*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6*

*УДК 512.542*

# ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ТЕОРИИ КРАТНО ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ

**Го Вэньбинь**

**Аннотация:** Описаны $\tau$-замкнутые $n$-кратно локальные формации $\mathfrak{F}$, у которых решетка всех $\tau$-замкнутых $n$-кратно локальных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$, является булевой.

**Ключевые слова:** группа, формация, кратно локальная формация, решетка формаций.

Все рассматриваемые в работе классы групп состоят из конечных групп. Кроме стандартной терминологии (см. [1–3]), нам потребуется ряд понятий, связанных с алгеброй формаций [4].

Формации, принадлежащие совокупности формаций $\Theta$, называются $\Theta$-*формациями.* В дальнейшем $\Theta$ — полная решетка формаций [4], т. е. пересечение любой совокупности $\Theta$-формаций снова является $\Theta$-формацией и в $\Theta$ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой другой $\Theta$-формации $\mathfrak{M}$.

Напомним, что функция $f$, определенная на множестве простых чисел $\mathbb{P}$ со значениями в множестве всех формаций, называется *формационной функцией* [3] или *локальным экраном* [1]. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех простых делителей $p$ порядка группы $G$, то формационную функцию $f$ называют *экраном формации* $\mathfrak{F}$. При этом применяется запись $\mathfrak{F} = LF(f)$. Формация, обладающая хотя бы одним экраном, называется *локальной.*

При обозрении экранов большинства наиболее известных конкретных формаций легко обнаруживается, что у таких формаций имеется экран, все непустые значения которого сами являются локальными формациями. Это важное обстоятельство привело к следующей естественной конструкции [5]: всякая формация групп считается 0-*кратно локальной*, а при $n > 0$ формация $\mathfrak{F}$ называется $n$-*кратно локальной,* если $\mathfrak{F} = LF(f)$, где всякое непустое значение экрана $f$ является $(n-1)$-кратно локальной формацией. Формация называется *тотально локальной*, если она $n$-кратно локальна при всех натуральных $n$. Совокупность всех тотально локальных формаций является полной решеткой формаций, и такая решетка обозначается через $l_\infty$.

В различных приложениях теории классов групп часто используют локальные формации, замкнутые относительно тех или иных систем подгрупп. По всей видимости, следующее, введенное в монографии [4], определение охватывает все рассматриваемые при этом системы подгрупп.

Пусть группе $G$ сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Будем говорить, следуя [4], что $\tau$ — *подгрупповой функтор,* если выполняются условия:

Supported by NNSF of China (#10171086).

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы $G$;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \mapsto B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеют место включения $H^{\varphi} \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *$\tau$-замкнутой* [4], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой ее группы $G$. Нетрудно показать, что совокупность всех $\tau$-замкнутых $n$-кратно локальных формаций (при фиксированном $n \geq 0$) является полной решеткой формаций. Такая решетка обозначается через $l_n^{\tau}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — некоторые $\theta$-формации, причем формация $\mathfrak{H}$ хорошо изучена. Тогда у нас имеется некоторая информация и относительно формации $\mathfrak{F}$, поскольку в ней содержится часть формации $\mathfrak{H}$, а именно $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$. Так, например, при изучении локальной формации $\mathfrak{F}$ часто используется ее нильпотентная подформация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$. Однако в общем случае без дополнительных ограничений на «хорошо известную часть» $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ формации $\mathfrak{F}$ что-либо сказать о самой формации $\mathfrak{F}$ трудно. В качестве одного из возможных ограничений на $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ можно, например, рассматривать ограничения, накладываемые на решетку $\theta$-формаций $\mathfrak{F}/_{\theta}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$, заключенных между $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ (т. е. $\theta$-формация $\mathfrak{M}$ принадлежит $\mathfrak{F}/_{\theta}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$). В частности, это приводит к следующим задачам, которые поставлены [4, с. 192] и решение которых является значительным расширением результатов из [4, § 4.3].

**Вопрос 1.** *Описать такие разрешимые тотально локальные формации $\mathfrak{F}$, у которых решетка $\mathfrak{F}/_{\infty}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ всех тотально локальных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$, булева (или является решеткой с дополнениями).*

**Вопрос 2.** *Описать такие $\tau$-замкнутые $n$-кратно локальные формации $\mathfrak{F}$, у которых решетка $\mathfrak{F}/_n^{\tau}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ всех $\tau$-замкнутых $n$-кратно локальных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$, булева (или является решеткой с дополнениями).*

Первая из этих двух задач решена нами в работе [6]. Здесь мы дадим ответ на второй вопрос.

