Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 517.925.51

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева

Аннотация: Рассматривается квазилинейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в линейных членах. Получены оценки области притяжения нулевого решения и установлены оценки скорости убывания решений на бесконечности. Результаты сформулированы в терминах интегралов от нормы периодического решения дифференциального уравнения Ляпунова.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, область притяжения, дифференциальное уравнение Ляпунова.

§ 1. Введение

В работе рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t, y), \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

где $A(t)$ — матрица размера $N \times N$ с непрерывными T-периодическими элементами, т. е. $A(t+T) = A(t)$, вектор-функция $\varphi(t, y)$ гладкая и $\varphi(t, 0) = 0$. Нашей целью является исследование асимптотической устойчивости нулевого решения системы, нахождение области его притяжения, а также получение оценок решений системы (1.1) при $t \to \infty$ с использованием периодического решения дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C(t).$$

В отличие от теории Флоке — Ляпунова мы не используем спектральный критерий асимптотической устойчивости.

Задача об асимптотической устойчивости стационарных решений дифференциальных уравнений является классической. Однако практически все известные результаты об устойчивости нулевого решения системы (1.1) формулируются либо в терминах мультипликаторов, либо в терминах генеральных показателей, либо в терминах функций Ляпунова, для нахождения которых нужно знать спектральные свойства матрицы монодромии линейной системы

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00095) и гранта СО РАН для молодых ученых.

(см., например, [1, 2]). Матрица монодромии, как правило, вычисляется приближенно, но хорошо известно, что задача нахождения собственных значений матриц с точки зрения теории возмущений является плохо обусловленной задачей (см., например, [3–5]). Поэтому при решении конкретных задач об устойчивости решений дифференциальных уравнений помимо спектральных критериев желательно также использовать другие критерии. При изучении асимптотической устойчивости решений систем вида (1.2) в случае постоянных коэффициентов, т. е. $A(t) \equiv A$, таким удобным критерием является критерий Ляпунова, формулируемый в терминах разрешимости матричного уравнения

$$HA + A^*H = -C, \quad C = C^* > 0.$$

Использование этого критерия, в частности, позволило разработать алгоритм с гарантированной точностью для решения задачи об асимптотической устойчивости решений системы (1.2) с постоянными коэффициентами (см., например, [5, 6]).

В настоящей работе при изучении устойчивости нулевого решения системы (1.1) мы будем использовать следующий критерий асимптотической устойчивости решений линейной системы (1.2), полученный авторами в [7].

Теорема 1. I. *Если нулевое решение линейной системы* (1.2) *асимптотически устойчиво, то для любой непрерывной на* $[0,T]$ *матрицы* $C(t)$ *существует единственное решение* $H(t)$ *краевой задачи*

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C(t), \quad 0 \le t \le T, \\ H(0) = H(T), \end{gathered} \tag{1.3}$$

при этом если

$$C(t) = C^*(t) > 0, \quad t \in [0,T], \tag{1.4}$$

то

$$H(t) = H^*(t) > 0, \quad t \in [0,T].$$

II. *Пусть правая часть* $C(t)$ *непрерывна на* $[0,T]$ *и удовлетворяет условиям* (1.4). *Если краевая задача* (1.3) *имеет эрмитово решение* $H(t)$ *такое, что* $H(0) > 0$, *то нулевое решение линейной системы* (1.2) *асимптотически устойчиво.*

В случае постоянных матриц $A(t) \equiv A$, $C(t) \equiv C > 0$ этот критерий совпадает с критерием Ляпунова, при этом

$$H(t) \equiv H = \int_0^\infty e^{tA^*} C e^{tA}\, dt.$$

В следующем параграфе, опираясь на теорему 1, мы докажем теорему об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.1), укажем оценки области притяжения нулевого решения и получим оценки решений, характеризующие скорость убывания при $t \to +\infty$. Будут рассмотрены также системы уравнений с малым параметром μ

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \mu\varphi(t,y), \quad t \ge 0. \tag{1.5}$$

В § 3 мы рассмотрим хорошо известный пример об устойчивости вертикального верхнего положения равновесия маятника при вибрации точки подвеса.

