$(v, v^*) \geq \eta(\|v\|)\|v\| \quad (v^* \in \mathscr{D}(u, v)), \tag{8}$$

где $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — не зависящая от u возрастающая неограниченная функция.

Нетрудно проверить, что отображение $\mathscr{F} : V \to \mathrm{Cv}(V^*)$ принадлежит классу $S(V)$. При любых u из V и z из V^* отображение $\mathscr{F}_1(v) = \mathscr{D}(u, v) - z$ принадлежит классу $S(V)$ строго монотонно и удовлетворяет условию острого угла (3), более точно $(v, v^*) > 0$ $(\|v\| \geq R,\ v^* \in \mathscr{F}_1(v))$, константа R зависит лишь от $\|z\|_*$ и функции η из оценки (8). Поэтому существует и единственна особая точка отображения $\mathscr{F}_1$. Иначе говоря, при любых $u \in V$, $z \in V^*$ включение $z \in \mathscr{D}(u, v)$ имеет единственное решение $v = \mathscr{P}(u, z)$. Определяемое таким образом отображение усиленно непрерывно в следующем смысле: если $u_i \to u$ в $\sigma(V, V^*)$, $z_i \to z$ в $N(V)$, то $\mathscr{P}(u_i, z_i) \to \mathscr{P}(u, z)$ в $N(V)$. Предшествующие конструкции переносятся и на приближения Галёркина к включению $z \in \mathscr{D}(u, v)$. Пусть $E_n \in \Gamma(V)$ — исчерпывающая V последовательность пространств, $j_n : E_n \to V$, $j_n^* : V^* \to E_n^*$ — порождаемые E_n операторы вложения и сопряженные к ним. При любых $u \in V$, $z \in V^*$ включение $j_n^* z \in j_n^* \mathscr{D}(u, j_n v)$ имеет единственное принадлежащее E_n решение $v = \mathscr{P}_n(u, z)$. Отображение $\mathscr{P}_n : V \times V^* \to E_n$ также усиленно непрерывно: если $u_i \to u$ в $\sigma(V, V^*)$, $z_i \to z$ в $N(V^*)$, то $\mathscr{P}_n(u_i, z_i) \to \mathscr{P}_n(u, z)$ в $N(V)$.

Лемма 1. *Пусть $0 < R < \infty$, $\mathfrak{K}$ — компакт в пространстве V^*. Тогда последовательность отображения $\mathscr{P}_n$ равномерно на $R\mathfrak{B}_V \times \mathfrak{K}$ сходится к отображению $\mathscr{P}$.*

Доказательство. В предположении противного найдутся такие последовательности $u_n \in R\mathfrak{B}_V$, $z_n \in \mathfrak{K}$ и такое $\varepsilon > 0$, что

$$\|\mathscr{P}_n(u_n, z_n) - \mathscr{P}(u_n, z_n)\| > \varepsilon.$$

Без ограничения общности можно считать, что $u_n \to u$ в $\sigma(V, V^*)$, $z_n \to z$ в $N(V^*)$. Положим

$$v_n = \mathscr{P}_n(u_n, z_n) \ (n = 1, 2, \dots), \quad v = \mathscr{P}(u, z).$$

Можно считать, что $v_n \to v_0$ в $\sigma(V, V^*)$. Равенство $v_n = \mathscr{P}_n(u_n, z_n)$ равносильно включению $j_n^* z_n \in j_n^* \mathscr{D}(u_n, j_n, v_n)$, т. е. существует элемент g_n из $\mathscr{D}(u_n, v_n)$, для которого $j_n^* z_n = j_n^* g_n$. Последовательности u_n, v_n, g_n обладают свойствами: u_n и v_n сходятся к u, v_0 в $\sigma(V, V^*)$, $g_n \to z$ в $\sigma(V^*, V)$, $g_n \in \mathscr{D}(u_n, v_n)$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(v_n, g_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty}(v_n, z_n) = (v_0, z)$. Следовательно, $v_n \to v_0$ в $N(V)$, $z \in \mathscr{D}(u, v_0)$. Последнее включение равносильно равенству $v_0 = \mathscr{P}(u, z) = v$. Итак, $\mathscr{P}_n(u_n, z_n) \to \mathscr{P}(u, z)$ в $N(V)$. Как отмечалось выше, $\mathscr{P}(u_n, z_n) \to \mathscr{P}(u, z)$ в $N(V)$, поэтому

$$\|\mathscr{P}_n(u_n, z_n) - \mathscr{P}(u_n, z_n)\| \to 0,$$

что противоречит предположению $\|\mathscr{P}_n(u_n, z_n) - \mathscr{P}(u_n, z_n)\| > \varepsilon$. Лемма доказана.

Введем в рассмотрение операторы $C : V \to V$, $C_n : V \to E_n$, определенные равенствами

$$C(v) = \mathscr{P}(v, \mathscr{K}(v)), \quad C_n(v) = \mathscr{P}_n(v, \mathscr{K}(v)) \quad (v \in V).$$

Усиленная непрерывность отображений $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}_n$ влечет полную непрерывность операторов C, C_n. Из леммы 1 вытекает равномерная сходимость $C_n \to C$ на ограниченных подмножествах пространства V.

Сопоставим определяемому равенством (7) м-отображению $\mathscr{F}$ однозначное вполне непрерывное векторное поле $\Phi(v) = v - C(v)$ $(v \in V)$. Особые точки полей $\mathscr{F}$ и Φ совпадают, поэтому невырожденность отображения $\mathscr{F}$ на границе $\partial\omega$ ограниченной области ω влечет невырожденность поля $\Phi = I - C$ на $\partial\omega$; верно и обратное. Следуя терминологии из [3], вращение $\gamma(\Phi, \omega)$ вполне непрерывного векторного поля $\Phi = I - C$ можно назвать квазивращением поля $\mathscr{F}$.