Отметим, что в работах [7–9] исследовались локальные формации, с дополняемыми локальными подформациями.

Напомним, что через $l_n^{\tau}\operatorname{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех $\tau$-замкнутых $n$-кратно локальных формаций, которые содержат совокупность групп $\mathfrak{X}$. Пусть $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — произвольный набор $\tau$-замкнутых $n$-кратно локальных формаций. Тогда формация

$$l_n^{\tau}\operatorname{form}\Big(\bigcup_{i \in I}\mathfrak{H}_i\Big)$$

обозначается через $\vee_n^{\tau}(\mathfrak{H}_i \mid i \in I)$. В частности, символом $\mathfrak{F}_1 \vee_n^{\tau} \mathfrak{F}_2$ обозначается формация $l_n^{\tau}\operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$, а символом $\mathfrak{F}_1 \vee_n^{\tau} \cdots \vee_n^{\tau} \mathfrak{F}_t$ — формация $l_n^{\tau}\operatorname{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{F}_t)$.

**Лемма 1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — однопорожденная $\tau$-замкнутая $n$-кратно локальная формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество разрешимых $\tau$-замкнутых $n$-кратно локальных подформаций.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = l_n^{\tau}\operatorname{form} G$ для некоторой группы $G \in \mathfrak{F}$. Индукцией по $n$ покажем, что в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество разрешимых $\tau$-замкнутых $n$-кратно локальных подформаций.

Пусть $n = 0$, т. е. $\mathfrak{F} = \tau\operatorname{form} G$. В силу леммы 1.2.22 [4] $\mathfrak{F} = \mathrm{HR}_0\mathrm{S}_{\bar{\tau}}(G)$. Поэтому если $m = |G|$, то по лемме 3.1.5 [4] экспоненты, порядки главных факторов и ступени нильпотентных секций всех групп из $\mathfrak{F}$ не превосходят число $m$.

Значит, согласно теореме 3.47 [2] в $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{S}$ имеется лишь конечное множество формационно критических групп, поэтому (в силу леммы 1.1.3 [4]) в $\mathfrak{F}$ есть лишь конечное множество разрешимых подформаций.

Пусть $n > 0$, и допустим, что при $n-1$ лемма верна. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная разрешимая $\tau$-замкнутая $n$-кратно локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, и пусть $m$ и $f$ — минимальные $l^{\tau}_{n-1}$-значные экраны формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Тогда по следствию 8.4 [2] $m \leq f$. А по теореме 8.3 [2]

$$f(p) = \begin{cases} l^{\tau}_{n-1}\operatorname{form}(G/F_p(G)), & \text{если } p \in \pi(G), \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P}\setminus\pi(G). \end{cases}$$

Согласно нашему предположению в $f(p) = l^{\tau}_{n-1}\operatorname{form}(G/F_p(G))$ имеется лишь конечное множество различных разрешимых $\tau$-замкнутых $(n-1)$-кратно локальных подформаций ($m(p)$ — одна из них). Так как при этом $\pi(G)$ — конечное множество, существует лишь конечное множество разрешимых $\tau$-замкнутых $n$-кратно локальных формаций $\mathfrak{M}$ с условием $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ — $\tau$-замкнутая $n$-кратно локальная формация. Тогда символом $L^{\tau}_n(\mathfrak{F})$ обозначается решетка всех $\tau$-замкнутых $n$-кратно локальных формаций, входящих в $\mathfrak{F}$.

**Лемма 2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — однопорожденная $\tau$-замкнутая $n$-кратно локальная формация. Тогда множество всех тех формаций, которые являются либо атомами решетки $L^{\tau}_n(\mathfrak{F})$, либо $\mathfrak{N}^{\tau}_n$-критическими подформациями в $\mathfrak{F}$, конечно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = l^{\tau}_n\operatorname{form} G$. Пусть $\mathfrak{M}$ — атом решетки $L^{\tau}_n(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{M} = l^{\tau}_n\operatorname{form} A$ для некоторой простой группы $A$. Если $A$ — неабелева группа, то согласно лемме 2.1.6 [4] $A\in\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — $\tau$-замкнутая полуформация, порожденная группой $G$. Но ввиду леммы 1.2.21 [4] $\mathfrak{H} = \mathrm{HS}_{\overline{\tau}}(G)$. Это означает, что в решетке $L^{\tau}_n(\mathfrak{F})$ имеется лишь конечное число неразрешимых атомов.