Классический результат [8, 9] заключается в том, что при достаточно большой частоте перемещения точки подвеса верхнее положение равновесия маятника будет устойчивым. В литературе этот факт излагается с использованием метода усреднения, развитого Н. Н. Боголюбовым (см., например, [10, 11]). Здесь мы даем независимое изложение этого факта, которое основывается на теоремах, доказываемых ниже, и предыдущих работах авторов [7, 12]. Отметим также, что, опираясь на эти результаты, можно указать начальный угол отклонения маятника от вертикального верхнего положения и начальную угловую скорость, при которых маятник остается вблизи верхнего положения. Можно также указать скорость затухания колебаний маятника относительно верхнего положения равновесия.

Из настоящей работы и результатов, полученных нами ранее [7, 12], вытекает, что при исследовании асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в линейных членах важную роль играет следующая числовая характеристика:

$$\theta_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds, \tag{1.6}$$

где $H(t)$ — решение краевой задачи (1.3) при $C(t) \equiv I$, $\|H(t)\|$ — спектральная норма $H(t)$. В частности, θ_1 возникает при получении оценки для модулей мультипликаторов системы (1.2) (см. [7]), при определении границы области притяжения нулевого решения системы (1.1), при нахождении ограничений на параметр μ, при которых гарантируется асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1.5). Величина (1.6) характеризует также скорость убывания решений систем (1.1), (1.2), (1.5) при $t \to \infty$. Отметим, что с вычислительной точки зрения, возможно, более удобной характеристикой для исследования асимптотической устойчивости является интегральное среднее

$$\theta_2 = \frac{1}{T}\int_0^T \|H(s)\|\,ds.$$

Используя эту величину, можно также получить указанные выше результаты, поскольку $\theta_1\theta_2 \geq 1$. В случае систем с постоянными коэффициентами $\frac{dy}{dt} = Ay$ величина θ_2 совпадает с нормой решения матричного уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -I. \tag{1.7}$$

На наш взгляд, характеристики θ_1, θ_2 могут быть использованы при численном исследовании асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений вида (1.1).

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

§ 2. Область притяжения нулевого решения

В дальнейшем будем предполагать, что нулевое решение линейной системы (1.2) асимптотически устойчиво. Следовательно, по теореме 1 краевая задача (1.3) с непрерывной матрицей $C(t)$, удовлетворяющей условию (1.4), имеет единственное решение $H(t) > 0$, $t \in [0, T]$. Продолжим эту матрицу периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$ и будем обозначать такое продолжение тем же самым символом $H(t)$, т. е. $H(t+T) \equiv H(t)$, $t \geq 0$. Символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать скалярное произведение в $\mathbb{C}^N$.

Теорема 2. *Пусть $C(t)$ — единичная матрица и вектор-функция $\varphi(t,y)$ из (1.1) удовлетворяет условию*

$$\operatorname{Re}\langle H(t)\varphi(t,y),y\rangle \le q\langle H(t)y,y\rangle^{1+\alpha}, \quad t\ge 0,\ y\in\mathbb{C}^N,\ q\ge 0,\ \alpha>0. \tag{2.1}$$

Тогда нулевое решение квазилинейной системы (1.1) *является асимптотически устойчивым, область $\mathscr{E}=\{y\in\mathbb{C}^N : \langle H(0)y,y\rangle^\alpha<r\}$, где*

$$r=\left(1-\exp\left(-\int\limits_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\right)\left(2q\alpha\int\limits_0^T \exp\left(-\int\limits_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)d\xi\right)^{-1}, \tag{2.2}$$

является областью притяжения нулевого решения, при этом для решения системы (1.1) *с начальными данными $y(0)\in\mathscr{E}$ имеет место оценка*

$$\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \le \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right)\langle H(0)y(0),y(0)\rangle \times\left(1-\frac{\langle H(0)y(0),y(0)\rangle^\alpha}{r}\right)^{-1/\alpha}, \quad t>0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $y(t)$, $[0,\omega)$, — непродолжаемое вправо решение системы (1.1). Тогда функция $\langle H(t)y(t),\,y(t)\rangle$ является непрерывно дифференцируемой и