Теорема 2. *Пусть поле $\mathscr{F} : V \to V^*$ определено равенством (7) и невырожденно на границе $\partial\omega$ ограниченной области $\omega \subset V$. Тогда его вращение и квазивращение совпадают: $\gamma(\mathscr{F}, \omega) = \gamma(\Phi, \omega)$.*

Доказательство. Пусть вначале V — конечномерное пространство. В этом случае пространства V и V^* можно отождествить. Положим

$$\mathscr{D}_t(u, v) = tv + (1 - t)\mathscr{D}(u, v) \quad (t \in [0, 1];\ u, v \in V),$$
$$\Psi_t(v) = \mathscr{D}_t(u, v) - \mathscr{D}_t(v(C(v)) \quad (t \in [0, 1];\ v \in \partial\omega).$$

Очевидно, что $\Psi_0(v) = \mathscr{F}(v)$, $\Psi_1(v) = \Phi(v)$ $(v \in \partial\omega)$, отображение $(v, t) \to \Psi_t(v)$ выпуклозначно и полунепрерывно сверху на $\partial\omega \times [0, 1]$. Включение $0 \in \Psi_t(v)$ равносильно непустоте пересечения $\mathscr{D}_t(v, v) \cap \mathscr{D}_t(v, C(v))$. В силу строгой монотонности отображения $\mathscr{D}_t$ по второму аргументу отсюда следует, что $v = C(v)$, а это невозможно для v из $\partial\omega$. Таким образом, поля $\mathscr{F}$ и Φ гомотопны на $\partial\omega$, следовательно, $\gamma(\Phi,\omega) = \gamma(\mathscr{F},\omega)$.

Если V — бесконечномерное пространство, то фиксируем исчерпывающую V последовательность E_n из $\Gamma(V)$ $(n = 1, 2, \dots)$ и соответствующую последовательность отображений $j_n : E_n \to V$, $j_n^* : V^* \to E_n^*$. В силу определения аппроксимативного вращения

$$\gamma(\mathscr{F},\omega) = \gamma\big(j_n^*\mathscr{F}j_n, E_n \cap \omega\big) \quad (n \geq n_0 \gg 1).$$

Из уже доказанной части теоремы, относящейся к конечномерному пространству E_n $(n \geq n_0)$, вытекает равенство

$$\gamma\big(J_n^*\mathscr{F}j_n, E_n \cap \omega\big) = \gamma(I - C_n, E_n \cap \omega) = \gamma(I - C_n, \omega) \quad (n \geq n_0).$$

Последовательность C_n равномерно на $\partial\omega$ сходится к C, поэтому $\gamma(I - C_n, \omega) = \gamma(I - C, \omega)$ при $n \gg 1$. Теорема доказана

На основе теоремы 2 можно получить различные формулы для вычисления индекса особой точки. Ранее аналоги теоремы 2 устанавливались при более жестких предположениях относительно однозначного отображения $\mathscr{F}$ и пространства V [14].

1.3. Введем функциональные пространства, возникающие при исследовании дифференциальных включений. Пусть V — рефлексивное сепарабельное пространство, H — гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$, V непрерывно и плотно вложено в H. Пространство H отождествляется с сопряженным ему H^*, а H^* — с некоторым подпространством сопряженного к V пространства V^*. Число (v, v^*) означает и скалярное произведение элементов v и v^* из H, и значение функционала v^* из V^* на элементе $v \in V$.

Числу p из луча $[2, \infty)$, отрезку $J = [0, T]$ $(0 < T < \infty)$ и паре V, H сопоставим B-пространства

$$Y_1 = L^p(J, V), \quad Y_2 = L^\infty(J, H), \quad Z_1 = L^q(J, V^*),$$
$$Z_2 = L^1(J, H), \quad Y = Y_1 \cap Y_2, \quad Z = Z_1 + Z_2.$$

Пространство Y (Y_1) можно идентифицировать с сопряженным к пространству Z (Z_1) посредством билинейной формы

$$\langle y, z\rangle = \int\limits_J (y(t), z(t))\, dt.$$

Стандартным образом определяются слабые топологии $\sigma(Y, Z)$, $\sigma(Z, Y)$ на пространствах Y, Z соответственно. Множество $M \subset L^1(J, H)$ назовем *равномерно суммируемым*, если

$$\int\limits_\Delta |z(t)|\, dt \leq \psi(\mathrm{mes}_1 \Delta)$$

для всяких z из M и измеримых множеств $\Delta \subset J$, $\psi(t) \to 0$ при $t \to 0$. Множество $K \subset Z$ будем называть *σ-ограниченным*, если найдутся такие множества $K_1 \subset Z_1$, $K_2 \subset Z_2$, что $K \subset K_1 + K_2$, K_1 ограничено в Z_2, K_2 равномерно суммируемо.

Положим $W = \{y : y \in Y, y' \in Z\}$. Равенство $y' = -z$ означает, что $\langle y, \varphi' v\rangle = \langle \varphi v, z\rangle$ для любых φ из $C_0^\infty(J)$ и v из V. Класс W вложен в $C(J, H)$

[2, с. 177; 9]. Это позволяет ввести понятие значения функции y из W в каждой точке отрезка J. Для любой функции y из W функция $t \to |y(t)|^2$ абсолютно непрерывна J и п. в. $(|y(t)|^2)' = 2(y(t), y'(t))$. Через W_0 обозначается часть W, состоящая из функций y, удовлетворяющих периодическому краевому условию $y(0) = y(T)$.