По лемме 1 в решетке $L^{\tau}_n(\mathfrak{F})$ есть лишь конечное число разрешимых атомов.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — $\mathfrak{N}^{\tau}_n$-критическая подформация в $\mathfrak{F}$. Тогда согласно следствию 2.1.13 [4] $\mathfrak{M} = l^{\tau}_n\operatorname{form} A$, где $A$ — $\tau$-минимальная ненильпотентная группа, и выполняется одно из следующих условий:

1) $A$ — группа Шмидта;

2) $n = 1$, $A$ — простая неабелева группа и $\tau(A)\subseteq\{A, 1\}$.

Отсюда и из приведенных выше рассуждений вытекает, что в $\mathfrak{F}$ существует лишь конечное множество неразрешимых $\mathfrak{N}^{\tau}_n$-критических подформаций.

Если же $A$ — группа Шмидта, то по теореме 26.11 [1] $A$ — разрешимая группа. Но согласно лемме 1 в любой однопорожденной $\tau$-замкнутой $n$-кратно локальной формации имеется лишь конечное множество разрешимых $\tau$-замкнутых $n$-кратно локальных подформаций. Лемма доказана.

Напомним, что символом $\tau\operatorname{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех $\tau$-замкнутых формаций, содержащих совокупность групп $\mathfrak{X}$. Группа $G\notin\mathfrak{F}$ называется [4] *$\tau$-минимальной не $\mathfrak{F}$-группой*, если все собственные $\tau$-подгруппы из $G$ принадлежат $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *$\tau$-неприводимой* [4], если $\mathfrak{F}\neq\tau\operatorname{form}(\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{X}_i)$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i\in I\}$ — набор всех собственных $\tau$-замкнутых подформаций формации $\mathfrak{F}$.

**Лемма 3.** *$\mathfrak{F}$ — минимальная $\tau$-замкнутая ненильпотентная формация тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \tau\operatorname{form} G$, где $G$ — монолитическая $\tau$-минимальная ненильпотентная группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}}\not\subseteq\Phi(G)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $G$ — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{N}$. Тогда $G$ — монолитическая $\tau$-минимальная ненильпотентная группа, и если $R$ — ее монолит, то $R = G^{\mathfrak{N}} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Ясно также, что $\mathfrak{F} = \tau \operatorname{form} G$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \tau \operatorname{form} G$, где $G$ — монолитическая $\tau$-минимальная ненильпотентная группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}} \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда по лемме 2.1.5 [4] формация $\mathfrak{F}$ $\tau$-неприводима, и если $\mathfrak{M}$ — ее максимальная $\tau$-замкнутая подформация, то

$$\mathfrak{M} = \tau \operatorname{form}(\{G/R\} \cup \mathfrak{X}),$$

где $\mathfrak{X}$ — множество всех собственных $\tau$-подгрупп из $G$. Но $G$ — $\tau$-минимальная ненильпотентная группа. Значит, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. При этом $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ — минимальная $\tau$-замкнутая ненильпотентная формация.

**Лемма 4.** *Пусть $\mathfrak{M}$ — нильпотентная $\tau$-замкнутая $n$-кратно локальная формация, $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — некоторая совокупность $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических формаций. Тогда если $\mathfrak{H}$ — $\mathfrak{N}_n^\tau$-критическая формация и*

$$\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_n^\tau \left(\vee_n^\tau (\mathfrak{H}_i \mid i \in I)\right),$$

*то $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i$ для некоторого $i \in I$.*

Доказательство. Пусть $n \geq 1$. Тогда согласно следствию 2.1.13 [4] $\mathfrak{H} = l_n^\tau \operatorname{form} G$, где $G$ — $\tau$-минимальная ненильпотентная группа, и выполняется одно из следующих условий: 1) $G$ — группа Шмидта; 2) $n = 1$ и $G$ — простая неабелева группа с $\tau(G) \subseteq \{G, 1\}$.