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle &= \left\langle\left(\frac{d}{dt}H(t)\right)y(t),y(t)\right\rangle \\ &\quad+\left\langle H(t)\frac{d}{dt}y(t),y(t)\right\rangle+\left\langle H(t)y(t),\frac{d}{dt}y(t)\right\rangle \\ &= \left\langle\left(\frac{d}{dt}H(t)\right)y(t),y(t)\right\rangle+\langle H(t)A(t)y(t),y(t)\rangle+\langle H(t)\varphi(t,y(t)),y(t)\rangle \\ &\quad+\langle H(t)y(t),A(t)y(t)\rangle+\langle H(t)y(t),\varphi(t,y(t))\rangle \\ &= \left\langle\left(\frac{d}{dt}H(t)+H(t)A(t)+A^*(t)H(t)\right)y(t),y(t)\right\rangle+2\operatorname{Re}\langle H(t)\varphi(t,y(t)),y(t)\rangle \\ &= -\|y(t)\|^2+2\operatorname{Re}\langle H(t)\varphi(t,y(t)),y(t)\rangle.\end{aligned}$$

В силу (2.1) получаем

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \le -\|y(t)\|^2+2q\langle H(t)y(t),y(t)\rangle^{1+\alpha}.$$

Поскольку

$$\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \le \|H(t)\|\|y(t)\|^2,$$

то

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \le -\frac{1}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle+2q\langle H(t)y(t),y(t)\rangle^{1+\alpha}. \tag{2.4}$$

Воспользуемся теоремой о дифференциальном неравенстве [13, гл. 3]. Для этого рассмотрим задачу Коши для уравнения Бернулли:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=-\frac{1}{\|H(t)\|}v+2qv^{1+\alpha}, \\ v|_{t=0}&=\langle H(0)y(0),y(0)\rangle.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Очевидно, задача имеет единственное решение, и оно определяется следующим образом:

$$\left[1 - 2q\alpha \int_0^t \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right) d\xi\, v^\alpha(0)\right] v^\alpha(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right) v^\alpha(0). \quad (2.6)$$

Рассмотрим функцию, стоящую в (2.6) в квадратных скобах, и обозначим ее через $w(t)$. Покажем, что $w(t) > 0$, если $y(0) \in \mathscr{E}$. Очевидно,

$$\begin{aligned} w(t) = 1 - 2q\alpha \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right) d\xi\, \langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha \\ + 2q\alpha \int_t^\infty \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right) d\xi\, \langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha \\ \geq 1 - 2q\alpha \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right) d\xi\, \langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right) d\xi \\ &= \int_0^T \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right) d\xi + \int_T^{2T} \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right) d\xi + \dots \\ &= J_1 + J_2 + \dots . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Перепишем J_2 в следующем виде:

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_T^{2T} \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right) \exp\left(-\int_T^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right) d\xi \\ &= \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right) \int_T^{2T} \exp\left(-\int_T^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right) d\xi. \end{aligned}$$

Сделав замену $\eta = s - T$, получаем

$$J_2 = \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right) \int_T^{2T} \exp\left(-\int_0^{\xi - T} \frac{\alpha}{\|H(\eta)\|} d\eta\right) d\xi.$$

Тогда после замены $\tau = \xi - T$ имеем

$$J_2 = \exp\left(-\int\limits_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\int\limits_0^T \exp\left(-\int\limits_0^\tau \frac{\alpha}{\|H(\eta)\|}d\eta\right)d\tau$$

$$= \exp\left(-\int\limits_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)J_1.$$

Аналогичным образом перепишем J_3 в следующем виде:

$$J_3 = \int\limits_{2T}^{3T} \exp\left(-\int\limits_0^{2T} \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\exp\left(-\int\limits_{2T}^{\xi} \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\,d\xi.$$

Учитывая, что матрица $H(t)$ является T-периодической, приходим к равенству

$$J_3 = \exp\left(-2\int\limits_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\int\limits_{2T}^{3T} \exp\left(-\int\limits_{2T}^{\xi} \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\,d\xi.$$

Сделав замену $\eta = s - 2T$, получаем

$$J_3 = \left(\exp\left(-\int\limits_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\right)^2\int\limits_{2T}^{3T} \exp\left(-\int\limits_0^{\xi-2T} \frac{\alpha}{\|H(\eta)\|}d\eta\right)\,d\xi.$$

Тогда после замены $\tau = \xi - 2T$ имеем

$$J_3 = \left(\exp\left(-\int\limits_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\right)^2\int\limits_0^T \exp\left(-\int\limits_0^\tau \frac{\alpha}{\|H(\eta)\|}d\eta\right)d\tau$$

$$= \left(\exp\left(-\int\limits_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\right)^2 J_1.$$

Проводя такие же рассуждения, нетрудно показать, что

$$J_k = \left(\exp\left(-\int\limits_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\right)^{k-1} J_1, \quad k = 2, 3, \dots .$$

Следовательно, интеграл (2.8) можно записать в виде

$$J = \left(1 - \exp\left(-\int\limits_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\right)^{-1} J_1,$$

и неравенство (2.7) принимает вид

$$w(t) \geq 1 - 2q\alpha\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^{\alpha}\left(1 - \exp\left(-\int\limits_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\right)^{-1}$$

$$\times \int\limits_0^T \exp\left(-\int\limits_0^{\xi} \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\,d\xi.$$

Тогда если $y(0) \in \mathscr{E} = \{y \in \mathbb{C}^N : \langle H(0)y, y\rangle^\alpha < r\}$, где r задано в (2.2), то $w(t) > 0$.

Отсюда в силу (2.6) решение задачи Коши (2.5) существует на всей полуоси $\{t \geq 0\}$ и

$$v(t) = \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right) v(0)w^{-1/\alpha}(t).$$

Тогда по теореме о дифференциальном неравенстве в силу (2.4) имеет место оценка

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq v(t)$$
$$\leq \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right) \langle H(0)y(0), y(0)\rangle \left(1 - \frac{\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha}{r}\right)^{-1/\alpha}.$$

Поскольку $H(t)$ является положительно определенной матрицей, то решение $y(t)$ ограничено на $[0, \omega)$. Отсюда, очевидно, $\omega = +\infty$ и для решения выполнена оценка (2.3), из которой вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1.1).

Теорема доказана.

Приведем непосредственное обобщение теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $C(t)$ — непрерывная матрица, удовлетворяющая условию (1.4), $c_1(t) > 0$ — минимальное собственное значение $C(t)$ и вектор-функция $\varphi(t, y)$ из (1.1) удовлетворяет условию (2.1). Тогда нулевое решение квазилинейной системы (1.1) асимптотически устойчиво, область*

$$\mathscr{E} = \{y \in \mathbb{C}^N : \langle H(0)y, y\rangle^\alpha < r\},$$

где

$$r = \left(1 - \exp\left(-\int\limits_0^T \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}\,ds\right)\right) \left(2q\alpha \int\limits_0^T \exp\left(-\int\limits_0^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}\,ds\right)\,d\xi\right)^{-1},$$

является областью притяжения нулевого решения, при этом для решения системы (1.1) с начальными данными $y(0) \in \mathscr{E}$ имеет место оценка

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{c_1(s)}{\|H(s)\|}\,ds\right) \langle H(0)y(0), y(0)\rangle$$
$$\times \left(1 - \frac{\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha}{r}\right)^{-1/\alpha}, \quad t > 0.$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 2.

Рассмотрим квазилинейную систему дифференциальных уравнений с параметром

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \mu\varphi(t, y), \quad t \geq 0. \tag{2.9}$$

Теорема 4. *Пусть вектор-функция $\varphi(t,y)$ удовлетворяет неравенству*

$$|\langle H(t)\varphi(t,y),y\rangle| \le q\langle H(t)y,y\rangle^{1+\alpha}, \quad t\ge 0, \quad y\in\mathbb{C}^N, \quad \alpha>0,$$

и

$$m = \left(1-\exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)\right)\left(2\rho q\alpha \right.$$
$$\left. \times \int_0^T \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\,ds\right)d\xi\right)^{-1}, \quad \rho>0.$$

Если $|\mu|<m$, то для решения системы (2.9) с начальными данными

$$y(0)\in\{y\in\mathbb{C}^N : \langle H(0)y,y\rangle^\alpha<\rho\}$$

имеет место оценка

$$\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \le \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right)\langle H(0)y(0),y(0)\rangle$$
$$\times\left(1-\frac{\langle H(0)y(0),y(0)\rangle^\alpha|\mu|}{\rho m}\right)^{-1/\alpha}, \quad t>0.$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 2.

