Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2004. Том 45, № 6

УДК 517.962.22

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ЛИНЕЙНЫМИ ЧЛЕНАМИ

К. Айдын, А. Я. Булгаков, Г. В. Демиденко

Аннотация: Рассматриваются квазилинейные системы разностных уравнений с периодическими коэффициентами в линейных членах. Получены оценки области притяжения нулевого решения и установлены неравенства для норм решений. Результаты сформулированы в терминах матричных рядов типа Ляпунова.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, область притяжения, дискретное уравнение Ляпунова.

§ 1. Введение

В работе мы рассматриваем проблему устойчивости нулевого решения следующей нелинейной системы разностных уравнений:

$$x(n+1) = A(n)x(n) + \varphi(n, x(n)), \quad n \geq 0, \tag{1.1}$$

где $A(n)$ — периодическая $N \times N$-матрица с периодом T, т. е.

$$A(n+T) = A(n), \quad n \geq 0,$$

и $\varphi(n, \cdot) : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ — непрерывная вектор-функция в линейном пространстве $\mathbb{C}^N$ такая, что $\varphi(n, x) = o(\|x\|)$ при $\|x\| \to 0$.

Проблема устойчивости решений является одной из основных в теории разностных уравнений. В настоящее время число работ в этой области постоянно растет (см., например, [1–5] и библиографию в них).

Напомним, что нулевое решение системы (1.1) называется *устойчивым,* если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что из условия $\|x(0)\| \leq \delta_\varepsilon$ следует $\|x(n)\| \leq \varepsilon$ для любого $n > 0$. Нулевое решение (1.1) называется *асимптотически устойчивым,* если оно устойчиво и

$$\|x(n)\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{1.2}$$

при достаточно малых $\|x(0)\|$.

В дальнейшем будем предполагать, что нулевое решение линейной системы разностных уравнений с периодическими коэффициентами

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \geq 0, \tag{1.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00458) и Турецкого Комитета по науке и технике (TUBITAK).

асимптотически устойчиво. По критерию Ляпунова нулевое решение (1.3) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда ряд

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} (X^*(T))^k (X(T))^k$$

сходится (см., например, [1]). Заметим, что сумма матричного ряда F есть решение дискретного матричного уравнения Ляпунова

$$X^*(T) F X(T) - F = -I.$$

Согласно спектральному критерию асимптотической устойчивости нулевое решение (1.3) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда спектр матрицы монодромии системы (1.3)

$$X(T) = A(T-1) \dots A(1)A(0) \tag{1.4}$$

принадлежит единичному кругу $\{|\lambda| < 1\}$.

В статье [6] мы указали некоторые числовые характеристики асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.3) без использования спектра матрицы монодромии (1.4). Используя эти характеристики, можно получить различные оценки решений $\{x(n)\}$ системы (1.3). В частности, мы рассмотрели следующие характеристики асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.3):

$$M(A,T) = \max\{\|H(0)\|, \|H(1)\|, \dots, \|H(T-1)\|\}, \tag{1.5}$$

где

$$H(l) = \sum_{k=l}^{\infty} \left(\prod_{j=l}^{k-1} A(j) \right)^* \left(\prod_{j=l}^{k-1} A(j) \right), \quad l \geq 0, \tag{1.6}$$

и по определению

$$\prod_{j=l}^{k-1} A(j) = \begin{cases} A(k-1) \dots A(l) & \text{при } k > l, \\ I & \text{при } k = l. \end{cases}$$

Далее мы рассматриваем спектральные нормы матриц.

В работе [6] установлено следующее утверждение.