Пусть $f$ и $m$ — минимальные $l_{n-1}^\tau$-значные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно, $h_i$ — минимальный $l_{n-1}^\tau$-значный экран формации $\mathfrak{H}_i$. Тогда по лемме 4.1.2 [4]

$$f(p) = \begin{cases} l_{n-1}^\tau \operatorname{form}(m(p) \cup (\bigcup\limits_{i \in I} h_i(p))), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{F}), \\ \varnothing, & \text{если } p \notin \pi(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Пусть $h$ — минимальный $l_{n-1}^\tau$-значный экран формации $\mathfrak{H}$. Согласно следствию 8.4 [2] $h \leq f$. Прежде предположим, что $G$ — группа Шмидта. Тогда в силу теоремы 26.1 [1] $G$ — разрешимая бипримарная группа, и если в $G$ нормальна силовская $p$-подгруппа и $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, то $G/F_p(G) \cong Z_q$, где $Z_q$ — группа порядка $q$. Значит, по теореме 8.3 [2]

$$h(r) = \begin{cases} l_{n-1}^\tau \operatorname{form} Z_q, & \text{если } r = p, \\ (1), & \text{если r=q}, \\ \varnothing, & \text{если } r = \mathbb{P} \setminus \{p, q\}. \end{cases}$$

Так как $Z_q \in h(p) \subseteq f(p)$, из приведенного выше описания экрана $f$ следует, что найдется такое $i \in I$, что $(1) \subset h_i(p)$. Пусть $n = 1$. Тогда ввиду леммы 5.2.15 [4] и теоремы 8.3 [2] $f(p) = \operatorname{form} \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторый набор простых групп. Причем если $A \in \mathfrak{X}$ и $A$ — неабелева группа, то найдется такое $i \in I$, что $\mathfrak{H}_i = l_n^\tau \operatorname{form} A$ и $p$ делит порядок $|A|$ группы $A$. Если же $A$ — абелева группа простого порядка $r$, то найдется такое $j \in I$, что $\mathfrak{H}_j = l_n^\tau \operatorname{form} B$, где $B$ — группа Шмидта такая, в которой $\pi(B) = \{p, r\}$ и силовская $p$-подгруппа нормальна. Так как при этом $Z_q \in \operatorname{form} \mathfrak{X}$, ввиду теоремы 1.2.25 [4] группа $Z_q$ совпадает с одной из абелевых групп множества $\mathfrak{X}$. Значит, найдется такое $i \in I$, что $\mathfrak{H}_i = l_n^\tau \operatorname{form} B$, где $B$ — группа Шмидта с $\pi(B) = \{p, q\}$, в которой силовская $p$-подгруппа нормальна. Но тогда ввиду теоремы 8.3 [2] $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i$.

Пусть $n > 1$. Тогда по следствию 2.1.13 [4] и по теореме 8.3 [2] $f(p) = \mathfrak{N}_\pi$, где $r \in \pi$ тогда и только тогда, когда в $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ найдется такая формация $\mathfrak{H} = l_n^\tau \operatorname{form} A$, где $A$ — группа Шмидта с $\pi(A) = \{p, r\}$, в которой силовская $p$-подгруппа нормальна. Но $Z_q \in f(p)$. Значит, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i$ для некоторого $i \in I$.

Если же $n = 1$ и $G$ — простая неабелева группа такая, что $\tau(G) \subseteq \{1, G\}$, то для всякого $p \in \pi(G)$ имеет место $h(p) = \tau \operatorname{form} G \subseteq f(p)$. Следовательно, среди формаций $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ найдется такая $\mathfrak{H}_i$, что $\mathfrak{H}_i = l_1^\tau \operatorname{form} G = \mathfrak{H}$.

Пусть теперь $n = 0$. Тогда по лемме 3

$$\mathfrak{H} = l_0^\tau \operatorname{form} A = \tau \operatorname{form} A, \quad \mathfrak{H}_i = \tau \operatorname{form} A_i,$$

где $A$, $A_i$ — монолитические $\tau$-минимальные ненильпотентные группы, и если $R$ — монолит группы $A$ и $R_i$ — монолит группы $A_i$, то $A^{\mathfrak{N}} = R \not\subseteq \Phi(A)$ и $A_i^{\mathfrak{N}} = R_i \not\subseteq \Phi(A_i)$.