Следуя [9], обозначим через $\alpha_1(Y, Z)$ совокупность м-отображений $F : Y \times [0,1] \to \mathrm{Cv}(Z)$, удовлетворяющих условиям:

1) для каждого ограниченного множества $M \subset Y$ множество $F(M \times [0,1])$ есть σ-ограниченное подмножество Z;

2) для произвольных последовательностей $y_i \in W_0$, $\lambda_i \in [0,1]$, $z_i \in F(y_i, \lambda_i)$, обладающих свойствами

$$y_i \to y \text{ в } \sigma(Y, Z), \quad y_i \to y \text{ в } C_w(J, H), \quad \lambda_i \to \lambda \text{ в } \mathbb{R},$$
$$z_i \to z \text{ в } \sigma(Z, Y), \quad \varlimsup_{i\to\infty} \langle y_i, z_i\rangle \le \langle y, z\rangle,$$

имеют место включение $z \in F(y, \lambda)$ и сходимость $y_i \to y$ в $N(Y_1)$.

Условия 1, 2 выражают некоторые усиления свойств ограниченности и замкнутости F. Первое требование выполнено, если, например, отображение F действует и ограничено из $Y \times [0,1]$ в $Z_1 + L^r(J, H)$ при некотором $r > 1$. Более сложным для проверки является требование усиленной замкнутости отображения F (см. [9], а также § 2 этой статьи).

Введенные понятия полезны при изучении периодической краевой задачи

$$0 \in y' + F(y, \lambda), \quad y(0) = y(T), \tag{9}$$

где $F \in \alpha_1(Y, Z)$. Решением задачи (9) называется функция y класса W_0, для которой $-y' \in F(y, \lambda)$. Совокупность ее решений обозначим через Π_λ $(0 \le \lambda \le 1)$; положим $O_R = \{y \in Y, \|y; Y\| < R\}$.

Предложение 2 [9]. *Пусть* $F \in \alpha_1(Y, Z)$, $\Pi_\lambda \cap \partial O_R = \varnothing$ *при некотором* $R > 0$ *и всех* λ *из* $[0,1]$. *Пусть выполняется условие острого угла*

$$(y, z) \ge 0 \quad (z \in F(y, 0),\, y \in \partial O_R). \tag{10}$$

Тогда $\Pi_\lambda \cap O_R \ne \varnothing$ $\forall \lambda \in [0,1]$.

Наряду с $\alpha_1(Y, Z)$, далее, используется класс $\alpha(Y, Z)$, состоящий из отображений F_0, для которых постоянное по λ отображение $F(\cdot, \lambda) = F_0$ принадлежит классу $\alpha_1(Y, Z)$. Очевидно, что если $F \in \alpha_1(Y, Z)$, то при любом λ из $[0,1]$ отображение $F(\cdot, \lambda)$ принадлежит классу $\alpha(Y, Z)$.

При усреднении отображений класса $\alpha(Y, Z)$ возникают отображения класса $S(V)$. Введем оператор $\mathscr{M}_t : L^1(J, V^*) \to V^*$, полагая

$$\mathscr{M}_t z = \frac{1}{T}\int_0^T z(t)\, dt;$$

сохраним обозначение $\mathscr{M}_t$ и за сужением этого оператора на пространство Z. Каждый элемент v из V можно рассматривать как постоянную функцию класса Y, и наоборот. Это позволяет отождествить пространство V с подпространством Y, состоящим из постоянных на J функций со значениями в пространстве V. На пространстве $V \subset Y$ нормы $\|\cdot\|$, $\|\cdot; Y\|$ эквивалентны.

Пусть $F \in \alpha(Y, Z)$. Положим

$$\overset{\circ}{F}(v) = \mathscr{M}_t(F(v)) \quad (v \in V).$$

Определяемое таким образом м-отображение $\overset{\circ}{F} : V \to V^*$ назовем усреднением м-отображения F. Как показано в [9], $\overset{\circ}{F} \in S(V)$.

Рассмотрим периодическую краевую задачу

$$0 \in y' + \lambda F(y), \quad y(0) = y(T), \tag{11}$$

где $0 < \lambda \leq 1$, $F \in \alpha(Y, Z)$. Сопоставим (11) включение

$$0 \in \overset{\circ}{F}(v), \tag{12}$$

получаемое формальным усреднением (11). Обозначим через $\mathfrak{N}_\lambda$ множество решений задачи (11) при $0 < \lambda \leq 1$, через $\mathfrak{N}_0$ — множество решений включения (12).

Предложение 3 [9]. *Пусть $\mathscr{G}$ — ограниченная область в Y и $\mathfrak{N}_\lambda \cap \partial\mathscr{G} = \varnothing$ $\forall \lambda \in [0, 1]$. Пусть $\gamma(\overset{\circ}{F}, \mathscr{G} \cap V) \neq 0$. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $\mathfrak{N}_\lambda \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$ $\forall \lambda \in [0, \varepsilon_0]$ и*

$$\lim_{\lambda \to 0} \theta_Y(\mathfrak{N}_\lambda \cap \mathscr{G},\, \mathfrak{N}_0 \cap \mathscr{G}) = 0. \tag{13}$$

Согласно предложению 3, представляющему вариант второй теоремы Боголюбова [15, с. 445], каждый признак отличия от нуля вращения $\gamma(\overset{\circ}{F}, \mathscr{G} \cap V)$ не только обеспечивает непустоту множества $\mathfrak{N}_0 \cap \mathscr{G}$, но и гарантирует существование решений задачи (11) при малых $\lambda > 0$. Равенство (13) влечет стягиваемость множества $\mathfrak{N}_\lambda \cap \mathscr{G}$ к множеству $\mathfrak{N}_0 \cap \mathscr{G}$ при $\lambda \to 0$.