Теорема. *Для решения $\{x(n)\}$ системы (1.3) справедлива оценка*

$$\|x(n)\|^2 \leq \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\|H(j)\|} \right) \|H(0)\| \|x(0)\|^2, \quad n \geq 1, \ x(0) \in \mathbb{C}^N.$$

Из этой теоремы вытекает следующая оценка для решения системы (1.3):

$$\|x(n)\| \leq \left(1 - \frac{1}{M(A,T)} \right)^{n/2} \|H(0)\|^{1/2} \|x(0)\|, \quad n \geq 0, \tag{1.7}$$

где $M(A,T)$ дается формулой (1.5). В случае постоянных коэффициентов $A(n) \equiv A$, $n \geq 0$, эта оценка совпадает с хорошо известной (см., например, [5, 7]). Учитывая вид решения (1.3)

$$x(n) = \left(\prod_{j=0}^{n-1} A(j) \right) x(0), \quad n \geq 0,$$

получаем

$$\left\|\prod_{j=0}^{n-1} A(j)\right\| \le \left(1 - \frac{1}{M(A,T)}\right)^{n/2} (M(A,T))^{1/2}.$$

По аналогии имеем неравенство

$$\left\|\prod_{j=l+1}^{n-1} A(j)\right\| \le \left(1 - \frac{1}{M(A,T)}\right)^{(n-l-1)/2} (M(A,T))^{1/2}, \quad l \le n-1. \tag{1.8}$$

Заметим, что последовательность матриц $\{H(l)\}$ периодическая с периодом T и удовлетворяет уравнениям

$$A^*(l)H(l+1)A(l) - H(l) = -I, \quad l \ge 0. \tag{1.9}$$

Матрицы $H(l)$ являются эрмитовыми, и $\|H(l)\| \ge 1$ (см. [6]).

В случае постоянных коэффициентов $A(n) \equiv A$, $n \ge 0$, последовательность матриц $\{H(l)\}$ стационарная:

$$H(l) = H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k, \quad l \ge 0,$$

и матрица H является решением дискретного матричного уравнения Ляпунова

$$A^*HA - H = -I.$$

Хорошо известно, что если нулевое решение (1.3) асимптотически устойчиво, то нулевое решение (1.1) также асимптотически устойчиво. В силу (1.7) предел (1.2) имеет место для произвольных начальных условий $x(0) \in \mathbb{C}^N$. Но нулевое решение системы (1.1) не является равномерно асимптотически устойчивым. Однако если $\|x(0)\|$ достаточно мало, то также $\|x(n)\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Наша цель — указать множество $W \subset \mathbb{C}^N$ такое, что при любых начальных условиях $x(0) \in W$ для решения системы (1.1) имеет место сходимость (1.2). Множество W называется *областью притяжения нулевого решения системы* (1.1). Мы даем оценки для области притяжения W и указываем скорость сходимости решений к нулевому решению системы (1.1) в терминах матриц вида (1.6).

В § 3 мы рассматриваем нелинейные системы разностных уравнений с числовым параметром μ:

$$x(n+1) = A(n)x(n) + \mu\varphi(n, x(n)), \quad n \ge 0. \tag{1.10}$$

Наша цель — указать круг $M = \{\mu \in C : |\mu| < m\}$ такой, что для решений системы (1.10) при $\mu \in M$ для произвольных начальных условий имеет место сходимость (1.2). Мы получаем также оценки скорости сходимости решений к нулевому решению (1.10) в терминах матриц вида (1.6).

В случае линейных возмущений $\varphi(n,x) = B(n)x$, $n \ge 0$, аналогичные задачи рассматривались в [8, 9]. В случае постоянных коэффициентов $A(n) \equiv A$, $n \ge 0$, эти задачи были решены авторами в [10]. Отметим, что аналогичные результаты для квазилинейных систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t,y)$$

с T-периодической матрицей $A(t)$ установлены в работах [11, 12].

§ 2. Область притяжения

Обозначим скалярное произведение двух векторов $u, v \in \mathbb{C}^N$ символом

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{N} u_i \bar{v}_i.$$

Будем предполагать, что для системы (1.1) выполнены следующие условия:

(i) существует конечное число $M(A,T)$, определяемое формулой (1.5) (т. е. спектр матрицы монодромии (1.4) принадлежит единичному кругу $\{|\lambda| < 1\}$);

(ii) имеет место оценка

$$\|\varphi(n,x)\| \le c\|x\|^{1+2\alpha}, \quad x \in \mathbb{C}^N, \ n \ge 0,$$

где $c, \alpha > 0$ — некоторые константы.