Теорема 5. *Пусть вектор-функция $\varphi(t,y)$ удовлетворяет неравенству*

$$|\langle H(t)\varphi(t,y),y\rangle| \le q\langle H(t)y,y\rangle, \quad t\ge 0, \quad y\in\mathbb{C}^N, \tag{2.10}$$

и

$$m = (2q\max_{t\in[0,T]}\|H(t)\|)^{-1}.$$

Если $|\mu|<m$, то нулевое решение системы (2.9) асимптотически устойчиво, при этом для решения с начальными данными $y(0)\in\mathbb{C}^N$ имеет место оценка

$$\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \le \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds + 2q|\mu|t\right)\langle H(0)y(0),y(0)\rangle, \quad t>0. \tag{2.11}$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение системы (2.9). Тогда функция $\langle H(t)y(t),\, y(t)\rangle$ является непрерывно дифференцируемой и, проводя такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 2, имеем

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle = \left\langle\left(\frac{d}{dt}H(t)+H(t)A(t)+A^*(t)H(t)\right)y(t),y(t)\right\rangle$$
$$+2\operatorname{Re}\mu\langle H(t)\varphi(t,y(t)),y(t)\rangle = -\|y(t)\|^2+2\operatorname{Re}\mu\langle H(t)\varphi(t,y(t)),y(t)\rangle.$$

В силу (2.10) получаем

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \le -\|y(t)\|^2 + 2q|\mu||\langle H(t)y(t),y(t)\rangle|.$$

Поскольку

$$\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \le \|H(t)\|\|y(t)\|^2,$$

то

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq \left(-\frac{1}{\|H(t)\|} + 2q|\mu|\right)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle.$$

Используя неравенство Гронуолла, имеем оценку (2.11). Из этой оценки ввиду условия на параметр μ вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (2.9).

Теорема доказана.

§ 3. Приложения в теории колебаний

В этом параграфе мы рассмотрим один интересный пример из теории параметрических колебаний. Хорошо известно, что вертикальное верхнее положение равновесия маятника постоянной длины с фиксированной точкой подвеса является неустойчивым. В работах [8, 9] было установлено, что верхнее положение маятника будет устойчивым при достаточно большой частоте перемещения точки подвеса. Мы покажем, как этот же факт может быть получен из результатов, установленных в § 2, и статей авторов [7, 12].

Обозначим через θ угол отклонения маятника от вертикального положения. Предполагая, что вертикальное перемещение точки подвеса происходит по закону $x(t) = a\sin\omega t$, уравнение движения можно записать в виде (см., например, [11])

$$\theta'' + \lambda\theta' + \frac{g - a\omega^2\sin\omega t}{l}\sin\theta = 0, \tag{3.1}$$

где λ — коэффициент затухания, l — длина маятника, g — ускорение свободного падения. Наша цель — исследовать, при каких значениях параметров a и ω верхнее положение равновесия $\theta(t) = \pi$ является асимптотически устойчивым.

Введем следующие обозначения:

$$\mu = \frac{a}{l}, \quad k = \frac{\sqrt{gl}}{\omega a}, \quad \sigma = \frac{\lambda k\sqrt{l}}{2\sqrt{g}}.$$

Тогда после замены $\tau = \omega t$ уравнение (3.1) перепишется в виде

$$\tilde{\theta}'' + 2\sigma\mu\tilde{\theta}' + (k^2\mu^2 - \mu\sin\tau)\sin\tilde{\theta} = 0, \tag{3.2}$$

где $\tilde{\theta}(\tau) = \theta(\tau/\omega) = \theta(t)$. Предположим, что колебания точки подвеса происходят с малой амплитудой a и достаточно большой частотой ω. Следовательно, параметр μ является малым. Наша задача свелась к нахождению областей изменения параметров μ и k, при которых верхнее положение равновесия $\tilde{\theta}(\tau) = \pi$ асимптотически устойчиво. После замены $\hat{\theta}(\tau) = \tilde{\theta}(\tau) - \pi$ уравнение (3.2) перепишется в виде

$$\hat{\theta}'' + 2\sigma\mu\hat{\theta}' - (k^2\mu^2 - \mu\sin\tau)\sin\hat{\theta} = 0, \tag{3.3}$$

и задача сводится к исследованию устойчивости нулевого решения этого уравнения.