Следствие [9]. *Пусть y_0 — изолированная особая точка поля $\overset{\circ}{F}$ ненулевого индекса. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \lambda \leq \varepsilon$ задача* (11) *имеет решение y_λ, причем $y_\lambda \to y_0$ в $N(Y)$ при $\lambda \to 0$.*

§ 2. Стационарные и периодические течения вязких сред

2.1. Через Σ_m $(m \geq 2)$ обозначается совокупность симметричных матриц $s = (s_{ij})$ размера $m \times m$ с нулевым следом. Элементы Σ_m называются далее девиаторами. Множество Σ_m наделено структурой евклидова пространства; скалярное произведение девиаторов $e = (e_{ij})$, $s = (s_{ij})$ определено равенством $e \cdot s = e_{ij} s_{ij}$ (по повторяющимся индексам здесь и далее производится суммирование).

Ниже Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^m$, $J_0^\infty(\Omega)$ — множество соленоидальных векторных полей класса $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Для каждого поля v из $J_0^\infty(\Omega)$ девиаторная функция

$$Qv = e = (e_{ij}), \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

принадлежит $L^p(\Omega, \Sigma_m)$. Пополнение $J_0^\infty(\Omega)$ в метрике, порождаемой нормой $\|v\| = \|Qv; L^p(\Omega, \Sigma_m)\|$, обозначается символом V_p. Всюду $1 < p < \infty$; это условие гарантирует эквивалентность нормы $\|\cdot\|$ норме в пространстве Соболева $L_p^1(\Omega)$ [1, с. 44], а также рефлексивность и сепарабельность пространства

V_p. Оператор Q есть изометрия V_p и некоторого подпространства пространства $L^p(\Omega, \Sigma_m)$. Сопряженный к Q оператор Q^* непрерывно действует из $L^q(\Omega, \Sigma_m)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ в сопряженное к V_p пространство V_p^*.

Пусть $v(x) = (v_1(x), \dots, v_m(x))$ — поле скоростей несжимаемой сплошной среды в эйлеровой системе координат $x_1, \dots, x_m$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(m = 2, 3)$; $s = (s_{ij})$ $(i, j = 1, \dots, m)$ — девиатор тензора напряжений, связанный с девиатором скоростей деформаций $e = Qv$ соотношением

$$s \in a(e), \tag{14}$$

где $a : \Sigma_m \to \mathrm{Cv}(\Sigma_m)$ — м-отображение класса $\mathbb{M}_p(\Sigma_m)$. Обсуждение естественности (14) с физической точки зрения можно найти в [1, с. 15]. Рассматриваемая модель сплошной среды включает в себя классическую модель вязкой жидкости, различные модели нелинейно-вязких жидкостей, вязкопластические среды [16–20].

Ставится задача об определении поля скоростей $v = (v_1, \dots, v_m)$, удовлетворяющего равенствам

$$\int\limits_{\Omega} h \cdot (v \cdot \nabla) v \, dx + \int\limits_{\Omega} Qh \cdot s \, dx = (h, f), \tag{15}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{16}$$

Здесь $h = (h_1, \dots, h_m)$ — произвольное поле класса V_p,

$$h \cdot (v \cdot \nabla) v = v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} h_j,$$

s связано с $e = Qv$ соотношением (14), $f = (f_1, \dots, f_m)$ — внешняя сила, предполагаемая элементом пространства V_p^*. Предположение $\operatorname{div} v = 0$ означает несжимаемость среды, равенство $v|_{\partial\Omega} = 0$ фиксирует распределение скоростей на границе $\partial\Omega$ области Ω (условие прилипания), (15) выражает принцип виртуальных мощностей. Под решением задачи (14)–(16) понимается поле v класса V_p, удовлетворяющее (15) для любого пробного поля h.

Далее удобна операторная трактовка задачи (14)–(16). Отображение a класса $\mathbb{M}_p(\Sigma_m)$ порождает м-отображение $\mathscr{A}_0 : L^p(\Omega, \Sigma_m) \to L^q(\Omega, \Sigma_m)$ (см. п. 1.1). Положим $\mathscr{A} = Q^* \mathscr{A}_0 Q$. В силу предложения 1 отображение $\mathscr{A}$ принадлежит классу $S(V_p) \cap \mathbb{M}_p(V_p)$.

При исследовании задачи (14)–(16) существенную роль играет трилинейная форма

$$b(u, v, w) = \int\limits_{\Omega} w \cdot (u \cdot \nabla) v \, dx = \int\limits_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx,$$

где $u = (u_i)$, $v = (v_i)$, $w = (w_i)$ — элементы пространства V_p. При $p \geq \frac{3m}{m+2}$ форма b определена и непрерывна на $V_p \times V_p \times V_p$; справедливы равенства

$$b(u, v, v) = 0, \quad b(u, v, w) = -b(u, w, v), \tag{17}$$

означающие знакопеременность формы по v, w [17–20]. Определим билинейный оператор $\mathscr{B} : V_p \times V_p \to V_p^*$ равенством $b(u, v, w) = (w, \mathscr{B}(u, v))$ $(w \in V_p)$. Очевидно, что $\mathscr{B} : V_p \times V_p \to V_p^*$ — непрерывный оператор; из (17) вытекает равенство $(v, \mathscr{B}(u, v)) = 0$, называемое свойством ортогональности оператора $\mathscr{B}$.

Лемма 2. *Билинейный оператор $\mathscr{B} : V_p \times V_p \to V_p^*$ при $p \geq \frac{3m}{m+2}$ слабо непрерывен, т. е. если $u_n \to u$, $v_n \to v$ в $\sigma(V_p, V_p^*)$, то $\mathscr{B}(u_n, v_n) \to \mathscr{B}(u, v)$ в $\sigma(V_p^*, V_p)$.*

Доказательство. Сходимость в слабой топологии $\sigma(V_p, V_p^*)$ влечет сходимость в метрике $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$. В частности, последовательности u_n, v_n сходятся к u, v по мере. Согласно (17)

$$(w, \mathscr{B}(u_n, v_n)) = -b(u_n, w, v_n) = -\int\limits_\Omega u_{n_i} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} v_{n_j}\, dx.$$

Последовательность $u_{n_i} v_{n_j}$ сходится по мере к $u_i v_j$ и ограничена в пространстве $L^q(\Omega)$, поэтому $u_{n_i} v_{n_j} \to u_i v_j$ в $\sigma(L^q, L^p)$. Теперь сходимость $\mathscr{B}(u_n, v_n) \to \mathscr{B}(u, v)$ в $\sigma(V_p^*, V_p)$ очевидна. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $a \in \mathbb{M}_p(\Sigma_m)$, $p(m+2) \geq 3m$. Тогда определяемое равенством*

$$\mathscr{F}(v) = \mathscr{A}(v) + \mathscr{B}(u, v) - f$$

отображение $\mathscr{F} : V_p \to V_p^*$ допускает представление (7) с

$$\mathscr{K}(v) \equiv f, \quad \mathscr{D}(u, v) = \mathscr{A}(v) + \mathscr{B}(u, v);$$

в частности, $\mathscr{F} \in S(V_p)$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathscr{K} : V_p \to V_p^*$ — однозначное вполне непрерывное отображение, $\mathscr{D} : V_p \times V_p \to \mathrm{Cv}(V_p^*)$ — ограниченное м-отображение. Проверим свойство I для отображения $\mathscr{D}$. Пусть последовательности u_n и v_n сходятся к u и v в $\sigma(V_p, V_p^*)$,

$$g_n \in \mathscr{D}(u_n, v_n) = \mathscr{A}(v_n) + \mathscr{B}(u_n, v_n),$$

$$g_n \to g \text{ в } \sigma(V_p^*, V_p), \quad \varlimsup_{n\to\infty} (u_n, g_n) \leq (v, g).$$

В силу леммы 2 $\mathscr{B}(u_n, v_n) \to \mathscr{B}(u, v)$ в $\sigma(V_p^*, V_p)$, поэтому последовательность $v_n^* = g_n - \mathscr{B}(u_n, v_n)$ принадлежит $\mathscr{A}(v_n)$ и сходится к $v^* = g - \mathscr{B}(u, v)$ в $\sigma(V_p^*, V_p)$. Так как

$$(v_n, \mathscr{B}(u_n, v_n)) = 0 = (v, \mathscr{B}(u, v)),$$

то

$$\varlimsup_{n\to\infty} (v_n, v_n^*) \leq (v, v^*).$$

Отображение $\mathscr{A}$ принадлежит классу $S(V_p)$, поэтому $v_n \to v$ в $N(V_p)$, $v^* \in \mathscr{A}(v)$, а это равносильно включению $g \in \mathscr{D}(u, v)$. Свойство I установлено.

Строгая монотонность отображения $\mathscr{D}$ по второму аргументу и оценка (8) следуют из включения $a \in \mathbb{M}_p(\Sigma_m)$ и свойства ортогональности отображения $\mathscr{B}$. Лемма доказана.

Замечание. При $p(m+2) > 3m + 2$ можно положить

$$\mathscr{K}(v) = f - \mathscr{B}(v, v), \quad \mathscr{D}(u, v) = \mathscr{A}(v).$$

В условиях леммы 3 задача (14)–(16) равносильна включению (4), где отображение $\mathscr{F} : V_p \to V_p^*$ определено равенством $\mathscr{F}(v) = \mathscr{A}(v) + \mathscr{B}(v, v) - f$. *Индексом изолированного решения* v_0 задачи (14)–(16) естественно назвать $\mathrm{ind}(v_0; \mathscr{F})$;

приближением Галёркина — решение v_n включения (5), в котором E_n — исчерпывающая V_p последовательность конечномерных подпространств,

$$j_n : E_n \to V_p, \quad j_n^* : V_p^* \to E_n^* \quad (n = 1, 2, \dots)$$

— отображение вложения и сопряженное к нему. Поскольку отображение $\mathscr{F}$ допускает представление (7), для вычисления индекса изолированного решения v_0 задачи (14)–(16) можно использовать теорему 2.

Теорема 3. *Пусть* $a \in \mathbb{M}_p(\Sigma_m)$, $p(m+2) \geq 3m$. *Тогда*

1) *задача* (14)–(16) *имеет решение для произвольной внешней силы* f *из* V_p^*;

2) *если решение* v_0 *задачи* (14)–(16) *изолировано и его индекс* $\operatorname{ind}(v_0, \mathscr{F})$ *не равен* 0, *то при достаточно больших* n *существуют приближения Галёркина* v_n, *причем* $v_n \to v$ *в* $N(V_p)$.

Доказательство. В силу леммы 3 отображение

$$\mathscr{F}(v) = \mathscr{A}(v) + \mathscr{B}(v, v) - f$$

принадлежит классу $S(V_p)$. Особые точки $\mathscr{F}$ являются решениями задачи (14)–(16). Если $v \in V_p$, $v^* \in \mathscr{F}(v)$, то из условия $a \in \mathbb{M}_p(\Sigma_m)$ и свойства ортогональности изображения $\mathscr{B}$ вытекает оценка

$$(v, v^*) \geq k_0 \|v\|^p - k_1 - \|f\|_* \|v\|,$$

постоянные k_0, k_1 больше 0 и не зависят от v. Последняя оценка влечет условие острого угла (3), поэтому $\operatorname{ind}(\infty, \mathscr{F}) = 1$. Теперь теорема 3 следует из теоремы 1. Теорема доказана.