Теорема 1. *Пусть*

$$r_l = \frac{1}{c}\Big(\sqrt{\|A(l-1)\|^2 + (\|H(l)\|\|H(l-1)\|)^{-1}} - \|A(l-1)\|\Big), \quad l = 1, \dots, T,$$

где матрицы $H(l)$ *определяются формулой* (1.6). *Тогда множество*

$$W_\rho = \{x \in \mathbb{C}^N : \langle H(0)x, x\rangle^\alpha < \rho\}, \quad \rho = \min\{r_1, \dots, r_T\},$$

принадлежит области притяжения нулевого решения системы (1.1).

Доказательство. Вначале докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $f(n,x) = A(n)x + \varphi(n,x)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\langle H(n+1)f(n,x), f(n,x)\rangle \le \langle H(n)x, x\rangle(1 - \|H(n)\|^{-1} \\ + 2c\|H(n+1)\|\|A(n)\|\langle H(n)x,x\rangle^\alpha + c^2\|H(n+1)\|\langle H(n)x,x\rangle^{2\alpha}). \quad (2.1)$$

Доказательство. Можно выписать следующие равенства:

$$\langle H(n+1)f(n,x), f(n,x)\rangle = \langle H(n+1)(A(n)x + \varphi(n,x)), (A(n)x + \varphi(n,x))\rangle \\ = \langle A^*(n)H(n+1)A(n)x, x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle H(n+1)A(n)x, \varphi(n,x)\rangle \\ + \langle H(n+1)\varphi(n,x), \varphi(n,x)\rangle.$$

Поэтому из (1.9) имеем

$$\langle H(n+1)f(n,x), f(n,x)\rangle \\ = \langle H(n)x, x\rangle - \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle H(n+1)A(n)x, \varphi(n,x)\rangle + \langle H(n+1)\varphi(n,x), \varphi(n,x)\rangle.$$

Справедливы оценки

$$\|x\|^2 \le \langle H(n)x, x\rangle \le \|H(n)\|\|x\|^2.$$

Используя их и условие (ii), получим

$$\mathrm{Re}\langle H(n+1)A(n)x, \varphi(n,x)\rangle \le \|H(n+1)\|\|A(n)\|\|x\|\|\varphi(n,x)\| \\ \le c\|H(n+1)\|\|A(n)\|\|x\|^{2+2\alpha} \le c\|H(n+1)\|\|A(n)\|\langle H(n)x,x\rangle^{1+\alpha}$$

и

$$\langle H(n+1)\varphi(n,x), \varphi(n,x)\rangle \le c^2\|H(n+1)\|\|x\|^{2+4\alpha} \le c^2\|H(n+1)\|\langle H(n)x,x\rangle^{1+2\alpha}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\langle H(n+1)f(n,x), f(n,x)\rangle &\le \langle H(n)x,x\rangle - \|H(n)\|^{-1}\langle H(n)x,x\rangle \\ &+ 2c\|H(n+1)\|\|A(n)\|\langle H(n)x,x\rangle^{1+\alpha} + c^2\|H(n+1)\|\langle H(n)x,x\rangle^{1+2\alpha} \\ &= \langle H(n)x,x\rangle(1 - \|H(n)\|^{-1} + 2c\|H(n+1)\|\|A(n)\|\langle H(n)x,x\rangle^{\alpha} \\ &\qquad + c^2\|H(n+1)\|\langle H(n)x,x\rangle^{2\alpha}).\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть начальные условия $x(0)$ принадлежат W_ρ, т. е.