Введем вектор-функцию

$$y(\tau) = \begin{pmatrix} y_1(\tau) \\ y_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}(\tau) \\ \hat{\theta}'(\tau) \end{pmatrix}.$$

Тогда в силу уравнения (3.3) имеем

$$\frac{dy}{d\tau} = A(\tau)y + \varphi(\tau, y), \tag{3.4}$$

где

$$A(\tau)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ k^2\mu^2-\mu\sin\tau & -2\sigma\mu\end{pmatrix},\quad \varphi(\tau,y)=\begin{pmatrix}0\\ (k^2\mu^2-\mu\sin\tau)(\sin y_1-y_1)\end{pmatrix}.$$

Очевидно, матрица $A(\tau)$ является 2π-периодической, вектор-функция $\varphi(\tau,y)$ удовлетворяет неравенству

$$\|\varphi(\tau,y)\|\le c\|y\|^3,\quad c>0,\quad \tau\ge 0. \tag{3.5}$$

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dy}{d\tau}=A(\tau)y. \tag{3.6}$$

Если нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво, то в силу теоремы 1 краевая задача вида (1.3)

$$\frac{d}{d\tau}H+HA(\tau)+A^*(\tau)H=-C(\tau),\quad 0\le\tau\le 2\pi,$$
$$H(0)=H(2\pi)$$

имеет единственное решение $H(\tau)$. Продолжим его периодическим образом на всю полуось $\{\tau\ge 0\}$, сохранив то же обозначение. Тогда в силу (3.5)

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle H(\tau)\varphi(\tau,y),y\rangle &\le |\langle H(\tau)\varphi(\tau,y),y\rangle|\le \|H(\tau)\|\|\varphi(\tau,y)\|\|y\|\\ &\le c\|H(\tau)\|\|y\|^4\le c\frac{\|H(\tau)\|}{\gamma^2(\tau)}\langle H(\tau)y,y\rangle^2,\quad \tau\ge 0,\end{aligned}$$

где $\gamma(\tau)>0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(\tau)$. Отсюда получаем, что вектор-функция $\varphi(\tau,y)$ удовлетворяет условию (2.1) при

$$q=c\max_{\tau\in[0,2\pi]}\frac{\|H(\tau)\|}{\gamma^2(\tau)},\quad \alpha=1,$$

и справедливо утверждение теоремы 2 (или более общей теоремы 3). Следовательно, если мы покажем, что нулевое решение линейной системы (3.6) асимптотически устойчиво, то нулевое решение квазилинейной системы (3.4) будет также асимптотически устойчивым. Таким образом, исследование асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (3.3) свелось к изучению асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы (3.6).

Будем искать решение системы (3.6) в виде

$$y_1(\tau)=(1+\mu a(\tau))u_1(\tau),\quad y_2(\tau)=\mu b(\tau)u_1(\tau)+\mu c(\tau)u_2(\tau).$$

Покажем, что существуют гладкие 2π-периодические функции $a(\tau)$, $b(\tau)$, $c(\tau)$ такие, что вектор-функция $u(\tau)=\begin{pmatrix}u_1(\tau)\\ u_2(\tau)\end{pmatrix}$ удовлетворяет системе

$$\frac{du}{d\tau}=\mu U(\tau,\mu)u. \tag{3.7}$$

Действительно, сделав замену, с учетом системы (3.6) получаем

$$\frac{du}{d\tau}=\widetilde{U}(\tau,\mu)u,$$

где элементы матрицы $\widetilde{U}(\tau,\mu)$ имеют вид

$$\tilde{u}_{11}(\tau,\mu)=\frac{\mu(b(\tau)-a'(\tau))}{(1+\mu a(\tau))},\quad \tilde{u}_{12}(\tau,\mu)=\frac{\mu c(\tau)}{(1+\mu a(\tau))},$$

$$\tilde{u}_{21}(\tau,\mu)=\frac{\mu}{c(\tau)}\left(k^2-a(\tau)\sin\tau-2\sigma b(\tau)+\mu k^2 a(\tau)-\frac{b(\tau)(b(\tau)-a'(\tau))}{(1+\mu a(\tau))}\right)-\frac{b'(\tau)+\sin\tau}{c(\tau)},$$

$$\tilde{u}_{22}(\tau,\mu)=-\mu\left(\frac{b(\tau)}{(1+\mu a(\tau))}+2\sigma\right)-\frac{c'(\tau)}{c(\tau)}.$$

Чтобы каждый из этих элементов содержал μ в степени не меньше единицы, необходимо потребовать, чтобы $b'(\tau)+\sin\tau=0$ и $c'(\tau)=0$. Для определенности возьмем $b(\tau)=\cos\tau$, $c(\tau)=1$. Мы можем упростить элементы матрицы $\widetilde{U}(\tau,\mu)$, выбрав $a(\tau)$ такую, что $b(\tau)-a'(\tau)=0$. Для определенности возьмем $a(\tau)=\sin\tau$ Тогда получаем систему (3.7), где

$$U(\tau,\mu)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{(1+\mu\sin\tau)}\\ k^2-\sin^2\tau-2\sigma\cos\tau+\mu k^2\sin\tau & -\frac{\cos\tau}{(1+\mu\sin\tau)}-2\sigma\end{pmatrix}.$$

Если мы докажем, что нулевое решение системы (3.7) асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы (3.6) будет также асимптотически устойчиво.

Покажем, что требуемый результат вытекает из утверждений, установленных в работах авторов [7, 12]. Используя представление

$$\frac{1}{1+\mu\sin\tau}=1-\mu\sin\tau+\frac{\mu^2\sin^2\tau}{1+\mu\sin\tau},$$

перепишем $U(\tau)$ в виде

$$U(\tau,\mu)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ k^2-1/2 & -2\sigma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\mu\sin\tau\\ 1/2-\sin^2\tau+k^2\mu\sin\tau-2\sigma\cos\tau & (\mu\sin\tau-1)\cos\tau\end{pmatrix}+\mu^2\begin{pmatrix}0 & \frac{\sin^2\tau}{1+\mu\sin\tau}\\ 0 & -\frac{\cos\tau\sin^2\tau}{1+\mu\sin\tau}\end{pmatrix}=U_1+U_2(\tau,\mu)+\mu^2U_3(\tau,\mu).$$

Если

$$k^2<1/2, \tag{3.8}$$

то спектр матрицы U_1 лежит в левой полуплоскости. Очевидно, матрица $U_2(\tau,\mu)$ является 2π-периодической, и

$$\int\limits_0^{2\pi}U_2(\tau,\mu)\,d\tau=0.$$

В этом случае, как известно (см. различные доказательства этого факта в [2, 7, 14]), при малых μ нулевое решение системы

$$\frac{du}{d\tau}=\mu[U_1+U_2(\tau,\mu)]u \tag{3.9}$$

асимптотически устойчиво. В работе [7] этот результат был доказан с использованием критерия, сформулированного в теореме 1. Пусть матрица $H_1 = H_1^* > 0$ является решением матричного уравнения Ляпунова

$$H_1 U_1 + U_1^* H_1 = -I. \tag{3.10}$$

Тогда матрица [7]

$$H(\tau, \mu) = \frac{1}{\mu} H_1 - H_2(\tau, \mu), \tag{3.11}$$

где

$$H_2(\tau, \mu) = H_1 \int\limits_0^\tau U_2(s, \mu)\, ds + \int\limits_0^\tau U_2^*(s, \mu)\, ds H_1,$$

является решением краевой задачи вида (1.3)

$$\frac{d}{d\tau} H + \mu H[U_1 + U_2(\tau, \mu)] + \mu[U_1 + U_2(\tau, \mu)]^* H = -C(\tau, \mu), \quad 0 \le \tau \le 2\pi,$$
$$H(0) = H(2\pi)$$

при

$$C(\tau, \mu) = I + \mu H_2(\tau, \mu)[U_1 + U_2(\tau, \mu)] + \mu[U_1 + U_2(\tau, \mu)]^* H_2(\tau, \mu).$$

В работе авторов [12] было доказано, что если нулевое решение системы (3.9) асимптотически устойчиво, то при малых μ нулевое решение системы (3.7) будет также асимптотически устойчиво, при этом был указан допустимый разброс на параметр μ. Укажем область изменения параметра μ для системы (3.7), границы которой можно определить с использованием теоремы 2 из [12]. Пусть $k > 0$ такое, что $k^2 < 1/2$. Как отмечалось выше, в этом случае спектр матрицы U_1 лежит в левой полуплоскости, и матричное уравнение Ляпунова (3.10) имеет единственное решение $H_1 = H_1^* > 0$, которое может быть записано в виде

$$H_1 = \frac{1}{8\sigma(1 - 2k^2)} \begin{pmatrix} (3 - 2k^2)(1 - 2k^2) + 16\sigma^2 & 8\sigma \\ 8\sigma & 2(3 - 2k^2) \end{pmatrix}.$$

Пусть $h_1 > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H_1,

$$\beta_1 = \sup_{\substack{\tau \in [0, 2\pi] \\ \mu \in (0,1)}} \|H_2(\tau, \mu)\|, \quad \beta_2 = \sup_{\substack{\tau \in [0, 2\pi] \\ \mu \in (0,1)}} \|H_2(\tau, \mu)(U_1 + U_2(\tau, \mu))\|,$$

$$\mu_1 = \frac{h_1}{\beta_1}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2\beta_2},$$

$\mu_3 < 1$ — положительное число такое, что выполнено неравенство

$$2\mu_3\beta_2 + 2\frac{\mu_3^2}{1 - \mu_3}(\|H_1\| + \mu_3\beta_1) < 1.$$

Тогда при $\mu < m = \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ нулевое решение системы (3.7) асимптотически устойчиво.

Отметим, что для системы (3.7) матрица $H(\tau, \mu)$, задаваемая формулой (3.11), является решением краевой задачи вида (1.3)

$$\frac{d}{d\tau} H + \mu H U(\tau, \mu) + \mu U^*(\tau, \mu) H = -C(\tau, \mu), \quad 0 \le \tau \le 2\pi,$$
$$H(0) = H(2\pi)$$

при

$$C(\tau,\mu) = I + \mu H_2(\tau,\mu)U(\tau,\mu) + \mu U^*(\tau,\mu)H_2(\tau,\mu) - \mu^2 H_1 U_3(\tau,\mu) - \mu^2 U_3^*(\tau,\mu)H_1. \tag{3.12}$$

Нетрудно показать, что для системы (3.6) матрица

$$\widetilde{H}(\tau,\mu) = T^*(\tau,\mu)H(\tau,\mu)T(\tau,\mu),$$

где

$$T(\tau,\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\mu\sin\tau} & 0 \\ -\frac{\cos\tau}{1+\mu\sin\tau} & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix},$$

является решением краевой задачи вида (1.3)

$$\frac{d}{d\tau}\widetilde{H} + \widetilde{H}A(\tau) + A^*(\tau)\widetilde{H} = -\widetilde{C}(\tau,\mu), \quad 0 \le \tau \le 2\pi,$$
$$\widetilde{H}(0) = \widetilde{H}(2\pi),$$

где

$$\widetilde{C}(\tau,\mu) = T^*(\tau,\mu)C(\tau,\mu)T(\tau,\mu),$$

матрица $C(\tau,\mu)$ определяется формулой (3.12). Тогда в силу теоремы 3 мы можем указать область притяжения нулевого решения системы (3.4) и скорость убывания решений системы (3.4) при соответствующих начальных условиях.

Из проведенных рассуждений, возвращаясь к исходным переменным, мы получаем требования на параметры a и ω, при которых положение равновесия $\theta(t) = \pi$ уравнения (3.1) является асимптотически устойчивым. Именно, если $a < ml$ и $\omega > \sqrt{2gl}/a$, то вертикальное верхнее положение маятника будет асимптотически устойчивым. Более того, используя область притяжения нулевого решения системы (3.4), мы можем указать начальный угол отклонения маятника от вертикального верхнего положения и начальную угловую скорость, при которых маятник остается вблизи верхнего положения. Можно также указать скорость затухания колебаний маятника относительно верхнего положения равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
3. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л.: Физматгиз, 1963.
4. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
5. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
6. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1994.
7. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.
8. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строительной механики АН УССР. 1950. № 14. С. 9–34.
9. *Капица Л. П.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21, № 5. С. 588–597.
10. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963.

11. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971.

12. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* On asymptotic stability of solutions to nonlinear systems of differential equations with periodic coefficients // Selcuk J. Appl. Math. 2002. V. 3, N 2. P. 37–48.

13. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

14. *Бодунов Н. А., Котченко Ф. Ф.* О зависимости устойчивости линейных периодических систем от периода // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 2. С. 338–341.

Статья поступила 17 апреля 2003 г.

Демиденко Геннадий Владимирович, *Матвеева Инесса Изотовна*
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru, matveeva@math.nsc.ru