Пусть $\mathfrak{X}_i$ — набор всех собственных $\tau$-подгрупп группы $A_i$. Тогда по лемме 1.2.22 [4]

$$\mathfrak{H}_i = \tau \operatorname{form} A_i = \operatorname{form}(\mathfrak{X}_i \cup \{A_i\}).$$

Значит, поскольку по теореме 2.4 [1] каждая нильпотентная формация наследственна, то

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee^\tau (\vee^\tau(\mathfrak{H}_i \mid i \in I)) = \tau \operatorname{form}\Big(\mathfrak{M} \cup \Big(\bigcup_{i \in I}(\{A_i\} \cup \mathfrak{X}_i\Big)\Big)$$
$$= \operatorname{form}\Big(\mathfrak{X} \cup \Big(\bigcup_{i \in I}(\{A_i\} \cup \mathfrak{X}_i)\Big)\Big),$$

где $\mathfrak{X}$ — набор всех подгрупп всех групп из $\mathfrak{M}$. Понятно, что у каждой группы $T$ из $\mathfrak{X} \cup \big(\bigcup_{i \in I}(\{A_i\} \cup \mathfrak{X}_i)\big)$ $\mathfrak{N}$-корадикал $T^{\mathfrak{N}}$ не имеет фраттиниевых $T$-главных факторов. Следовательно, по теореме 1.2.29 [4] ненильпотентная группа $A$ является гомоморфным образом одной из групп множества

$$\mathfrak{X} \cup \Big(\bigcup_{i \in I}(\{A_i\} \cup \mathfrak{X}_i)\Big).$$

Но каждая группа из $\mathfrak{X} \cup \big(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_i\big)$ нильпотентна. Следовательно, найдется такое $i \in I$, что $A$ — гомоморфный образ группы $A_i$. Но группа $A_i$ монолитична и ее монолит $R_i$ равен $A_i^{\mathfrak{N}}$. Следовательно, $A \cong A_i$, и поэтому $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i$. Лемма доказана.

В дальнейшем для произвольной формации $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}_0$ мы обозначаем пересечение $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$.

**Лемма 5.** *Пусть $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ — $\tau$-замкнутые $n$-кратно локальные формации. Если $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}_1$ в решетке $\mathfrak{F}/_n^\tau \mathfrak{F}_0$, то $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$ — дополнение к $\mathfrak{M}_1$ в решетке $\mathfrak{M}/_n^\tau \mathfrak{M}_0$.*

Доказательство. По условию

$$\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F}_0 \text{ и } \mathfrak{M}_1 \vee_n^\tau \mathfrak{H} = \mathfrak{F}.$$

Значит, ввиду теоремы 4.2.8 [4]

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \cap \big(\mathfrak{M}_1 \vee_n^\tau \mathfrak{H}\big) = \mathfrak{M}_1 \vee_n^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}).$$

Понятно также, что $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}_0$. Следовательно, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{M}/_n^\tau \mathfrak{M}_0$.

**Лемма 6.** *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ — $\tau$-замкнутые $n$-кратно локальные формации и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда если $\mathfrak{F}/_n^\tau \mathfrak{F}_0$ — решетка с дополнениями, то $\mathfrak{M}/_n^\tau \mathfrak{M}_0$ также является решеткой с дополнениями.*

Доказательство. Ввиду следствия 4.2.8 [4] имеет место решеточный изоморфизм

$$\big(\mathfrak{F}_0 \vee_n^\tau \mathfrak{M}\big)/_n^\tau \mathfrak{F}_0 \simeq \mathfrak{M}/_n^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_0) = \mathfrak{M}/_n^\tau (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{M}/_n^\tau \mathfrak{M}_0.$$

Но $\big(\mathfrak{F}_0 \vee_n^\tau \mathfrak{M}\big)/_n^\tau \mathfrak{F}_0$ — подрешетка решетки $\mathfrak{F}/_n^\tau \mathfrak{F}_0$. Значит, ввиду леммы 5 $\big(\mathfrak{F}_0 \vee_n^\tau \mathfrak{M}\big)/\mathfrak{F}_0$ — решетка с дополнениями. Следовательно, $\mathfrak{M}/_n^\tau \mathfrak{M}_0$ — решетка с дополнениями. Лемма доказана.

**Теорема.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — ненильпотентная $\tau$-замкнутая $n$-кратно локальная формация. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathfrak{F}/_n^\tau \mathfrak{F}_0$ — решетка с дополнениями;*

2) *$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \vee_n^\tau \big(\vee_n^\tau (\mathfrak{H}_i \mid i \in I)\big)$, где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических подформаций в $\mathfrak{F}$;*

3) *$\mathfrak{F}/_n^\tau \mathfrak{F}_0$ — булева решетка.*

Доказательство. Пусть имеет место условие 1 и $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических подформаций в $\mathfrak{F}$. Предположим сначала, что $\mathfrak{F}$ — однопорожденная $\tau$-замкнутая $n$-кратно локальная формация. Тогда согласно лемме 2 число $t$ всех $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических формаций, содержащихся в $\mathfrak{F}$, конечно. Индукцией по $t$ покажем, что относительно $\mathfrak{F}$ выполняется условие 2.

Пусть $\mathfrak{H}_i$ — произвольная $\mathfrak{N}_n^\tau$-критическая подформация в $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}_0 \vee_n^\tau \mathfrak{H}_i$. В силу условия 1 в $\mathfrak{F}$ найдется такая $\tau$-замкнутая $n$-кратно локальная формация $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{M} \vee_n^\tau \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$. Тогда согласно лемме 6 по индукции

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \vee_n^\tau \big(\vee_n^\tau (\mathfrak{F}_j \mid j \in J)\big),$$

где $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ — набор всех $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических подформаций формации $\mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{F}_0$, ввиду леммы 4

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = \big(\mathfrak{F}_0 \vee_n^\tau \mathfrak{H}_i\big) \vee_n^\tau \big(\mathfrak{F}_0 \vee_n^\tau \big(\vee_n^\tau (\mathfrak{F}_j \mid j \in J)\big)\big) \\ = \big(\mathfrak{F}_0 \vee_n^\tau \mathfrak{H}_i\big) \vee_n^\tau \big(\vee_n^\tau (\mathfrak{F}_j \mid j \in J)\big)\big) = \mathfrak{F}_0 \vee_n^\tau \big(\vee_n^\tau (\mathfrak{H}_i \mid i \in I)\big),\end{aligned}$$

где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических подформаций в $\mathfrak{F}$.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $G$ — произвольная ненильпотентная группа из $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M} = l_n^\tau \operatorname{form} G$. Согласно лемме 6 условие 1 переносится на решетку $\mathfrak{M}/_n^\tau \mathfrak{M}_0$. Ввиду доказанного в предыдущем абзаце

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \vee_n^\tau \big(\vee_n^\tau (\mathfrak{M}_j \mid j \in J)\big),$$

где $\{\mathfrak{M}_j \mid j \in J\}$ — набор всех $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических подформаций в $\mathfrak{M}$. Итак,

$$\mathfrak{F} = l_n^\tau \operatorname{form}(G \mid G \in \mathfrak{F}) = \mathfrak{F}_0 \vee_n^\tau \big(\vee_n^\tau (\mathfrak{H}_i \mid i \in I)\big),$$

где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических формаций, содержащихся в $\mathfrak{F}$.

Пусть теперь выполняется условие 2. Прежде всего покажем, что $\mathfrak{F}/_n^\tau \mathfrak{F}_0$ — решетка с дополнениями. Пусть ненильпотентная формация $\mathfrak{M}$ принадлежит решетке $\mathfrak{F}/_n^\tau \mathfrak{F}_0$, и пусть $\mathfrak{X}_1$ — множество всех $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических подформаций формации $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}_2 = \{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\} \setminus \mathfrak{X}_1$, и пусть

$$\mathfrak{H} = \Big(l_n^\tau \operatorname{form}\Big(\bigcup_{\mathfrak{H}_i \in \mathfrak{X}_2} \mathfrak{H}_i\Big)\Big) \vee_n^\tau \mathfrak{F}_0.$$

Тогда $\mathfrak{M} \vee_n^\tau \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{F}_0$. Тогда согласно лемме 2.1.11 [4] в $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ имеется по крайней мере одна $\mathfrak{N}_n^\tau$-критическая подформация $\mathfrak{H}^*$. Пусть $\mathfrak{H}^* \in \mathfrak{X}_1$. Тогда $\mathfrak{H}^* \notin \mathfrak{X}_2$. Но согласно лемме 4 в формации

$$\mathfrak{F}_0 \vee_n^\tau \Big(l_n^\tau \operatorname{form}\Big(\bigcup_{\mathfrak{H}_i \in \mathfrak{X}_2} \mathfrak{H}_i\Big)\Big)$$

нет $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических подформаций, не принадлежащих $\mathfrak{X}_2$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{H}$ — дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $\mathfrak{F}/_n^\tau \mathfrak{F}_0$.

Установим теперь, что решетка $\mathfrak{F}/_n^\tau \mathfrak{F}_0$ булева. Пусть $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_3$ — произвольные элементы решетки $\mathfrak{F}/_n^\tau \mathfrak{F}_0$. Покажем, что

$$\mathfrak{M}_1 \cap \big(\mathfrak{M}_2 \vee_n^\tau \mathfrak{M}_3\big) = \big(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2\big) \vee_n^\tau \big(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3\big). \tag{1}$$

Поскольку $\mathfrak{F}/_n^\tau \mathfrak{F}_0$ — решетка с дополнениями, ввиду леммы 6 у каждой формации $\mathfrak{M}$, принадлежащей решетке $\mathfrak{F}/_n^\tau \mathfrak{F}_0$, решетка $\mathfrak{M}/_n^\tau \mathfrak{M}_0$ является решеткой с дополнениями. Это означает, что

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \vee_n^\tau \big(\vee_n^\tau(\mathfrak{H}_i \mid i \in I)\big),$$

где $\{\mathfrak{H}_i \mid i \in I\}$ — набор всех $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических подформаций в $\mathfrak{M}$. Таким образом, для доказательства включения

$$\mathfrak{M}_1 \cap \big(\mathfrak{M}_2 \vee_n^\tau \mathfrak{M}_3\big) \subseteq (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2) \vee_n^\tau (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3) \tag{2}$$

нам достаточно лишь показать, что любая $\mathfrak{N}_n^\tau$-критическая подформация $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cap \big(\mathfrak{M}_2 \vee_n^\tau \mathfrak{M}_3\big)$ принадлежит формации

$$(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2) \vee_n^\tau (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3).$$

Пусть $\mathfrak{X}_i$ — набор всех $\mathfrak{N}_n^\tau$-критических подформаций формации $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, 3$. Тогда $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1$ и

$$\mathfrak{H} \subseteq (\Big((\mathfrak{M}_2)_0 \vee_n^\tau \Big(l_n^\tau \operatorname{form}\Big(\bigcup_{\mathfrak{H}_i \in \mathfrak{X}_2} \mathfrak{H}_i\Big)\Big)\Big) \vee_n^\tau \Big((\mathfrak{M}_3)_0 \vee_n^\tau \Big(l_n^\tau \operatorname{form}\Big(\bigcup_{\mathfrak{H}_i \in \mathfrak{X}_3} \mathfrak{H}_i\Big)\Big)\Big)$$

$$= \big(\mathfrak{M}_2 \vee_n^\tau \mathfrak{M}_3\big)_0 \vee_n^\tau \Big(l_n^\tau \operatorname{form}\Big(\bigcup_{\mathfrak{H}_i \in \mathfrak{X}_2 \cup \mathfrak{X}_3} \mathfrak{H}_i\Big)\Big).$$

Применяя лемму 4, находим, что

$$\mathfrak{H} \in \mathfrak{X}_2 \cup \mathfrak{X}_3.$$

Значит, либо $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, либо $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_3$. Этим доказано включение (2). Обратное включение очевидно. Итак, верно равенство (1). Теорема доказана.

### *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
2. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
3. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
4. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
5. *Скиба А. Н.* Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. 1987. № 3. С. 21–31.
6. *Guo W., Shum K. P.* On totally local formations of groups // Comm. Algebra. 2002. V. 30, N 5. P. 2117–2131.
7. *Wenbin Guo.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press — Kluwer Acad. Publ., 2000.

**8.** *Скиба А. Н.* О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями // Изв. вузов. Сер. мат. 1994. Т. 10. С. 75–80.
**9.** *Guo Wenbin.* Local formations in which every subformation of type $\mathfrak{N}_p$ has a complement // Chinese Sci. Bull. 1997. V. 42, N 5. P. 364–368.

*Статья поступила 14 ноября 2003 г.*

*Го Веньбинь (Guo Wenbin)*
*Математический факультет, Сюйчжоуский Педагогический университет,*
*221116 Сюйчжоу, Н. Р. Китай*
*Department of Mathematics,*
*Xuzhou Normal University,*
*Xuzhou 221116, P. R. China*

*Department of Mathematics,*
*University of Science and Technology of China,*
*Hefei 230026, P. R. China*
wbguo@pub.xz.jsinfo.net