$$\rho_0 = \langle H(0)x(0), x(0)\rangle^{\alpha} < \rho.$$

Рассмотрим решение $\{x(i)\}$ системы (1.1). Очевидно,

$$\begin{aligned}x(1) &= A(0)x(0) + \varphi(0,x(0)),\\ x(2) &= A(1)A(0)x(0) + A(1)\varphi(0,x(0)) + \varphi(1,x(1)),\\ x(i) &= A(i-1)\dots A(1)A(0)x(0) + A(i-1)\dots A(1)\varphi(0,x(0))\\ &\quad + \dots + A(i-1)\varphi(i-2,x(i-2)) + \varphi(i-1,x(i-1)), \quad i \ge 3.\end{aligned}$$

В частности, если $x(0)=0$, то

$$x(i) = 0, \quad i = 1,2,\dots,$$

т. е. система (1.1) имеет нулевое решение $\{0\}$. В силу неравенства (2.1) для $x(1)$ получим

$$\begin{aligned}\langle H(1)x(1), x(1)\rangle &= \langle H(1)f(0,x(0)), f(0,x(0))\rangle \le \langle H(0)x(0),x(0)\rangle(1 - \|H(0)\|^{-1} \\ &+ 2c\|H(1)\|\|A(0)\|\langle H(0)x(0),x(0)\rangle^{\alpha} + c^2\|H(1)\|\langle H(0)x(0),x(0)\rangle^{2\alpha}).\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}\langle H(1)x(1), x(1)\rangle &\le \langle H(0)x(0),x(0)\rangle\bigl(1 - \|H(0)\|^{-1} \\ &\quad + 2c\|H(1)\|\|A(0)\|\rho_0 + c^2\|H(1)\|\rho_0^2\bigr). \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Определим

$$\Delta_1(\rho_0) = 1 - \|H(0)\|^{-1} + 2c\|H(1)\|\|A(0)\|\rho_0 + c^2\|H(1)\|\rho_0^2.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned}\Delta_1(\rho_0) - 1 &= -\|H(0)\|^{-1} + 2c\|H(1)\|\|A(0)\|\rho_0 + c^2\|H(1)\|\rho_0^2 \\ &= \|H(1)\|((c\rho_0 + \|A(0)\|)^2 - (\|A(0)\|^2 + (\|H(1)\|\|H(0)\|)^{-1})).\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\rho_0 < \rho \le \frac{1}{c}(\sqrt{\|A(0)\|^2 + (\|H(1)\|\|H(0)\|)^{-1}} - \|A(0)\|),$$

имеем

$$0 \le 1 - \|H(0)\|^{-1} \le \Delta_1(\rho_0) < 1.$$

Тогда в силу (2.2) получим

$$\langle H(1)x(1), x(1)\rangle \le \Delta_1(\rho_0)\langle H(0)x(0), x(0)\rangle \qquad (2.3)$$

и

$$\langle H(1)x(1), x(1)\rangle^{\alpha} < \rho_0. \tag{2.4}$$

Аналогично, используя лемму, для $x(2)$ получаем

$$\langle H(2)x(2), x(2)\rangle \le \langle H(1)x(1), x(1)\rangle(1 - \|H(1)\|^{-1} + 2c\|H(2)\|\|A(1)\|\langle H(1)x(1), x(1)\rangle^{\alpha} + c^2\|H(2)\|\langle H(1)x(1), x(1)\rangle^{2\alpha}).$$

Из (2.4) следует, что

$$\langle H(2)x(2), x(2)\rangle \le \langle H(1)x(1), x(1)\rangle\big(1 - \|H(1)\|^{-1} + 2c\|H(2)\|\|A(1)\|\rho_0 + c^2\|H(2)\|\rho_0^2\big).$$

Определим

$$\Delta_2(\rho_0) = 1 - \|H(1)\|^{-1} + 2c\|H(2)\|\|A(1)\|\rho_0 + c^2\|H(2)\|\rho_0^2.$$

Учитывая, что

$$\rho_0 < \rho \le \frac{1}{c}(\sqrt{\|A(1)\|^2 + (\|H(2)\|\|H(1)\|)^{-1}} - \|A(1)\|),$$

