Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 519.46

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕОМОРФИЗМАХ АНОСОВА НА НИЛЬМНОГООБРАЗИЯХ

В. В. Горбацевич

Аннотация: Цели статьи — систематизация и развитие алгебраических подходов к изучению диффеоморфизмов Аносова. Все известные в настоящее время примеры диффеоморфизмов Аносова прямо или косвенно связаны с компактными нильмногообразиями. Рассматриваются некоторые новые необходимые условия существования таких диффеоморфизмов на нильмногообразиях. Доказывается отсутствие диффеоморфизмов Аносова на некоторых классах нильмногообразий. Попутно доказаны некоторые результаты о группах Ли и решетках в них.

Ключевые слова: диффеоморфизм Аносова, нильмногообразие, решетка, Q-структура.

Пусть M — гладкое многообразие (класса гладкости C^∞, хотя можно рассматривать и многообразия конечного класса гладкости C^k, $k \geq 1$). В статье изучаются диффеоморфизмы Аносова на M. Сам Д. В. Аносов называл такого рода диффеоморфизмы (точнее, порожденные ими циклические подгруппы диффеоморфизмов) У-*каскадами*, противопоставляя У-каскады как динамические системы с дискретным временем У-потокам как динамическим системам с непрерывным временем. Буква «У» в этих терминах связана со словом «устойчивый», что выражает свойство структурной устойчивости или, что практически то же, грубости динамических систем, которое и было доказано в основополагающей работе Д. В. Аносова [1]. Термин «У-каскад» сейчас используется нечасто, в русскоязычной литературе используют иногда термин «У-диффеоморфизм».

Оказалось, что построение практически всех до сих пор известных диффеоморфизмов Аносова на компактных многообразиях тесно связано с алгебраическими конструкциями, базирующимися на специального рода автоморфизмах (называемых гиперболическими) нильпотентных групп Ли. Цели данной статьи — систематизация и развитие алгебраических подходов к изучению диффеоморфизмов Аносова, указание некоторых условий существования таких диффеоморфизмов на нильмногообразиях. Попутно будут доказаны некоторые новые результаты о группах Ли и решетках в них.

Авторами работ, касающихся диффеоморфизмов Аносова, неоднократно отмечалось недостаточное количество конкретных примеров таких диффеоморфизмов на нильмногообразиях. Одной из причин такой скудости примеров является, видимо, не слишком широкая известность (за пределами узкого круга специалистов) доступных для изучения классов нильпотентных алгебр Ли.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00709).

Что касается изучения общих нильпотентных алгебр Ли, то в настоящее время сделать здесь что-то нетривиальное представляется невозможным. В отличие от класса полупростых алгебр Ли многообразие нильпотентных алгебр Ли фиксированной размерности имеет очень сложное строение. Оно состоит из нескольких неприводимых компонент разной размерности (в отличие, скажем, от случая полупростых алгебр Ли фиксированной размерности, для которых содержащие их неприводимые компоненты одинаковой размерности), что, видимо, указывает на невозможность единообразного изучения класса всех нильпотентных алгебр Ли фиксированной размерности. Возможно, что для разных подклассов класса всех нильпотентных алгебр Ли необходимо применять свои специальные методы.

Ранее высказывался некоторый оптимизм по поводу возможности описания всех нильмногообразий, на которых существуют диффеоморфизмы Аносова. В настоящее время этот оптимизм уже, видимо, никто не разделяет, так как задача оказалась намного сложнее, чем казалось тем математикам, которые не были знакомы со специфическими сложностями исследования нильпотентных групп и алгебр Ли. Однако автор считает, что все же имеет смысл продолжать делать конкретные шаги в направлении изучения алгебраических диффеоморфизмов Аносова.

В § 1 этой работы изложены основные понятия, связанные с диффеоморфизмами Аносова, в частности с алгебраическими автоморфизмами Аносова. В § 2 перечисляются некоторые необходимые условия существования диффеоморфизмов Аносова (частично уже известные, а также некоторые новые). На их основе доказываются несколько утверждений об отсутствии диффеоморфизмов Аносова. В § 3 рассматриваются специальные классы нильмногообразий и изучается вопрос о существовании для них диффеоморфизмов Аносова. В нескольких ситуациях доказывается отсутствие диффеоморфизмов Аносова.

§ 1. Алгебраические диффеоморфизмы Аносова

Пусть M — гладкое (для простоты класса C^∞) компактное многообразие. Мы будем предполагать, что на M задана риманова метрика. На самом деле нам будет нужна не столько сама метрика, сколько порожденная ею норма (так что можно было бы ограничиться использованием и некоторой финслеровой структуры). Фактически определяемые ниже понятия для компактных многообразий (а мы будем рассматривать только такие многообразия) не зависят от выбора этой метрики (или нормы), хотя некоторые входящие в эти определения константы (нам на самом деле важно лишь их существование, а не конкретное значение) от нее и зависят.

Определение. Диффеоморфизм $f : M \to M$ (класса C^k, $k \geq 1$) называется *диффеоморфизмом Аносова*, если существует непрерывное разложение касательного расслоения $T(M) = E^s \oplus E^u$ (подрасслоения E^s и E^u называют соответственно *устойчивой* и *неустойчивой компонентами*), инвариантное относительно f, и существуют константы c, c', а также число $\lambda \in (0,1)$ такие, что для любого $n > 0$

$$\|(df)^n(v)\| \leq c\lambda^n \|v\| \quad \text{для любого } v \in E^s,$$
$$\|(df)^n(v)\| \geq c'\lambda^{-n} \|v\| \quad \text{для любого } v \in E^u.$$

Известно, что можно подобрать такую метрику на M, для которой будет $c = 1$. От выбора метрики на M свойство диффеоморфизма f быть диффеоморфизмом Аносова не зависит (так как все метрики на компактном многообразии между собой эквивалентны), хотя значения констант c, c' от нее зависят. Важно отметить, что разложение $T(M) = E^s \oplus E^u$ предполагается только непрерывным (даже для M класса гладкости C^∞). Без этого основное утверждение теории диффеоморфизмов Аносова об их структурной устойчивости не имеет места. А именно это утверждение вызвало к жизни само понятие диффеоморфизма Аносова (У-каскада).

Размерности слоев устойчивой и неустойчивой компонент для диффеоморфизма Аносова всегда положительны, т. е. диффеоморфизм компактного многообразия не может быть ни чисто растягивающим, ни чисто сжимающим. Это утверждение нетрудно вывести из анализа действия диффеоморфизма на этих компонентах. Для алгебраических же диффеоморфизмов Аносова это сразу вытекает из их унимодулярности (см. ниже).

Аналогично определяется понятие потока Аносова (У-потока, аносовского потока).

Определение. Поток (т. е. гладкая однопараметрическая группа диффеоморфизмов) $f(t) : M \to M$ (класса C^k, $k \geq 1$) называется *потоком Аносова*, если существует непрерывное разложение касательного расслоения $T(M) = E^s \oplus E^u \oplus E^T$, инвариантное относительно $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где E^T — касательное (одномерное) расслоение вдоль орбит потока, причем существуют такие константы c, c', а также число $\alpha > 0$, что

$$\|(df)(t)(v)\| \leq c \exp(-\alpha t)\|v\| \quad \text{для любых } v \in E^s,\ t > 0,$$

$$\|(df)(t)(v)\| \geq c' \exp(\alpha t)\|v\| \quad \text{для любых } v \in E^u,\ t > 0.$$

Примером аносовского потока является геодезический поток на произвольном компактном римановом многообразии отрицательной кривизны. Этот поток действует не на самом M, а на касательном расслоении $T(M)$ (или, если мы хотим иметь компактное многообразие, на компактном подрасслоении $T_1(M)$ единичных касательных векторов, подробнее см. [1]). Теория аносовских потоков заметно отличается от теории диффеоморфизмов Аносова. Это связано, в частности, с тем, что в определении аносовского потока фигурирует линейное расслоение E^T. Его наличие позволяет строить примеры аносовских потоков легче, чем диффеоморфизмов Аносова. С другой стороны, алгебраические методы построения диффеоморфизмов Аносова, которые будут описаны ниже, трудно применять для построения потоков Аносова, так как приходится требовать инвариантности алгебраических конструкций относительно однопараметрических групп диффеоморфизмов, что выполняется довольно редко. В данной статье мы почти не будем рассматривать потоки Аносова. Отметим, что если для потока Аносова $f(t)$ взять в качестве t дискретный набор значений $t = nt_0$, $n \in \mathbb{N}$, то получившийся каскад $f(t_0 n)$ (порожденный диффеоморфизмом $f(t_0)$), не обязательно будет У-каскадом.

Как указывалось выше, введение понятия диффеоморфизмов Аносова связано с их структурной устойчивостью, анонсированной Д. В. Аносовым в 1962 г. в [2] (доказательство было опубликовано позже).

Определение. Диффеоморфизм $f : M \to M$ называется *структурно устойчивым*, если любой близкий в нему (относительно какой-то C^1-метрики, выбор которой здесь несуществен) диффеоморфизм f' топологически сопряжен с f, т. е. существует такой гомеоморфизм $h : M \to M$, что $f' = h^{-1} f h$.

Понятие структурной устойчивости под названием «грубость» для потоков впервые введено в работе [3]. Часто дополнительно требуют, чтобы гомеоморфизм h был близок к единичному. Диффеоморфизмы f и $h^{-1}fh$ имеют общие топологические свойства. Например, для них только одновременно будут плотны множества периодических точек. В целом они имеют один и тот же топологический портрет. С этим, в частности, и связан интерес к диффеоморфизмам Аносова. Кроме диффеоморфизмов Аносова известны и другие классы структурно устойчивых диффеоморфизмов. Таковы, например, диффеоморфизмы Морса — Смейла, которые в отличие от аносовских существуют на любом гладком многообразии (подробнее см. [4]). Если на некотором компактном многообразии M диффеоморфизмы Аносова существуют, то они образуют открытое подмножество в группе $\mathrm{Diff}(M)$ всех диффеоморфизмов [1].

Первый пример «диффеоморфизма Аносова» придумал Том. Затем он сообщил его Смейлу, который, в свою очередь, в 1961 г. рассказал о нем Д. В. Аносову (здесь мы следуем [5]). Это был пример диффеоморфизма двумерного тора. А именно, рассмотрим отображение $f : T^2 \to T^2$, индуцированное целочисленной матрицей из $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, определяющей линейный автоморфизм $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ двумерной вещественной плоскости. Условие принадлежности $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ на матрицу (которую мы тоже будем обозначать через $\tilde{f}$) здесь нужно для того, чтобы соответствующее ей линейное преобразование плоскости сохраняло целочисленную решетку $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ и потому индуцировало автоморфизм тора $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, рассматриваемого как абелева группа Ли. Предположим, что собственные значения матрицы $\tilde{f}$ вещественны и по модулю не равны единице (такие матрицы называют иногда гиперболическими, хотя есть и другие варианты этого понятия, см. ниже). Например, в исходном примере Тома было $\tilde{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (определитель равен -1), здесь $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Кстати, можно предположить, что выбор именно этой матрицы был вызван ее связью с задачей нахождения целочисленных решений простейшего уравнения Пелля $x^2 - 2y^2 = 1$. Можно взять и еще более простую матрицу $\tilde{f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; вообще, подходящих матриц очень много: подходят, например, любая матрица из $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$, модуль следа которой больше чем 2, и многие другие матрицы. Разложение касательного расслоения тора на устойчивую и неустойчивую компоненты порождается разложением $\mathbb{R}^2$ в прямую сумму двух одномерных собственных подпространств гиперболической матрицы $\tilde{f}$. Для полученного таким способом диффеоморфизма тора T^2 условие аносовости легко вытекает из свойств собственных значений этой матрицы.

В своей статье [5] Смейл поставил проблему: выяснить, на каких компактных многообразиях M существуют диффеоморфизмы Аносова. В частности, должно ли универсально накрывающее M многообразие $\widetilde{M}$ быть гомеоморфно $\mathbb{R}^n$?

Решения этой проблемы не получено до сих пор. Имеется следующая более точная

Гипотеза. *Если на компактном многообразии M существует диффеоморфизм Аносова, то M гомеоморфно нильмногообразию или инфранильмногообразию.*

Нильмногообразием называется компактное однородное многообразие вида N/Γ, где N — нильпотентная односвязная группа Ли, а Γ — решетка в N, т. е. дискретная подгруппа с компактным фактор-пространством N/Γ. *Инфранильмногообразием* называется компактное многообразие, конечнолистно накрываемое некоторым нильмногообразием и получаемое из него специальной алгебраической процедурой (см., например, [4]). А именно, инфранильмногообразие представляется в виде (компактного) фактор-пространства N/D по естественному действию на N группы D — дискретной подгруппы в группе Ли $\mathrm{Aut}(N) \cdot N$ (голоморфе группы Ли N), свободной от кручения. Пересечение $D \cap N$ всегда будет решеткой в N, и $N/D \cap N$ является указанным выше нильмногообразием, конечнолистно накрывающим заданное инфранильмногообразие. По-другому инфранильмногообразие N/D можно построить факторизацией нильмногообразия $N/D \cap N$ по естественному действию конечной группы $D/D \cap N$. Универсальные накрытия для нильмногообразия и инфранильмногообразия размерности n всегда диффеоморфны евклидову пространству $\mathbb{R}^n$.

В настоящее время известно только одно общее подтверждение указанной гипотезы. А именно, доказано, что если одно из расслоений E^s, E^u одномерно (т. е. является расслоением на прямые), то M гомеоморфно тору T^n [6]. Утверждать при этом, что M диффеоморфно тору, уже нельзя. Дело в том, что, например, связная сумма $T^n \sharp \Sigma^n$ тора и нестандартной сферы Σ^n (гомеоморфной, но не диффеоморфной стандартной сфере S^n; такие сферы существуют при $n \geq 7$) допускает диффеоморфизмы Аносова [7]. Работа [7] — один из очень немногих случаев использования неалгебраических (в данном случае топологических) методов построения диффеоморфизмов Аносова. Однако построенные там многообразия не диффеоморфны тору (хотя, конечно, гомеоморфны ему). Такие M называются фальшивыми торами. На них, как известно, не может в отличие от стандартного тора гладко действовать никакая связная компактная группа Ли (даже окружность, см. [8]).

Однако практически все известные до сих пор диффеоморфизмы Аносова построены алгебраическим методом. Пусть $M = G/\Gamma$ — фактор-пространство связной группы Ли G по решетке Γ. Рассмотрим некоторый автоморфизм $\tilde{f} \in \mathrm{Aut}(G)$ группы Ли G. Если $\tilde{f}$ сохраняет решетку Γ, т. е. $\tilde{f}(\Gamma) = \Gamma$, то он индуцирует диффеоморфизм f многообразия $M = G/\Gamma$. Если этот диффеоморфизм является диффеоморфизмом Аносова, то мы будем называть его *алгебраическим диффеоморфизмом Аносова*. Пример Тома — это как раз пример алгебраического диффеоморфизма Аносова. Нетрудно выяснить, какие именно автоморфизмы порождают диффеоморфизмы Аносова. Напомним, что всякий автоморфизм группы Ли G индуцирует автоморфизм соответствующей алгебры Ли $L(G)$ (как дифференциал исходного автоморфизма).

Определение. Автоморфизм связной группы Ли G называется *гиперболическим*, если характеристические корни его дифференциала по модулю отличны от единицы. Тогда этот дифференциал называется *гиперболическим автоморфизмом алгебры Ли* $L(G)$.

С понятием гиперболического автоморфизма группы Ли (или алгебры Ли) тесно связано понятие гиперболического дифференцирования алгебры Ли. А именно, дифференцирование $\phi \in \mathrm{Der}(L)$ алгебры Ли L (конечномерной) называется *гиперболическим*, если его характеристические корни не лежат на мнимой числовой оси (в частности, они не равны нулю). Очевидно, что экспоненциал гиперболического дифференцирования алгебры Ли L дает гиперболический автоморфизм этой алгебры Ли и соответствующей этой алгебре Ли односвязной группы Ли. Отметим, что не всякий автоморфизм связной (и даже односвязной) группы Ли является образом некоторого дифференцирования при экспоненциальном отображении $\exp : \mathrm{Der}(L(G)) \to \mathrm{Aut}(G)$, подробнее об этом см. ниже.

Назовем матрицу *гиперболической*, если все ее характеристические корни по модулю отличны от единицы (такое понимание гиперболичности матрицы несколько отличается от упомянутого выше, где дополнительно требовалась вещественность этих собственных значений). Ясно, что гиперболические целочисленные матрицы порождают, как и в примере Тома, диффеоморфизмы Аносова на торах T^n. А именно, пусть имеется такая матрица $A \in GL_n(\mathbb{Z})$, характеристические корни которой по модулю отличны от единицы. Тогда она индуцирует диффеоморфизм тора $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Обозначим через V_+ (соответственно V_-) прямую сумму корневых подпространств для матрицы A, соответствующих характеристическим корням, по модулю большим (соответственно меньшим) единицы. Ясно, что разложение $\mathbb{R}^n = V_- \oplus V_+$ порождает разложение касательного расслоения над тором T^n в сумму стабильной и нестабильной компонент. Нужные для этой конструкции гиперболические целочисленные матрицы — это на самом деле большинство матриц из $GL_n(\mathbb{Z})$. Например, пусть $A \in GL_3(\mathbb{Z})$ (о гиперболических матрицах в $GL_2(\mathbb{Z})$ см. выше), запишем ее характеристический многочлен в виде $\lambda^3 - m\lambda^2 + n\lambda - \det A = 0$, где $m = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $n = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Имеет место следующее несложное утверждение.

Лемма 1. *Если не все характеристические корни матрицы $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ вещественны, то она гиперболична тогда и только тогда, когда $m \neq n \cdot \det(A)$.*

Доказательство. Из $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$ вытекает, что $\det A = \pm 1$. Мы рассмотрим ниже случай, когда $\det A = 1$ (здесь условие гиперболичности матрицы A принимает вид $m \neq n$). Случай $\det A = -1$ рассматривается совершенно аналогично.

Если $m = n$, то очевидно, что характеристическое уравнение $\lambda^3 - m\lambda^2 + m\lambda - 1 = 0$ имеет корень $\lambda = 1$ и потому матрица A негиперболична.

Докажем обратное утверждение: если $m \neq n$, то матрица A гиперболична. Предположим, что A негиперболична. Тогда характеристическое уравнение для матрицы A имеет корень λ_1, по модулю равный единице. Если он веществен, то он может быть равен только 1 или -1. Если $\lambda_1 = 1$, то, очевидно, $m = n$. