Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 512.54

C55–ГРУППЫ

С. Дольфи, Э. Джабара, М. С. Лючидо

Аннотация: Классифицируются $C55$-группы, т. е. конечные группы, в которых централизатор любого 5-элемента есть 5-группа.

Ключевые слова: Группа, конечная группа, централизатор, группа Фробениуса.

1. Введение

Хорошо известно, что централизаторы инволюций играют фундаментальную роль в теории конечных групп. Особый интерес вызывал случай, в котором централизатор любой инволюции является 2-группой. Эти группы называют $C22$- или CIT-группами. В 1900 г. Бернсайд охарактеризовал конечные группы четного порядка, в которых порядок любого элемента либо нечетен, либо равен 2 (см. [1, с. 208–209; 2, с. 316]). Нетрудно охарактеризовать разрешимые $C22$-группы, тогда как классификация простых $C22$-групп является глубоким результатом, полученным Сузуки. В [3] он классифицировал простые CN-группы, а затем в [4] доказал, что простая $C22$-группа является CN-группой. CN-группа — это группа, в которой централизатор любого нетривиального элемента нильпотентен.

Более естественным обобщением $C22$-групп является понятие Cpp-групп, т. е. групп, порядок которых делится на p, а централизатор каждого p-элемента является p-группой.

В этом направлении первый результат был получен Фейтом и Томпсоном: в [5] они классифицировали простые группы с самоцентрализующей подгруппой порядка 3 (см. также теорему 9.2 в [6]). Затем Стюарт доказал более общий результат (см. теорему A в [7]), который наряду с классификацией простых групп без элементов порядка 6 в [8] дает полное описание неразрешимых $C33$-групп.

В этой статье будут классифицированы конечные $C55$-группы.

Пусть G — группа из следующих списков (легко убедиться, что G — это $C55$-группа).

Список A:

(A1) G — 5-группа;

(A2) G — разрешимая группа Фробениуса такая, что либо ядро Фробениуса, либо дополнение Фробениуса является 5-группой;

(A3) G — 2-группа Фробениуса такая, что $\mathrm{Fit}(G)$ является $5'$-группой, а $G/\mathrm{Fit}(G)$ — группой Фробениуса, ядро которой — циклическая 5-группа, а дополнение имеет порядок 2 или 4;

The authors were supported by MURST project ‘Teoria dei gruppi e applicazioni’

(A4) G — 2-группа Фробениуса такая, что $\mathrm{Fit}(G)$ — 5-группа, а $G/\mathrm{Fit}(G)$ — группа Фробениуса, ядро которой является циклической $5'$-группой, а дополнение — циклической 5-группой.

Все группы из списка A разрешимы.

Список B:

(B1) $G \simeq PSL(2, 5^f)$, где f — неотрицательное целое число;

(B2) $G \simeq PSL(2, p)$ с простым p, $p = 2 \cdot 5^f \pm 1$, где f — неотрицательное целое число;

(B3) $G \simeq PSL(2, 9) \simeq A_6$ либо $PSL(2, 49)$;

(B4) $G \simeq PSL(3, 4)$;

(B5) $G \simeq Sz(8)$ либо $Sz(32)$;

(B6) $G \simeq PSU(4, 2) \simeq PSp(4, 3)$ либо $PSU(4, 3)$, либо $PSp(4, 7)$;

(B7) $G \simeq A_7$ либо M_{11}, либо M_{22}.

Все группы из списка B просты.

Список C:

(C1) $G \simeq PGL(2, 5^f)$ либо $G \simeq M(5^{2f})$, где f — неотрицательное целое число;

(C2) $G \simeq M(9)$ либо $PSL(2, 9)\langle\alpha\rangle \simeq S_6$, где α — автоморфизм поля порядка 2;

(C3) $G \simeq M(49)$ или $PSL(2, 49)\langle\alpha\rangle$, где α — автоморфизм поля порядка 2;

(C4) $G \simeq PSL(3, 4)\langle\alpha\rangle$, где α — автоморфизм поля или граф-поля порядка 2.

Все группы из списка C почти просты.

Включим в список неразрешимые группы, у которых подгруппа Фиттинга $\mathrm{Fit}(G)$ нетривиальна.

Список D: $\mathrm{Fit}(G) \neq 1$, каждый элемент порядка 5 группы G действует без неподвижных точек на $\mathrm{Fit}(G)$ и $G/\mathrm{Fit}(G)$ изоморфна одной из следующих групп:

(D1) $PSL(2, 5) \simeq A_5$ или S_5, а $\mathrm{Fit}(G)$ — прямое произведение 2-группы класса не выше 3 и абелевой $2'$-группы;

(D2) $PSL(2, 9) \simeq A_6$, S_6 или $M(9)$, а $\mathrm{Fit}(G)$ — прямое произведение элементарной абелевой 2-группы и абелевой 3-группы;

(D3) $PSL(2, 49)$, $M(49)$ или $PSL(2, 49)\langle\alpha\rangle$, где α — автоморфизм поля порядка 2, а $\mathrm{Fit}(G)$ — абелева 7-группа;

(D4) $Sz(8)$ или $Sz(32)$, а $\mathrm{Fit}(G)$ — элементарная абелева 2-группа;

(D5) $PSU(4, 2) \simeq PSp(4, 3)$ и $\mathrm{Fit}(G)$ — элементарная абелева 2-группа;

(D6) A_7, а $\mathrm{Fit}(G)$ — элементарная абелева 2-группа.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *G является конечной $C55$-группой тогда и только тогда, когда G изоморфна одной из групп, включенных в списки* A, B, C, D.

2. Обозначения и предварительные результаты

Все группы, рассматриваемые в этой статье, конечны. Введем обозначения:

• $q = p^f$, где p — простое число, f — неотрицательное целое число;

• $\mathrm{IBr}_r(G)$ — множество неприводимых характеров Брауэра группы G характеристики r, где r простое;

• $M(q)$ — нерасщепленное расширение $PSL(2, q)$, где $|M(q) : PSL(2, q)| = 2$, если p нечетное простое и $q = p^{2f}$.

Группа G называется *почти простой*, если существует такая конечная неабелева простая группа S, что $S \le G \le \mathrm{Aut}(S)$.

Группа G называется 2-*группой Фробениуса*, если есть такие две ее нормальные подгруппы N и K, где $N < K$, что K — группа Фробениуса с ядром N, а G/N — группа Фробениуса с ядром K/N.

Для группы G определим ее *простой граф* $\Gamma(G) = \Gamma$ следующим образом: $\pi(G)$ — множество вершин Γ, $|G|$ — множество простых делителей. Две вершины p и q связаны тогда и только тогда, когда в группе G существует элемент порядка pq. Пусть $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t$ — связные компоненты Γ, $t(G) = t$ — количество таких связных компонент. Более того, если $2 \in \pi(G)$, то положим $2 \in \pi_1$.

Группа G — Cpp-группа тогда и только тогда, когда $\{p\}$ — связная компонента из $\Gamma(G)$, простого графа группы G. Заметим, что если G обладает Cpp-свойством, то любая подгруппа G порядка, кратного p, также обладает Cpp-свойством. Это верно и для фактор-группы G порядка, кратного p.

Группы, у которых простой граф несвязен, исследованы ранее. В частности, Грюнберг и Кегель доказали в неопубликованной статье (см. [9]), что такие группы имеют следующую структуру.

Утверждение 2 [9]. *Если G — группа, простой граф которой содержит более одной связной компоненты, то G имеет одну из следующих структур:*

(a) *G — группа Фробениуса или 2-группа Фробениуса;*

(b) *G проста;*

(c) *G — расширение простой группы посредством π_1-группы;*

(d) *G — последовательное расширение π_1-группы посредством простой посредством π_1-группы;*

Ясно, что случаи (a), (b), (c) и (d) утверждения 2 соответствуют спискам A, B, C и D, исключая 5-группы.

3. Несколько лемм из теории чисел

Чтобы классифицировать простые $C55$-группы, необходимо знать такие простые степени $q = p^f$, что $q = 2 \cdot 5^n \pm 1$. Если $f = 1$, то неизвестно, найдется ли конечное число простых чисел такого вида. Нас интересует случай, когда $f > 1$.

Лемма 1. *Диафантову уравнению*

$$X^2 + 1 = 2Y^3 \tag{$*$}$$

удовлетворяют только решения $(1, 1)$ *и* $(-1, 1)$.

Доказательство. Действуем в кольце $\mathbb{Z}[i]$, являющемся факториальной областью. Пусть (x, y) — решение $(*)$. Тогда x нечетное, поэтому $1 + ix$ делится на $1 + i$, но не на 2. Значит, наибольшим общим делителем чисел $1 + ix$ и $1 - ix$ является $1 + i$. Из того, что $(1 + ix)(1 - ix) = 2y^3$ и единицами кольца $\mathbb{Z}[i]$ будут ± 1 и $\pm i$, которые являются кубами, получаем разложение

$$1 + ix = \epsilon(1 + i)(a' + ib')^3 = (1 + i)(a + ib)^3,$$

где ϵ — единица кольца $\mathbb{Z}[i]$.

Прибавляя сопряженное и деля на два, имеем

$$1 = (a + b)(a^2 - 4ab + b^2),$$

поэтому $a = \pm 1$, $b = 0$, или $a = 0$, $b = \pm 1$, откуда следует, что $x = \pm 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть p — простое число, $n, t \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Тогда*

(i) *если $p^n + 1 = 2 \cdot 5^t$, то либо $n = 1$, либо $n = 2$; если $n = 2$, то либо $t = 1$, $p = 3$, либо $t = 2$, $p = 7$;*

(ii) *если $p^n - 1 = 2 \cdot 5^t$, то $n = 1$;*

(iii) *если $2^n \pm 1 = 5^t$, то $t = 1$, $n = 2$.*

Доказательство. (i) Предположим, что $n > 1$. Пусть $n = 2^k \cdot d$, где d нечетное. Если $d > 1$, то положим $q = p^{2^k}$, так что

$$p^n + 1 = q^d + 1 = (q + 1) \cdot (q^{d-1} - q^{d-2} + \dots + 1).$$

Поэтому $(p^n + 1)/2$ кратно двум различным простым числам. Тогда $d = 1$. Поскольку $p^4 \equiv 1 \pmod 5$, имеем $k = 1$ и $n = 2$.

Рассмотрим два случая.

(A) $t = 2k + 1$ нечетное. Тогда $p^2 = 10 \cdot 25^k - 1 \equiv 0 \pmod 3$, p^2 кратно 3. Значит, $p = 3$, так как p простое.

(B) $t = 2k$ четное. Тогда

· если $k \equiv 1 (\mathrm{mod}\ \ 3)$, то $2 \cdot 25^k - 1 \equiv 0 \pmod 7$. Тогда p^2 делится на 7, значит, $p = 7$;

· если $k \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$, то $2 \cdot 25^k - 1 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 7)$, что невозможно, поскольку 3 не является квадратом $(\mathrm{mod}\ 7)$;

· если $k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$, то $k = 3h$ и

$$p^2 = 2 \cdot (25^h)^3 - 1,$$

что невозможно в силу предыдущей леммы.

(ii) Если $n > 1$, то найдется простой делитель Жигмонди q числа $p^n - 1$, не являющийся делителем $p - 1$ (см. [10]). Тогда $q = 5$ не является делителем $p - 1$, $p - 1 = 2$, и опять n — нечетное простое число. Поэтому если $n \equiv 1 \pmod 4$, то $3^n - 1 \equiv 2 \pmod 5$, тогда как если $n \equiv 3 \pmod 4$, то $3^n - 1 \equiv 1 \pmod 5$. Это доказывает, что $n = 1$.

(iii) Если $t \geq 2$, то $5^t - 1$ делится на нечетное простое число Жигмонди (см. [10]). Если $5^t = 2^m - 1$, то m простое, иначе $2^m - 1$ кратно двум различным простым числам. Предположим, что $m \geq 3$. Тогда $(2^m - 1, 2^4 - 1) = 2^{(m,4)} - 1 = 1$. Поэтому $2^m - 1$ никогда не является степенью 5.

Сформулируем несколько очень простых результатов, которые пригодятся в следующем разделе.

Лемма 3. *Пусть s — натуральное число. Тогда*

(i) *$s(s^4 - 1)$ делится на 5;*

(ii) *если $s(s^2 - 1)$ не делится на 5, то $s^6 - 1$ не делится на 5;*

(iii) *если f — простое число, r — простой делитель $s - 1$, то $(s^f - 1)/(s - 1)$ не делится на r^2, а $(s^f - 1)/(s - 1)$ делится на r тогда и только тогда, когда $r = f$.*

Доказательство. (i) Следует из малой теоремы Ферма.

(ii) Если $s(s^2 - 1)$ не делится на 5, то из п. (i) вытекает, что $s^2 + 1$ делится на 5. Значит, $s^2 \pm s + 1$ не делится на 5, откуда получим требуемое, поскольку

$$s^6 - 1 = (s + 1)(s^2 - s + 1)(s - 1)(s^2 + s + 1).$$

(iii) Если $s-1$ делится на r, то $s=1+rm$ для некоторого $m\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{(s^f-1)}{(s-1)}=s^{f-1}+s^{f-2}+\dots+s+1=(1+rm)^{f-1}+\dots+(1+rm)+1$$

$$=f+rm\sum_{i=1}^{f-1}i+r^2l=f+rmf\frac{f-1}{2}+r^2l=f\left(1+rm\frac{f-1}{2}\right)+r^2l$$

для некоторого $l\in\mathbb{N}$. Отсюда следует, что $(s^f-1)/(s-1)$ не делится на r^2 и $(s^f-1)/(s-1)$ делится на r тогда и только тогда, когда $r=f$.

4. Простые и почти простые C55-группы

Изучим простые C55-группы. Заметим, что теорема 4 из [9] есть частный случай следующего предложения, которое является прямым следствием результатов Вильямса и А. С. Кондратьева (см. [11]).

Предложение 3. *Пусть G — простая C55-группа. Тогда G совпадает с одной из следующих групп:*

$$PSL(2,q),\quad \text{где } q=5^f,9,49 \quad \textit{или} \quad q=p=2\cdot 5^t\pm 1,\quad p \textit{ простое},$$

$$Sz(8),\ Sz(32),\ PSL(3,4),\ PSp(4,3),\ PSp(4,7),\ PSU(4,3),\ A_7,\ M_{11},\ M_{22}.$$

Доказательство. Для спорадических и знакопеременных групп достаточно проверить связные компоненты простого графа $\Gamma(G)$ из [9]. Заметим, что $A_5\simeq PSL(2,5)$ и $A_6\simeq PSL(2,9)$.

Пусть теперь G — простая группа Ли, $G={}^dL_n(q)$ ранга n. Легко убедиться, используя таблицы из [9, 11, 12], что если $n\geq 3$, то $\pi(q(q^4-1))\subseteq\pi_1(G)$, за исключением ${}^3D_4(q)$, $PSU(4,2)$ и $PSU(4,3)$. Более того, $\pi(q(q^4-1))\subseteq\pi_1(G)$ также верно, если $G=Ree(q)={}^2G_2(q)$.

Тогда по лемме 3(i) простое число 5 лежит в π_1, за исключением $PSL(2,q)$, $PSL(3,q)$, $PSp(4,q)$, $PSU(3,q)$, $Sz(q)$, $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, $PSU(4,2)$, $PSU(4,3)$.

Если $G=PSL(2,q)$ и $q\neq 5^f$ нечетное, то либо $(q+1)/2=5^f$, либо $(q-1)/2=5^f$. Из п. (i) или (ii) леммы 2 можем заключить, что либо $q=p$ для некоторого простого p, либо $q=9$ или 49. Если q четное, то $2^n+1=5^t$, или $2^n-1=5^t$. Тогда из п. (iii) леммы 2 следует, что

$$G=PSL(2,4)\simeq PSL(2,5)\simeq A_5.$$

Пусть G есть $PSL(3,q)$, $PSU(3,q)$ или $G_2(q)$. Допустим, что $G\neq PSL(3,4)$. Так как $5\notin\pi_1$, то $q(q^2-1)$ не делится на 5. Из п. (ii) леммы 2 следует, что q^6-1 не делится на 5, откуда $|G|$ не делится на 5.

Пусть G — это $PSp(4,q)$. Тогда

$$\pi_2(G)=\pi((q^2+1)/(2,q-1)).$$

Если q нечетное, то из п. (i) леммы 2 имеем $q=3$ или 7. Если q четное, то из п. (iii) леммы 2 получаем, что $q=2$. Но группа $PSp(4,2)$ не является простой. Заметим, что $PSU(4,2)\simeq PSp(4,3)$.

Для групп ${}^3D_4(q)$ отметим, что поскольку $q(q^2-1)$ не делится на 5, то $q^2\equiv -1 \pmod 5$ и $q^4-q^2+1\equiv 3 \pmod 5$. Поэтому q^4-q^2+1 не может быть степенью 5.

Если $G \simeq Sz(q)$, то $q = 2^f$, где $f = 2m+1$ — нечетное число ($m \in \mathbb{N}$). Тогда

$$\pi_3(G) = \pi(q - \sqrt{2q} + 1), \pi_4(G) = \pi(q + \sqrt{2q} + 1),$$

$$(q - \sqrt{2q} + 1)(q + \sqrt{2q} + 1) = (q^2 + 1).$$

Заметим, что $2^{2f} + 1 = q^2 + 1$ делится на $5 = 2^2 + 1$. Поэтому либо $\pi_3(G) = \{5\}$, либо $\pi_4(G) = \{5\}$.

Предположим сначала, что f — простое число. Тогда из п. (iii) леммы 3 при $r = 5$, $s = 16$ получаем, что наибольшей степенью 5, делящей $2^{2f} + 1$, является 25, и это будет тогда и только тогда, когда $f = 5$. Поэтому если f простое, то $f = 3$ или $f = 5$. Действительно, при $f = 3$ имеем $\pi_3(G) = \pi(5) = \{5\}$.

Пусть теперь $f = rn$, где $1 < r < f$, r — простое число. Если $q_0 = 2^r$, то $q = q_0^n$. Напомним, что

- если $n \equiv 1, 7 (\mathrm{mod}\ 8)$, то $(q_0 - \sqrt{2q_0} + 1)$ — делитель $(q - \sqrt{2q} + 1)$, а $(q_0 + \sqrt{2q_0} + 1)$ — делитель $(q + \sqrt{2q} + 1)$,

либо

- если $n \equiv 3, 5 (\mathrm{mod}\ 8)$, то $(q_0 - \sqrt{2q_0} + 1)$ — делитель $(q + \sqrt{2q} + 1)$, а $(q_0 + \sqrt{2q_0} + 1)$ — делитель $(q - \sqrt{2q} + 1)$ (см. доказательство теоремы 5 для типа ${}^2B_2$ в [13, 14]).

Заметим, что если $r \neq 3, 5$, то $\pi_i(Sz(q_0)) \neq \{5\}$ при $i = 3, 4$. Отсюда в силу предыдущего замечания имеем $\pi_i(Sz(q)) \neq \{5\}$ при $i = 3, 4$.

Если $f = 9$, 15, 25, то прямым вычислением получаем $\pi_i(Sz(q)) \neq \{5\}$ при $i = 3$, 4. Используя предыдущее замечание, заключаем, что $Sz(q)$ — $C55$-группа тогда и только тогда, когда $q = 8$, 32.

Из этого предложения получаем следующее

Утверждение 4. *Пусть G — почти простая $C55$-группа, не являющаяся простой. Тогда G — одна из следующих групп:*

i) $PGL(2, 5^f)$ *или* $M(5^{2f})$, *где f — неотрицательное целое число;*

ii) $M(9)$ *или* $PSL(2, 9)\langle\alpha\rangle \simeq S_6$, *где α — автоморфизм поля порядка 2;*

iii) $M(49)$ *или* $PSL(2, 49)\langle\alpha\rangle$, *где α — автоморфизм поля порядка 2;*

iv) $PSL(3, 4)\langle\alpha\rangle$, *где α — автоморфизм поля или граф-поля порядка 2;*

Доказательство. Надо рассмотреть такие группы G, что $S < G \leq \mathrm{Aut}(S)$, где S определена, как в предложении 3. Эти группы можно найти в [15], за исключением $S \simeq PSL(2, q)$ и $PSp(4, 7)$. Для этих групп компоненты связности $\Gamma(G)$ описаны в [14]. Очевидно, если $G = \mathrm{Aut}(PSp(4, 7))$, то $\Gamma(G)$ связна.

Для групп $PSL(2, q)$ имеем: если $G = PGL(2, q)$, $q = p^f$, то единственным простым числом, не принадлежащим $\pi_1(G)$, является p, где p нечетное простое. Отсюда G — $C55$-группа, если и только если $p = 5$.

Компоненты связности $G = M(p^{2f})$, где f — неотрицательное целое число, такие же, как у $S = PSL(2, p^{2f})$, поэтому $M(9)$, $M(49)$ и $M(5^{2f})$ — $C55$-группы. Наконец, если $G = PSL(2, q)\langle\alpha\rangle$, где α — автоморфизм поля порядка $n > 1$, то в случаях предложения 3 имеем $q = 5^f$, 9, 49. Если $q \neq 9$, то $\pi(q(q-1)) \subseteq \pi_1(G)$, и тогда единственно возможными вариантами остаются $PSL(2, 9)\langle\alpha\rangle$ и $PSL(2, 49)\langle\alpha\rangle$, где α — автоморфизм поля порядка 2, которые являются $C55$-группами.

5. Действия без неподвижных точек

Если подгруппа Фиттинга G не является 5-группой, то элемент порядка 5 из $G \setminus \mathrm{Fit}(G)$ действует без неподвижных точек на $\mathrm{Fit}(G)$. Поэтому нам понадобятся некоторые результаты о действиях без неподвижных точек.

В этой части будут использованы таблицы характеров некоторых простых групп, приведенные в [15, 16], без дальнейших ссылок.

Лемма 4. *Пусть N — нетривиальная нормальная подгруппа группы G такая, что $G/N \simeq S$, где S — простая группа. Если существует элемент $g \in G$ простого порядка, действующий без неподвижных точек на N, то для любого простого r, являющегося делителем $|N|$, найдется такое $\chi \in \mathrm{IBr}_r(S)$, что $[\chi_T, 1_T] = 0$, где $T = \langle gN \rangle$.*

Доказательство. N нильпотентна, поскольку g индуцирует на N автоморфизм без неподвижных точек простого порядка (см. [17, V.8.14]). Поскольку $\langle g \rangle$ действует без неподвижных точек на каждой примарной компоненте N, можем считать, что N — r-группа при некотором простом $r \neq |g|$.

Поскольку $\langle g \rangle$ действует без неподвижных точек на каждом G-композиционном факторе в N, можно свести все к случаю, когда N — минимальная нормальная подгруппа G.

Мы можем далее считать, что N — абсолютно неприводимый и точный S-модуль. А именно, так как S простая и действует нетривиально на N, то N — точный S-модуль. Пусть теперь K — конечное расширение $F = GF(r)$ такое, что K — поле разложения для S. Пусть $M = K \otimes_F N$. Тогда для любого $x \in S$ будет $C_M(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $C_N(x) = 0$, поскольку x имеет неподвижную точку тогда и только тогда, когда 1 является корнем характеристического многочлена x. Значит, можно предположить, что N — $K[S]$-модуль, т. е. N абсолютно неприводимый. Поскольку $T = \langle gN \rangle$ — нетривиальная группа, которая действует без неподвижных точек на N, сужение N_T не содержит тривиальный модуль 1_T в качестве конституэнты. Если $\chi \in \mathrm{IBr}_r(S)$ — характер Брауэра, соответствующий N, то $[\chi_T, 1_T] = 0$, так как $(r, |T|) = 1$, и χ_T — обыкновенный (комплексный) характер T.

Утверждение 5. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G такая, что $G/N \simeq S$, где S — одна из следующих ниже почти простых групп. Предположим, что каждый 5-элемент G действует без неподвижных точек на N. Тогда*

(i) *если $S \simeq PSL(2, p)$, где p нечетное простое такое, что $(p+1)/2$ или $(p-1)/2$ являются степенью 5, то $N = 1$;*

(ii) *если $S \simeq PSL(2, 5^f)$, где $f \geq 2$, то $N = 1$;*

(iii) *если $S \simeq PSL(2, 5) \simeq A_5$ или S_5, то N — прямое произведение 2-группы класса не выше 3 и абелевой $2'$-группы;*

(iv) *если $S \simeq PSL(2, 9) \simeq A_6$ или S_6, или $M(9)$, то N — прямое произведение элементарной абелевой 2-группы и абелевой 3-группы;*

(v) *если $S \simeq PSL(2, 49)$ или $M(49)$, или $PSL(2, 49)\langle \alpha \rangle$, где α — автоморфизм поля порядка 2, то N — абелева 7-группа;*

(vi) *если $S \simeq Sz(8)$, $Sz(32)$, $PSp(4, 3)$, A_7, то N — элементарная абелева 2-группа;*

(vii) *если $S \simeq PSL(3, 4)$, $PSU(4, 3)$, $PSp(4, 7)$, M_{11} или M_{22}, то $N = 1$;*

Доказательство. Поскольку N нильпотентна, будем считать, что N — r-группа, $r \neq 5$.

(i) Пусть $g \in G$ — элемент порядка 5, который действует без неподвижных точек на N. Пусть $S = G/N$ и $T = \langle gN \rangle \leq S$. В силу леммы 4 достаточно показать, что

$$[\phi_T, 1_T] > 0$$

для любого $\phi \in \mathrm{IBr_r}(S)$ и всякого простого r, $r \neq 5$.

Обозначим через A циклическую подгруппу S порядка $(p-1)/2$, а через B — циклическую подгруппу S порядка $(p+1)/2$.

I. Предположим сначала, что $r = p$. Известно, что степени p-характеров Брауэра $PSL(2,p)$ имеют вид $m+1$, где $0 \leq m \leq p-1$, m четное. Далее, если у $\phi \in \mathrm{IBr}_p(PSL(2,p))$ степень $2k+1$, то сужения ϕ на A и B имеют следующие разложения:

$$\phi_A = \eta^k + \eta^{k-1} + \eta^{k-2} + \ldots + \eta^{-(k-1)} + \eta^{-k},$$

$$\phi_B = \delta^k + \delta^{k-1} + \delta^{k-2} + \ldots + \delta^{-(k-1)} + \delta^{-k},$$

где η и δ — порождающие дуальных групп $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ соответственно.

Так как $(|T|, r) = 1$, с точностью до сопряжения имеем $T \leq A$ или $T \leq B$, откуда следует, что ϕ_T имеет 1_T в качестве конституэнты.

Значит, можно считать $r \neq p$.

Можно также считать, что $(p+1)/2$ является степенью числа 5 и с точностью до сопряжения $T \leq B$. Если именно $(p-1)/2$ является степенью 5, то T, будучи сопряженной к подгруппе «диагональной» подгруппы в S, нормирует p-подгруппу Силова P группы S и T действует без неподвижных точек на PN. Отсюда PN нильпотентна, значит, P централизует N, так как $r \neq p$. Следовательно, $N = \{1\}$.

II. Рассмотрим сначала случай, когда $r = \mathrm{char}(N)$ не является делителем $|S|$. Тогда $\mathrm{IBr}_r(S) = \mathrm{Irr}(S)$.

Кроме того, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, и существенной для нас частью таблицы характеров S является следующая:

	1	$\ldots$	$b \in B \setminus \{1\}$
1_G	1	$\ldots$	1
α	p	$\ldots$	-1
χ_i	$p+1$	$\ldots$	0
θ_j	$p-1$	$\ldots$	$-(\delta_j(b) + \overline{\delta_j}(b))$
γ_1	$\frac{1}{2}(p+1)$	$\ldots$	0
γ_2	$\frac{1}{2}(p+1)$	$\ldots$	$0,$

где $1 \leq i \leq (p-5)/4$, $1 \leq j \leq (p-1)/4$ и $1_B \neq \delta_j \in \mathrm{Irr}(B)$.

Имеют место следующие соотношения.

(a) $[\alpha_T, 1_T] = \frac{1}{|T|}(p - |T| + 1) = \frac{p+1}{|T|} - 1 \geq 2 - 1 > 0$, так как $|T|$ является делителем $|B| = (p+1)/2$.

(b) Если χ равно γ_1, γ_2 или χ_i для некоторого $1 \leq i \leq (p-5)/4$, то $[\chi_T, 1_T] = \frac{\chi(1)}{|T|} > 0$.

(c) Пусть для некоторого $1 \leq j \leq (p-1)/4$ будет $\theta = \theta_j$ и $1_B \neq \delta = \delta_j \in \mathrm{Irr}(B)$. Тогда

$$[\theta_T, 1_T] = \frac{1}{|T|}(p - 1 + 2 - |T|([\delta_T, 1_T] + [\overline{\delta}_T, 1_T])) \geq \frac{p+1}{|T|} - 2.$$

Заметим, что $|T| = 5$ — собственный делитель $|B| = (p+1)/2$, поскольку из равенства $5 = (p+1)/2$ следует, что $p = 9$, а это противоречит предположению, что p простое. Следовательно, $[\theta_T, 1_T] > 0$.

Предположим теперь, что r — делитель $|S| = \frac{1}{2}(p-1)p(p+1)$. Поскольку $r \neq p$, можем считать, что r — делитель $p-1$.

III. Пусть сначала $r \neq 2$. Из [18, случай III] следует, что любой $\phi \in \mathrm{IBr}_r(S)$ поднимается в $\mathrm{Irr}(S)$. Значит, из II вытекает, что $[\phi_T, 1_T] > 0$.

Если $r = 2$, то из [18, случай VIII(a)] получаем, что любой r-характер Брауэра ϕ, принадлежащий неглавному блоку S, поднимается в $\mathrm{Irr}(S)$, а следовательно, в силу II будет $[\phi_T, 1_T] > 0$. С другой стороны, главный блок содержит три характера Брауэра: 1, β_1, β_2, и матрица разложения из [18, с. 90] дает

$$\beta_i = \gamma_i^o - 1,$$

где γ_i^o — сужение на r-регулярные элементы S составного характера γ_i, упомянутого выше $(i = 1, 2)$.

Поскольку $T \leq B$, для $\beta = \beta_1, \beta_2$ имеем

$$[\beta_T, 1_T] = \frac{1}{|T|}\left(\frac{p-1}{2} - (|T|-1)\right) = \frac{p+1}{2|T|} - 1 > 0,$$

потому что $|T| = 5 \neq (p+1)/2$.

(ii) Пусть H — 5-подгруппа Силова группы G. Если $N \neq 1$, то NH — группа Фробениуса. Отсюда H — дополнение Фробениуса, значит, она циклическая. Но 5-подгруппы Силова $PSL(2, 5^f)$ являются циклическими тогда и только тогда, когда $f = 1$.

(iii) Если $r = 2$, то из теоремы 2 в [19] и теоремы 1 в [20] получаем требуемое.

Рассмотрим следующее представление A_5:

$$\langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha^2 = \beta^3 = \gamma^5,\ \gamma = \alpha\beta \rangle;$$

A_5 имеет естественное представление размерности 4 на $\mathbb{Z}$, в котором α, β и γ представимы в виде матриц A, B и C соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если $r \neq 2$, то единственным неприводимым модулярным представлением A_5, в котором элементы порядка 5 действуют без неподвижных точек, является только что описанное. Это может быть получено через $GF(r)$, в чем можно убедиться с помощью таблицы характеров. Обозначим через Σ модуль, полученный этим представлением. Любой композиционный фактор N изоморфен Σ, поскольку является $GF(r)A_5$-модулем и поэтому имеет порядок r^4.

Простые вычисления показывают, что внешнее произведение $\Sigma \wedge \Sigma$ имеет размерность 6 на $GF(r)$ и раскладывается в квадратичном расширении $GF(r)$ в сумму двух абсолютно неприводимых $GF(r^2)A_5$-модулей размерности 3. В любом из них элемент порядка 5 из A_5 имеет нетривиальные неподвижные точки.

В частности, не существует нетривиального гомоморфизма $GF(r)A_5$-модулей $\Sigma \wedge \Sigma \to \Sigma$.

Докажем от противного, что N абелева. Пусть N — минимальный контрпример. Тогда N' — элементарная абелева группа порядка r^4, изоморфная Σ как $GF(r)A_5$-модуль. Рассмотрим отдельно два случая.

(a) $N/Z(N)$ имеет порядок r^4, а значит, изоморфна Σ. Тогда отображение $\Sigma \times \Sigma \to N'$, заданное по правилу $(Z(N)x, Z(N)y) \mapsto [x,y]$, является полностью определенным и индуцирует сюръективный гомоморфизм $\psi : \Sigma \wedge \Sigma \to N' \simeq \Sigma$, что приводит к противоречию в силу предыдущего замечания.

(b) $|N/Z(N)| > r^4$. Поскольку N имеет класс 2, а N'имеет показатель r, то $[x, y^r] = [x,y]^r = 1$ для любых $x, y \in N$. Значит, $\Phi(N) = \langle N', N^r\rangle \leq Z(N)$. Далее, $N/Z(N)$ раскладывается в прямую сумму некоторого числа модулей $\overline{N}_i$, изоморфных S, где $i \in I$ — множество индексов. Пусть N_i — подгруппа N такая, что $N_i/Z(N) = \overline{N}_i$. Так как $N_i < N$, группа N_i абелева для всех $i \in I$. Поскольку N не является абелевой по предположению, найдутся такие N_1 и N_2, что $[N_1, N_2] \neq 1$. Из минимальности $|N|$ получаем $N = N_1N_2$, $[N_1, N_2] = N'$ и, более того, $N_1 \cap N_2 = Z(N)$.

Зафиксируем базис $\bar{x}_i = x_iZ(N)$, $i = 1, \dots, 4$, для $\overline{N}_1$ так, что $\alpha, \beta, \gamma \in A_5$ представимы в виде матриц A, B и C. Более того, выберем такие элементы x_1, x_2, x_3, x_4 из N_1, что $x_i^\gamma = x_{i+1}$ для $i = 1, 2, 3$ и $x_4^\gamma = x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1}$.

Аналогично выберем элементы y_1, y_2, y_3, y_4 из N_2.

Легко проверить, что $N_3 = \langle x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, Z(N)\rangle$ — G-инвариантная подгруппа N, и поскольку $N_3 < N$, группа N_3 абелева. В частности, так как N имеет класс 2, а группы N_1 и N_2 абелевы, получаем

$$1 = [x_iy_i, x_jy_j] = [x_i, y_j][y_i, x_j],$$

значит,

$$[x_i, y_j] = [x_j, y_i] \quad \forall\, i, j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Положим

$$\epsilon_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i < j, \\ 0, & \text{если } i = j, \\ -1, & \text{если } i > j. \end{cases}$$

Пусть s_1, s_2, s_3, s_4 — базис Σ, выбранный так, что $\alpha, \beta, \gamma \in A_5$ представимы, как и ранее, матрицами A, B и C. Рассмотрим отображение $\psi : \Sigma \times \Sigma \to N'$ $GF(r)A_5$-модулей, определенное по правилу $\psi(s_i, s_j) = [x_i, y_j]^{\epsilon_{i,j}}$.

Легко проверить, что ψ знакопеременное, однако не существует нетривиальных отображений $\Sigma \wedge \Sigma \to N' \simeq \Sigma$ и тем самым

$$[x_i, y_j] = 1 \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\},\ i \neq j.$$

Следовательно, единственными нетривиальными коммутаторами этого порождающего множества N' являются $[x_i, y_i]$, где $i = 1, 2, 3, 4$. Напомним, что если автоморфизм γ порядка 5 конечной группы T действует без неподвижных точек, то

$$tt^\gamma t^{\gamma^2} t^{\gamma^3} t^{\gamma^4} = 1$$

для любых $t \in T$. Тогда

$$[x_4, y_4]^\gamma = \left[x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1}, y_1^{-1}y_2^{-1}y_3^{-1}y_4^{-1}\right] = [x_1, y_1][x_2, y_2][x_3, y_3][x_4, y_4],$$

ибо N имеет класс 2. Следовательно,

$$[x_1, y_1][x_1, y_1]^{\gamma}[x_1, y_1]^{\gamma^2}[x_1, y_1]^{\gamma^3}[x_1, y_1]^{\gamma^4} = [x_1, y_1]^2[x_2, y_2]^2[x_3, y_3]^2[x_4, y_4]^2 \neq 1,$$

поскольку $r \neq 2$. Это противоречие завершает доказательство.

Если $S \simeq S_5$, то утверждение может быть доказано аналогично.

(iv) Если $r = 2$, то утверждение следует из теоремы 2 в [20].

Если $r > 5$, то $\mathrm{IBr}_r(A_6) = \mathrm{Irr}(A_6)$ и согласно таблице характеров A_6 получим $N = 1$ в силу леммы 4.

Если $r = 3$, то найдется такое представление размерности 4 над $GF(3)$, что 5-элементы действуют без неподвижных точек, и N абелева, поскольку $A_5 < A_6$ в силу (iii).

Если $S \simeq S_6$ или $M(9)$, то для доказательства утверждения могут быть применены аналогичные методы.

(v) Используя таблицу характеров $PSL(2, 49)$ и лемму 4, легко заключить, что единственным возможным случаем является $r = 7$. Известно, что $PSL(2, 49)$ могут быть представлены матрицами размера 4×4 с коэффициентами в $GF(7)$, причем в таких представлениях любой элемент порядка 5 действует без неподвижных точек. Поскольку $PSL(2, 49)$ содержит подгруппу, изоморфную A_5, в силу (iii) получим, что 7-группа N абелева.

Если $S \simeq M(49)$ или $PSL(2, 49)\langle\alpha\rangle$, где α — автоморфизм поля порядка 2, то для доказательства утверждения могут быть использованы аналогичные методы.

(vi) Пусть $S \simeq Sz(8)$ или $Sz(32)$. Если $r \neq 2$, то $N = 1$, как доказано в [21].

Если $r = 2$, то N — элементарная абелева 2-группа и действие является естественным, как доказано в [22].

В $PSp(4, 3)$ существует максимальная подгруппа H, являющаяся полупрямым произведением элементарной абелевой 2-группы K и группы, изоморфной A_5. Кроме того, H — $C55$-группа. Тогда NK нильпотентная, значит, N — 2-группа. Поскольку $PSp(4, 3)$ также имеет подгруппу, изоморфную A_6, из (iv) заключаем, что N — элементарная абелева группа.

Так как $A_6 \leq A_7$ по (iv), группа N — абелева $\{2, 3\}$-группа. Согласно 3-модулярной таблице характеров A_7 в силу леммы 4 получаем, что 3-компонента N тривиальна.

(vii) Используя таблицу характеров $PSL(3, 4)$ и лемму 4, легко заключаем, что $N = 1$.

$PSU(4, 3)$ содержит подгруппу Фробениуса с элементарным абелевым ядром порядка 2^4 и дополнением порядка 5 и подгруппу Фробениуса с элементарным абелевым ядром порядка 3^4 и дополнением порядка 5. Из этого следует, что N должна быть 2-группой и 3-группой. Тогда $N = 1$.

$PSp(4, 7)$ содержит подгруппу, изоморфную $PSL(2, 49)$. Поэтому в силу (v) N должна быть 7-группой. Но $PSp(4, 7)$ содержит также подгруппу, изоморфную A_7, следовательно, в силу (vi) N должна быть 2-группой. Тогда $N = 1$.

Группы M_{11} и M_{22} содержат подгруппу, изоморфную A_6, и подгруппу, изоморфную группе Фробениуса порядка 55. Тогда N должна быть одновременно $\{2, 3\}$-группой и 11-группой. Следовательно, $N = 1$.

6. Доказательство теоремы и заключительные замечания

Теперь легко провести доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 1. Пусть G не является 5-группой. Тогда $\Gamma(G)$ несвязная, следовательно, в силу предложения 2 G — одна из следующих групп.

(a) G — группа Фробениуса или 2-группа Фробениуса. В первом случае либо ядро, либо дополнение Фробениуса являются 5-группой, поскольку и то и другое имеют нетривиальный центр. Во втором случае если $F = \mathrm{Fit}(G)$ — 5-группа, то $G/\mathrm{Fit}(G)$ — группа Фробениуса, ядро $\overline{K}$ которой — циклическая $5'$-группа. Действительно, если K такая подгруппа G, содержащая F, что $\overline{K} = K/F$ — подгруппа Фиттинга G/F, то $K = FH$ — группа Фробениуса, где H — нильпотентное дополнение Фробениуса. Следовательно, H либо циклическая подгруппа, либо произведение циклической группы и обобщенной группы кватернионов. Более того, $\pi_1(G) = \pi(K/F)$ и $\pi_2(G) = \pi(F) \cup \pi(G/K) = \{5\}$. Поскольку $\overline{K} = FH/F \simeq H$ и G/K — 5-группа, действующая без неподвижных точек на $\overline{K}$, получаем, что H — циклическая группа в силу того, что группа внешних автоморфизмов обобщенной группы кватернионов Q_{2^n} является 2-группой, если $n > 3$ и $\mathrm{Out}(Q_8) \simeq S_3$.

Если F — $5'$-группа, то $G/\mathrm{Fit}(G)$ — группа Фробениуса, ядро $\overline{K}$ которой является циклической 5-группой. Следовательно, дополнение Фробениуса может быть только циклической группой порядка 2 или 4.

Заметим, что $C55$-группа Фробениуса обязательно разрешима. Иначе дополнение Фробениуса содержит подгруппу, изоморфную $SL(2,5)$, которая не является $C55$-группой.

(b) G — простая группа, и требуемое следует из предложения 3

(c) G — расширение простой группы посредством π_1-группы. Отсюда G — почти простая группа. Значит, требуемое вытекает из предложения 4.

(d) G — последовательное расширение π_1-группы посредством простой посредством π_1-группы;

Легко получить из результатов [9], что

$$F = \mathrm{Fit}(G) = O_{\pi_1}(G)$$

и G/F — изоморфная почти простой группа. Более того, если S — единственное простое неабелево сужение G, то $\pi_i(G) = \pi_i(S)$ при $i \geq 2$. Следовательно, в этом случае $F \neq 1$ и G/F — почти простая $C55$-группа, и требуемое следует из предложения 4.

Если G — разрешимая ненильпотентная $C55$-группа, можно дать более детальное описание структуры G. В частности, если положим $\pi_*(G) = \pi(G) \setminus \{5\}$ и $p_* = \min(\pi_*(G))$, получим следующее

Предложение 6. *Если G — разрешимая ненильпотентная $C55$-группа, то*

(i) *производная длина G ограничена функцией p_*, в частности, если $p_* = 2$, то $G^{(5)} = 1$;*

(ii) *если $p_* > 2$, то G'' нильпотентная.*

Доказательство. Известно, что конечная группа с автоморфизмом без неподвижных точек простого порядка p нильпотентна и ее класс нильпотентности ограничен функцией $f(p)$ от p. Можно считать, что $p > 2$, иначе группа абелева. Имеем $f(p) \leq 1 + (p-1) + \cdots + (p-1)^{2^{p}-2}$ (см. теорему VIII.10.12

в [23]). Более того, Хигман высказал предположение, что если p нечетное, то $f(p) = \frac{p^2-1}{4}$, и доказал его при $p = 5$; в частности, $f(5) = 6$ (см. замечание VIII.10.13.b в [23]).

Рассмотрим различные случаи, следуя списку A.

1. G — группа Фробениуса (случай A2). Пусть N — ядро Фробениуса, K — дополнение Фробениуса группы G. Разделим на два подслучая.

1a. N — 5-группа. Если $2 \in \pi(K)$, то N абелева и K имеет производную длину не более 4. Действительно, разрешимое дополнение Фробениуса имеет производную длину не более 4, как легко вывести из [24, гл. 18]. Следовательно, G имеет производную длину не более 5. Если $2 \notin \pi(K)$, то K — метациклическая группа, тем самым $G'' \leq N$. Более того, как было замечено, класс нильпотентности N ограничен $f(p_*)$. Значит, производная длина G ограничена функцией p_*.

1b. N — $5'$-группа. Тогда K — циклическая 5-группа и N — нильпотентная класса не более $f(5) = 6$. В частности, производная длина N не более 3. Поскольку $G' \leq N$, имеем $G^{(4)} = 1$.

2. G — 2группа Фробениуса. Пусть $N = \mathrm{Fit}(G)$. Разделим на два подслучая.

2a. N — 5-группа (случай A4). Тогда $G'' \leq N$ и делаем заключение, как в случае 1a. Заметим, что в этом случае порядок G обязательно нечетен.

2b. N — $5'$-группа (случай A3). Тогда $G'' \leq N$ и N нильпотентная класса не более $f(5) = 6$. В частности, $G^{(5)} = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Curtis C. W.* Pioneers of Representation Theory // Hist. Math. 1999. V. 15. P. 75–96.
2. *Solomon R.* A brief history of classification of the finite simple groups // Bull. Amer. Math. Soc. 2001. V. 38. P. 315–352.
3. *Suzuki M.* Finite groups with nilpotent centralizer // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 99. P. 425–470.
4. *Suzuki M.* On a class of doubly transitive groups // Ann. of Math. 1962. V. 75. P. 105–145.
5. *Feit W., Thompson J. G.* Finite groups which contain a self-centralizing element of order 3 // Nagoya Math. J. 1962. V. 21. P. 185–197.
6. *Higman G.* Odd characterisations of finite groups. Michigan: Univ. Michigan, 1968. (Lecture notes).
7. *Stewart W. B.* Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc. 1973. P. 653–680.
8. *Fletcher L. R., Stellmacher B., Stewart W. B.* Endliche Gruppen, die kein Element der Ordung 6 enthalten // Quart. J. Math. Oxford. 1977. V. 28. P. 143–154.
9. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69. P. 487–513.
10. *Zsigmondy K.* Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. V. 3. P. 265–284.
11. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
12. *Iiyori N., Yamaki H.* Prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic // J. Algebra. 1993. V. 155. P. 335–343.
13. *Lucido M. S.* Addendum to “prime graph components of finite almost simple groups” // Rend. Sem. Mat. Padova. 2002. V. 107. P. 1–2.
14. *Lucido M. S.* Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Padova. 1999. V. 102. P. 1–22.
15. *Conway J., Curtis R., Norton S., Parker R., Wilson R.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
16. *Jansen C., Lux K., Parker R., Wilson R.* An atlas of Brauer characters. New York: Clarendon Press; Oxford Univ. Press, 1995. (L. M. S. Monographs. New Series, 11. Oxford Sci. Publ.).
17. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verl., 1967.
18. *Burkhardt R.* Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen $PSL(2, p^f)$ // J. Algebra. 1976. V. 40. P. 75–96.

19. *Holt D. F., Plesken W.* A_5-invariant 2-groups with no trivial sections // Quart. J. Math. Oxford. 1986. V. 37. P. 39–47.
20. *Prince A. R.* On 2-groups admitting A_5 or A_6 with an element of order 5 acting fixed point freely // J. Algebra. 1977. V. 49. P. 374–386.
21. *Martineau P.* On representations of the Suzuki groups over fields of odd characteristic // J. London Math. Soc. 1972. V. 6. P. 153–160.
22. *Martineau P.* On 2-modular representations of the Suzuki groups // Amer. J. Math. 1972. V. 94. P. 55–72.
23. *Blackburn N., Huppert B.* Finite группs II. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1982.
24. *Passman D.* Permutation groups. New York; Amsterdam: W. A. Benjamin Inc., 1968.

Статья поступила 26 июня 2003 г.

Silvio Dolfi
Dipartimento di Matematica "U. Dini"
viale Morgagni 67/A, I-50134 Firenze, Italy
dolfi@math.unifi.it

Enrico Jabara
Dipartimento di Matematica Applicata e Informatica
Universita' "Ca' Foscari" di Venezia
Via Torino 155, 31073 Venezia Mestre, Italy
jabara@dsi.unive.it

Maria Silvia Lucido
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
via delle Scienze 200, I-33100 Udine, Italy
lucido@dimi.uniud.it