имеем

$$0 \le 1 - \|H(1)\|^{-1} \le \Delta_2(\rho_0) < 1.$$

Следовательно, в силу (2.3) и (2.4) получаем неравенства

$$\langle H(2)x(2), x(2)\rangle \le \Delta_2(\rho_0)\Delta_1(\rho_0)\langle H(0)x(0), x(0)\rangle$$

и

$$\langle H(2)x(2), x(2)\rangle^{\alpha} < \rho_0.$$

По индукции для любых $l \le T$

$$\langle H(l)x(l), x(l)\rangle \le \Delta_l(\rho_0)\dots\Delta_1(\rho_0)\langle H(0)x(0), x(0)\rangle, \tag{2.5}$$

где

$$\Delta_l(\rho_0) = 1 - \|H(l-1)\|^{-1} + 2c\|H(l)\|\|A(l-1)\|\rho_0 + c^2\|H(l)\|\rho_0^2$$

и при $\rho_0 < \rho$

$$0 \le 1 - \|H(j-1)\|^{-1} \le \Delta_j(\rho_0) < 1, \quad j \le l. \tag{2.6}$$

Матрицы $A(n)$, $H(n)$, $n \ge 0$, являются периодическими с периодом T. Следовательно, по аналогии с (2.5) приходим к неравенствам

$$\langle H(n)x(n), x(n)\rangle \le \Delta_l(\rho_0)\dots\Delta_1(\rho_0)(\Delta_T(\rho_0)\dots\Delta_1(\rho_0))^k\langle H(0)x(0), x(0)\rangle, \tag{2.7}$$

$$n = kT + l, \quad 1 \le l \le T.$$

Учитывая, что $H(n) \ge I$, в силу (2.6) имеем $\|x(n)\| \to 0$, $n \to \infty$. Следовательно, множество W_ρ принадлежит области притяжения нулевого решения системы (1.1).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть*

$$d_l = \frac{1}{c}(\sqrt{\|A(l-1)\|^2 + 0.5(\|H(l)\|\|H(l-1)\|)^{-1}} - \|A(l-1)\|), \quad l = 1, \dots, T.$$

Если

$$x(0) \in \overline{W}_{\rho_1} = \{x \in \mathbb{C}^N : \langle H(0)x, x\rangle^\alpha \le \rho_1\}, \quad \rho_1 = \min\{d_1, \dots, d_T\},$$

то для решения $\{x(n)\}$ *системы* (1.1) *выполнено неравенство*

$$\|x(n)\| \le \left(1 - \frac{1}{2M(A,T)}\right)^{n/2} \|H(0)\|^{1/2}\|x(0)\|, \quad n \ge 0, \tag{2.8}$$

где число $M(A,T)$ *определяется по формуле* (1.5).

Доказательство. По определению $\rho_1 < \rho$. Значит, для решения системы (1.1) имеем оценку (2.7).

Рассмотрим

$$\Delta_j(\rho_0) = 1 - \|H(j-1)\|^{-1} + 2c\|H(j)\|\|A(j-1)\|\rho_0 + c^2\|H(j)\|\rho_0^2$$

при

$$\rho_0 = \langle H(0)x(0), x(0)\rangle^\alpha \le \rho_1.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned}
\Delta_j(\rho_0) &- 1 + 0.5\|H(j-1)\|^{-1} \\
&= -0.5\|H(j-1)\|^{-1} + 2c\|H(j)\|\|A(j-1)\|\rho_0 + c^2\|H(j)\|\rho_0^2 \\
&= \|H(j)\|((c\rho_0 + \|A(j-1)\|)^2 - (\|A(j-1)\|^2 + 0.5(\|H(j)\|\|H(j-1)\|)^{-1})) \\
&\le \|H(j)\|(c\rho_1 + \|A(j-1)\| - \sqrt{\|A(j-1)\|^2 + 0.5(\|H(j)\|\|H(j-1)\|)^{-1}}) \\
&\quad \times (c\rho_1 + \|A(j-1)\| + \sqrt{\|A(j-1)\|^2 + 0.5(\|H(j)\|\|H(j-1)\|)^{-1}}).
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$c\rho_1 \le \sqrt{\|A(j-1)\|^2 + 0.5(\|H(j)\|\|H(j-1)\|)^{-1}} - \|A(j-1)\|,$$

имеем

$$0 \le 1 - \|H(j-1)\|^{-1} \le \Delta_j(\rho_0) \le 1 - \frac{1}{2\|H(j-1)\|} \le 1 - \frac{1}{2M(A,T)}, \quad j = 1, \dots, T.$$

Следовательно, из (2.7) вытекает

$$\langle H(n)x(n), x(n)\rangle \le \left(1 - \frac{1}{2M(A,T)}\right)^n \langle H(0)x(0), x(0)\rangle.$$

Используя $H(n) \ge I$, получаем (2.8).

Теорема доказана.

§ 3. Разностные уравнения с параметром

Рассмотрим нелинейную систему разностных уравнений (1.10):

$$x(n+1) = A(n)x(n) + \mu\varphi(n, x(n)), \quad n \ge 0,$$

где μ — числовой параметр. Предполагаем, что выполнены условия (i) и (ii).

Мы будем рассматривать решения системы (1.10) с произвольными начальными условиями

$$x(0) \in \overline{W}_r = \{x \in \mathbb{C}^N : \langle H(0)x, x\rangle^\alpha \le r\}, \quad r > 0.$$

Наша цель — указать круг $M = \{\mu \in C : |\mu| < m\}$ такой, что для решений системы (1.10) при $\mu \in M$ имеет место сходимость (1.2), т. е. $\|x(n)\| \to 0$, $n \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть*

$$m_l = \frac{1}{cr}(\sqrt{\|A(l-1)\|^2 + (\|H(l)\|\|H(l-1)\|)^{-1}} - \|A(l-1)\|), \quad l = 1, \dots, T.$$

Если $|\mu| < m = \min\{m_1, \dots, m_T\}$, *то для решений системы* (1.10) *при* $x(0) \in \overline{W}_r$ *имеет место сходимость* (1.2).

Доказательство. По аналогии с леммой 1 можно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* $F(n,x,\mu) = A(n)x + \mu\varphi(n,x)$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\langle H(n+1)F(n,x,\mu), F(n,x,\mu)\rangle \le \langle H(n)x,x\rangle(1 - \|H(n)\|^{-1} + 2|\mu|c\|H(n+1)\|\|A(n)\|\langle H(n)x,x\rangle^{\alpha} + |\mu|^2c^2\|H(n+1)\|\langle H(n)x,x\rangle^{2\alpha}).$$

Пусть $x(0) \in \overline{W}_r$ и $|\mu| < m$. Рассмотрим решение $\{x(i)\}$ системы (1.10). В силу леммы 2 для $x(1)$ получим

$$\langle H(1)x(1), x(1)\rangle = \langle H(1)F(0,x(0),\mu), F(0,x(0),\mu)\rangle \le \langle H(0)x(0),x(0)\rangle(1 - \|H(0)\|^{-1} + 2|\mu|c\|H(1)\|\|A(0)\|\langle H(0)x(0),x(0)\rangle^{\alpha} + |\mu|^2c^2\|H(1)\|\langle H(0)x(0),x(0)\rangle^{2\alpha}).$$

Следовательно,

$$\langle H(1)x(1), x(1)\rangle \le \Delta_1(r,\mu)\langle H(0)x(0),x(0)\rangle, \tag{3.1}$$

где $\Delta_1(r,\mu) = 1 - \|H(0)\|^{-1} + 2|\mu|c\|H(1)\|\|A(0)\|r + |\mu|^2c^2\|H(1)\|r^2$. Очевидно,

$$\Delta_1(r,\mu) - 1 = \|H(1)\|((|\mu|cr + \|A(0)\|)^2 - (\|A(0)\|^2 + (\|H(1)\|\|H(0)\|)^{-1})).$$

Учитывая, что

$$|\mu| < m \le \frac{1}{cr}(\sqrt{\|A(0)\|^2 + (\|H(1)\|\|H(0)\|)^{-1}} - \|A(0)\|),$$

имеем $0 \le 1 - \|H(0)\|^{-1} \le \Delta_1(r,\mu) < 1$. Тогда в силу (3.1) получаем

$$\langle H(1)x(1), x(1)\rangle^{\alpha} < r. \tag{3.2}$$

По аналогии, используя лемму 2, для $x(2)$ получим

$$\langle H(2)x(2), x(2)\rangle \le \langle H(1)x(1),x(1)\rangle(1 - \|H(1)\|^{-1} + 2|\mu|c\|H(2)\|\|A(1)\|\langle H(1)x(1),x(1)\rangle^{\alpha} + |\mu|^2c^2\|H(2)\|\langle H(1)x(1),x(1)\rangle^{2\alpha}).$$

Из (3.2) следует, что

$$\langle H(2)x(2), x(2)\rangle \le \langle H(1)x(1),x(1)\rangle(1 - \|H(1)\|^{-1} + 2|\mu|c\|H(2)\|\|A(1)\|r + |\mu|^2c^2\|H(2)\|r^2).$$

Определим

$$\Delta_2(r,\mu) = 1 - \|H(1)\|^{-1} + 2|\mu|c\|H(2)\|\|A(1)\|r + |\mu|^2c^2\|H(2)\|r^2.$$

Поскольку

$$|\mu| < m \le \frac{1}{cr}(\sqrt{\|A(1)\|^2 + (\|H(2)\|\|H(1)\|)^{-1}} - \|A(1)\|),$$

имеем

$$0 \le 1 - \|H(1)\|^{-1} \le \Delta_2(r,\mu) < 1.$$

Следовательно,

$$\langle H(2)x(2), x(2)\rangle \le \Delta_2(r,\mu)\Delta_1(r,\mu)\langle H(0)x(0), x(0)\rangle$$

и

$$\langle H(2)x(2), x(2)\rangle^{\alpha} < r.$$

Матрицы $A(n)$, $H(n)$, $n \ge 0$, периодические с периодом T. Поэтому по индукции можно получить неравенство

$$\langle H(n)x(n), x(n)\rangle \le \Delta_l(r,\mu)\dots\Delta_1(r,\mu)(\Delta_T(r,\mu)\dots\Delta_1(r,\mu))^k\langle H(0)x(0), x(0)\rangle, \tag{3.3}$$
$$n = kT + l, \quad 1 \le l \le T,$$

где

$$\Delta_j(r,\mu) = 1-\|H(j-1)\|^{-1}+2|\mu|c\|H(j)\|\|A(j-1)\|r+|\mu|^2c^2\|H(j)\|r^2,\ j = 1,\dots,T.$$

Учитывая, что

$$|\mu| < m \le \frac{1}{cr}(\sqrt{\|A(j-1)\|^2 + (\|H(j)\|\|H(j-1)\|)^{-1}} - \|A(j-1)\|),$$

имеем

$$0 \le 1 - \|H(j-1)\|^{-1} \le \Delta_j(r,\mu) < 1.$$

Следовательно,

$$\langle H(n)x(n), x(n)\rangle \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отсюда, поскольку $H(n) \ge I$, вытекает сходимость (1.2), т. е. $\|x(n)\| \to 0$, $n \to \infty$.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть*

$$\hat{m}_l = \frac{1}{cr}(\sqrt{\|A(l-1)\|^2 + 0.5(\|H(l)\|\|H(l-1)\|)^{-1}} - \|A(l-1)\|), \quad l = 1,\dots,T.$$

Тогда при

$$|\mu| \le \widehat{m} = \min\{\widehat{m}_1,\dots,\widehat{m}_T\}, \quad x(0) \in \overline{W}_r,$$

для решения системы (1.10) *имеет место неравенство* (2.8).

Доказательство. По определению $\widehat{m} < m$. Значит, для решения системы (1.10) имеет место оценка (3.3).

Рассмотрим $\Delta_j(r,\mu)$ при $|\mu| \le \widehat{m}$. Очевидно,

$$\begin{aligned}
&\Delta_j(r,\mu) - 1 + 0.5\|H(j-1)\|^{-1} \\
&\quad = -0.5\|H(j-1)\|^{-1} + 2|\mu|c\|H(j)\|\|A(j-1)\|r + |\mu|^2c^2\|H(j)\|r^2 \\
&\quad = \|H(j)\|((|\mu|cr + \|A(j-1)\|)^2 - (\|A(j-1)\|^2 + 0.5(\|H(j)\|\|H(j-1)\|)^{-1})) \\
&\quad \le \|H(j)\|(\widehat{m}cr + \|A(j-1)\| - \sqrt{\|A(j-1)\|^2 + 0.5(\|H(j)\|\|H(j-1)\|)^{-1}}) \\
&\qquad \times (\widehat{m}cr + \|A(j-1)\| + \sqrt{\|A(j-1)\|^2 + 0.5(\|H(j)\|\|H(j-1)\|)^{-1}}).
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\widehat{m}cr \le \sqrt{\|A(j-1)\|^2 + 0.5(\|H(j)\|\|H(j-1)\|)^{-1}} - \|A(j-1)\|,$$

имеем

$$0 \le 1 - \|H(j-1)\|^{-1} \le \Delta_j(r,\mu) \le 1 - \frac{1}{2\|H(j-1)\|} \le 1 - \frac{1}{2M(A,T)}, \quad j = 1, \dots, T.$$

Следовательно, из (3.3) вытекает неравенство

$$\langle H(n)x(n), x(n)\rangle \le \left(1 - \frac{1}{2M(A,T)}\right)^n \langle H(0)x(0), x(0)\rangle.$$

Поскольку $H(n) \ge I$, получаем неравенство (2.8).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. *Agarwal R. P.* Difference equations and inequalities. Theory, Methods and Applications. New York: Marcel Dekker, 1992.
3. *Kocic V. L., Ladas G.* Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993.
4. *Elaydi S. N.* An introduction to difference equations. New York: Springer-Verl., 1996.
5. *Akin O., Bulgak H.* Linear difference equations and stability theory. Konya: Selcuk Univ., Research Center of Appl. Math., 1998. (in Turkish).
6. *Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В.* Числовые характеристики асимптотической устойчивости решений линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1227–1237.
7. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
8. *Aydın K., Bulgak H. Demidenko G. V.* Continuity of numeric characteristics for asymptotic stability of solutions to linear difference equations with periodic coefficients // Selcuk J. Appl. Math. 2001. V. 2, N 2. P. 5–10.
9. *Айдын К., Булгаков А. Я., Демиденко Г. В.* Асимптотическая устойчивость решений возмущенных линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 493–507.
10. *Bulgak H. Demidenko G. V.* Estimation for the region of attraction of nonlinear difference equations // Numer. Math. 2002. V. 92. P. 421–431.
11. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* On asymptotic stability of solutions to nonlinear systems of differential equations with periodic coefficients // Selcuk J. Appl. Math. 2002. V. 3, N 2. P. 37–48.
12. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. (см. наст. номер. С. 1271–1284).

Статья поступила 8 июня 2003 г.

Айдын Кемаль (Aydin Kemal)
Selcuk University,
Campus, Konya,
Turkey
kaydin@selcuk.edu.tr

Булгаков Айдер Якубович (Bulgak Haydar)
Selcuk University,
Campus, Konya,
Turkey
h_bulgak@yahoo.com

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
demimenk@math.nsc.ru