Условие $\operatorname{ind}(v_0, \mathscr{F}) \neq 0$ заведомо выполнено, если решение v_0 задачи (14)–(16) единственно; в этом случае

$$\operatorname{ind}(v_0, \mathscr{F}) = \operatorname{ind}(\infty, \mathscr{F}) = 1.$$

Требование единственности достаточно ограничительно. Обсуждение данного вопроса можно найти в [17–21].

2.2. В этом пункте рассматривается задача о нахождении поля скоростей $v(t) = (v_1(t), \dots, v_m(t))$ $(t \in J = [0, T])$, удовлетворяющего соотношениям

$$f \in v' + \mathscr{A}(v) + \mathscr{B}(v, v), \quad v(0) = v(T). \tag{18}$$

Для уточнения предположений о внешней силе f и определения решения задачи (18) наряду с пространством V_p ниже используются пространство $\mathscr{H}$ — замыкание $J_0^\infty(\Omega)$ в метрике пространства $L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, индуцирующего в $\mathscr{H}$ скалярное произведение и норму $|\cdot|$, а также порождаемые парой V_p, $\mathscr{H}$, отрезком $J = [0, T]$ и числом $p \in [2, \infty)$ пространства

$$Y_1 = L^p(J, V_p), \quad Y_2 = L^\infty(J, \mathscr{H}), \quad Z_1 = L^q\big(J, V_P^*\big), \quad Z_2 = L^1(J, \mathscr{H}),$$

$$Y = Y_1 \cap Y_2, \quad Z = Z_1 + Z_2, \quad W = \{v \in Y, \, v' \in Z\},$$

W_0 — часть W, состоящая из полей $v : J \to V_p$, удовлетворяющих краевым условиям $v(0) = v(T)$. Пространства Y, W, W_0 можно интерпретировать как пространства функций на цилиндре $\Omega \times J$.

Отображению a класса $\mathbb{M}_p(\Sigma_m)$ можно сопоставить отображение $\mathscr{A}$ класса $S(V_p) \cap \mathbb{M}_p(V_p)$ (см. п. 2.1). Обозначим через A м-отображение из Y_1 в Z_1, определив $A_y (y \in Y_1)$ как совокупность измеримых сечений отображения $t \to \mathscr{A}(y(t))$. Как нетрудно видеть, $A = Q^* \mathscr{A}_0 Q$, отображение A принадлежит классу $S(Y_1)$. Его естественно рассматривать и как м-отображение из Y в Z; очевидно, что $A : Y \to \mathrm{Cv}(Z)$ есть σ-ограниченное м-отображение.

Далее считаем, что $p(m+2) \geq 3m+2$. Определим билинейный оператор $B : Y \times Y \to Z_1$, полагая

$$B(u,v)(t) = \mathscr{B}(u(t), v(t)).$$

Из результатов работы [22] вытекают непрерывность и ограниченность отображения B, а также

Лемма 4. *Пусть $u_n \in Y$, $u_n \to u$ в $\sigma(Y,Z)$, $v_n \in Y_1 \cap C(J,H)$, $v_n \to v$ в Y_1 и $C_w(J,H)$. Тогда $B(u_n, v_n) \to B(u,v)$ в $\sigma(Z_1, Y_1)$,*

Ниже $f \in Z$. Введем в рассмотрение м-отображение

$$F(v,\lambda) = A(v) + B(v,v) - \lambda f \quad (v \in Y,\ 0 \leq \lambda \leq 1). \tag{19}$$

Лемма 5. *Пусть*

$$a \in \mathbb{M}_p(\Sigma_m), \quad p \geq \frac{3m+2}{m+2}, \quad f \in Z.$$

Тогда определяемое равенством (19) *отображение F принадлежит классу $\alpha_1(Y,Z)$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что м-отображение

$$F_0 = F(\cdot, 0) : Y \to \mathrm{Cv}(Z)$$

принадлежит классу $\alpha(Y,Z)$. Поскольку A, B суть ограниченные отображения из Y (соответственно из $Y \times Y$) в Z_1, то σ-ограниченность отображения F_0 очевидна.

Проверим условие усиленной замкнутости отображения F_0. Рассмотрим последовательности $v_n \in W_0$, $z_n \in F_0(v_n)$, обладающие свойствами:

$$v_n \to v \text{ в } \sigma(Y,Z) \text{ и } C_w(J,H), \quad z_n \to z \text{ в } \sigma(Z,Y),$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle v_n, z_n \rangle \leq \langle v, z \rangle.$$

Последовательность $v_n^* = z_n - B(v_n, v_n)$ принадлежит $A(v_n)$ и сходится к элементу $v^* = z - B(v,v)$ в $\sigma(Z_1, Y_1)$. В силу свойства ортогональности

$$\langle v_n, B(v_n, v_n) \rangle = \langle v, B(v,v) \rangle = 0.$$

Имеем последовательно

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle v_n, v_n^* \rangle = \varlimsup_{n\to\infty} \langle v_n, z_n - B(v_n, v_n) \rangle = \varlimsup_{n\to\infty} \langle v_n, z_n \rangle \leq \langle v, z \rangle = \langle v, z - B(v,v) \rangle = \langle v, v^* \rangle.$$

Так как $A \in S(Y_1)$, то $v_n \to v$ в $N(Y_1)$ и $v^* = z - B(v,v) \in A(v)$, что эквивалентно включению $z \in A(v) + B(v,v)$. Таким образом, отображение F_0 усиленно замкнуто. Лемма доказана.

Решением задачи (18) (кратко, *T-периодическим течением*) назовем функцию v_0 класса W_0, для которой $f \in v_0' + A(v_0) + B(v_0, v_0)$. Существование T-периодического течения выводится из результатов п. 1.3. Например, верна

Теорема 4. *Пусть $a \in \mathbb{M}_p(\Sigma_m)$, $p(m+2) \geq 3m+2$. Тогда для любого поля f из Z существует T-периодическое течение.*

Доказательство основано на предложении 2. Пусть $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in Z_1$, $f_2 \in Z_2$, Π_λ — совокупность решений задачи (9), где отображение F определено равенством (19). Если $v \in \Pi_\lambda$, то найдется такой элемент v^* из $A(v)$, что $\lambda f = v' + v^* + B(v,v)$. Функция $t \to |v(t)|^2$ абсолютно непрерывна на отрезке J и п. в.

$$\frac{1}{2}(|v(t)|^2)' = (v(t), \lambda f(t) - v^*(t) - \mathscr{B}(v(t),v(t))) = \lambda(f(t),v(t)) - (v(t),v^*(t)). \quad (20)$$

Так как $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in Z_1$, $f_2 \in Z_2$, при любом $\delta > 0$

$$(v(t),f(t)) = (v(t),f_1(t)) + (v(t),f_2(t)) \leq \frac{\delta^p}{p}\|v(t)\|^p + \frac{1}{q\delta^q}\|f_1(t)\|_*^q + \frac{1}{2}|f_2(t)|\left(\delta^2|v(t)|^2 + \frac{1}{\delta^2}\right).$$

Поскольку $v^* \in A(v)$, имеем

$$-(v(t),v^*(t)) \leq -\varkappa_1\|v(t)\|^p + \varkappa_0,$$

где $\varkappa_0$, $\varkappa_1$ — положительные константы. Объединяя (20) с двумя последними оценками, получаем

$$(|v(t)|^2)' \leq 2\left(\frac{\delta^p}{p} - \varkappa_1\right)\|v(t)\|^p + \delta^2|v(t)|^2|f_2(t)| + \frac{2}{q\delta^q}\|f_1(t)\|_*^q + |f_2(t)|\frac{1}{\delta^2}. \quad (21)$$

При малых $\delta > 0$ из оценки (21) следует неравенство

$$(|v(t)|^2)' + c_1\|v(t)\|^p \leq \alpha(t)|v(t)|^2 + \beta(t), \quad (22)$$

где постоянная $c_1 > 0$ и функции $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ из $L^1(J)$ не зависят от λ из [0,1], причем $\mathscr{M}_t\alpha < 0$. Оценка (22) в силу леммы 4 работы [23] влечет неравенство $|v(t)| \leq R_0$, постоянная R_0 не зависит от λ. Интегрируя (22) по отрезку J, приходим к оценке $\|v;Y_1\| \leq R_1$, R_1 также не зависит от λ. Таким образом, $\|v;Y\| < R$ для всех $v \in \Pi_\lambda$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$, в частности, $\Pi_\lambda \subset O_R = \{v \in Y, \|v;Y\| < R\}$.

Условие острого угла (10) для отображения $F(y,0) = Ay + B(y,y)$ следует из свойства ортогональности (17) и неравенства $(v,v^*) \geq 0$ $\forall v^* \in A(v)$. Теорема доказана.

Формальное усреднение (18) по времени приводит к включению

$$\bar{f} \in \mathscr{A}(v) + \mathscr{B}(v,v), \quad (23)$$

в котором $\bar{f} \in \mathscr{M}_t f$ — среднее значение f на отрезке J. Если v_0 — изолированное решение включения (23) и его индекс γ_0 не равен 0, то в силу предложения 3 найдется такое ε_0 из (0,1), что при λ из $(0,\varepsilon_0]$ задача

$$\lambda f \in y' + \lambda(\mathscr{A}(y) + \mathscr{B}(y,y)), \quad y(0) = y(T)$$

имеет решение y_λ и

$$\lim_{\lambda\to 0}\|y_\lambda - v_0;Y\| = 0. \quad (24)$$

Будем считать, что функции f, y_λ продолжены по T-периодическому закону на всю действительную прямую. Положим

$$v_\lambda(t) = y_\lambda\left(\frac{t}{\lambda}\right) \quad (t \in \mathbb{R},\ 0 < \lambda \le \varepsilon_0 < 1).$$

Тогда функция v_λ является решением аналогичной (18) задачи

$$f\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) \in v' + \mathscr{A}(v) + \mathscr{B}(v, v), \quad v(0) = v(\lambda T). \tag{25}$$

Очевидно, что

$$\|v_\lambda - v_0; C(J, \mathscr{H})\| = \|y_\lambda - v_0; C(J, \mathscr{H})\| \to 0$$

при $\lambda \to 0$. Установим аналогичный результат для $\|v_\lambda - v_0; Y_1\| = \|v_\lambda - v_0; L^p(J, V_p)\|$. Пусть k — натуральное число и $k\lambda \le 1 < (k+1)\lambda$. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\|v_\lambda - v_0; L^p(J, V_p)\| &\le \|v_\lambda - v_0; L^p([0, (k+1)\lambda T]; V_p)\| \\ &\le (k+1)^{1/p}\|v_\lambda - v_0; L^p([0, \lambda T]; V_p)\| = (\lambda(k+1))^{1/p}\|y_\lambda - v_0; L^p(J, V_p)\| \\ &\le \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{1/p}\|y_\lambda - v_0; L^p(J, V_p)\| \le 2\|y_\lambda - v_0; L^p(J, V_p)\|. \end{aligned}\tag{26}$$

Из (24), (26) следует, что $\|v_\lambda - v_0; L^p(J, V_p)\| \to 0$ при $\lambda \to 0$. Результатом приведенных рассуждений является

Теорема 5. *Пусть $a \in \mathbb{M}_p(\Sigma_m)$, $p \ge \frac{3m+2}{m+2}$, $f \in Z$ и задача (23) имеет изолированное решение v_0 ненулевого индекса. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом λ из $(0, \varepsilon_0]$ задача (25) имеет решение v_λ и $v_\lambda \to v_0$ в $L^p(J, V_p) \cap C(J, \mathscr{H})$ при $\lambda \to 0$.*

Теорему 5 можно рассматривать как вариант второй теоремы Боголюбова [15, с. 445]. Она позволяет заменить быстро колеблющуюся внешнюю силу ее средним значением.

2.3. Остановимся на модификациях приведенных выше результатов. В задаче о течениях вязких сред часто используется безынерционное приближение, когда конвективная часть ускорения настолько мала, что ею можно пренебречь (см., например, [1; 17–20]). Теоремы 3–5 переносятся и на этот случай; достаточно в соответствующих рассуждениях считать отображения $\mathscr{B}$, B нулевыми операторами. Более того, принятые в теоремах 3–5 ограничения на показатель p можно заменить менее жестким условием $p > 1$; гарантируется единственность стационарного и периодического течений, а это позволяет доказать безусловную сходимость метода Галёркина (для стационарных течений).

Предположение о строгой монотонности оператора a более жестко, чем вытекающая из постулата Друкера [1, § 1; 16, § 5] монотонность a. Полезно заметить, что в части существования соответствующих течений теоремы 3, 4 могут быть усилены за счет замены условия строгой монотонности оператора a условием его монотонности. Для доказательства достаточно заменить a близким к нему оператором a_δ, полагая $a_\delta(e) = a(e) + \delta|e|^{p-2}e$. Определенный таким образом оператор a_δ принадлежит классу $\mathbb{M}_p(\Sigma_m)$, поэтому согласно теоремам 3, 4 существуют стационарные (периодические) течения v_δ соответствующих вспомогательных задач. Решения исходной задачи суть частичные пределы v_δ

при $\delta \to 0$. Обоснование намеченного метода регуляризации (применительно к задаче Коши) можно найти в [23]. Вместе с тем отказ от строгой монотонности оператора a затрудняет обоснование метода Галёркина и метода усреднения; в этом случае уже для безынерционного приближения стационарные и периодические течения могут быть неединственными.

В задачах механики вязких сред иногда ограничиваются потенциальными операторами вида $a = \partial\Phi$, где $\partial\Phi(e)$ — субдифференциал выпуклой функции Φ в точке e [1, с. 32]; функцию Φ называют *диссипативным потенциалом* оператора a. Включение $a \in \partial\Phi \in \mathbb{M}_p(\Sigma_m)$ эквивалентно следующим предположениям относительно потенциала: $\Phi(e) \geq \Phi(0)$, $\Phi : \Sigma_m \to \mathbb{R}$ — строго выпуклая функция,

$$\varkappa_1|e|^p \leq \Phi(e) \leq \varkappa_2|e|^p \quad (|e| \geq R \geq 1,\ \varkappa_1 > 0,\ \varkappa_2 > 0).$$

Например, в качестве потенциала Φ можно взять функцию

$$\Phi(e) = k_1|e|^p + k_2|e| \quad (k_1 > 0,\ k_2 \geq 0).$$

Потенциальность оператора a позволяет применить (в случае безынерционного приближения) мощные вариационные методы [1]. При учете конвективной части ускорения для исследования стационарных и периодических течений можно использовать методы вариационных неравенств [18, 24]. Изложенный выше подход применим и к непотенциальным операторам a, что позволяет расширить класс рассматриваемых моделей сплошных сред.

В заключение выражаю благодарность рецензенту за внимание, проявленное к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
3. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
4. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 1. С. 59–126.
5. *Похожаев С. И.* О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами // Функцион. анализ и его прил. 1967. Т. 1, № 3. С. 66–73.
6. *Brovder F. E.* Nonlinear elliptic boundary value problems and the generalized topological degree // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. V. 76, N 5. P. 999–1005.
7. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
8. *Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К.* Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Магистр, 1998.
9. *Климов В. С.* К задаче о периодических решениях операторных дифференциальных включений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. Т. 53, № 2. С. 309–327.
10. *Климов В. С.* О топологических характеристиках негладких функционалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1998. Т. 62, № 5. С. 117–134.
11. *Климов В. С.* Ограниченные решения дифференциальных включений с однородной главной частью // Изв. РАН. 2000. Т. 64, № 4. С. 109–130.
12. *Климов В. С.* Бесконечномерная версия теории Морса для липшицевых функционалов // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 6. С. 105–122.
13. *Климов В. С., Семко Е. Р.* Многозначные операторы суперпозиции в пространствах измеримых функций. Деп. в ВИНИТИ. № 2934–В91.
14. *Забрейко П. П., Коваленок А. П.* Вычисление индекса особой точки псевдомонотонного векторного поля // Тр. ин-та математики НАН Беларуси. 1998. Т. 1. С. 107–124.

15. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
16. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
17. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
18. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
19. *Литвинов В. Г.* Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982.
20. *Темам Р.* Уравнение Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
21. *Юдович В. И.* Пример рождения вторичного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой жидкости // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, № 3. С. 453–467.
22. *Климов В. С.* Об одном методе регуляризации эволюционных задач механики вязкопластических сред // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 4. С. 483–493.
23. *Климов В. С.* Ограниченные и почти периодические решения дифференциальных включений параболического типа // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 6. С. 1049–1056.
24. *Дюво Г., Лионс Ж. Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 11 декабря 2003 г.

Климов Владимир Степанович
Ярославский гос. университет, кафедра математического анализа,
ул. Советская, 14, Ярославль 150054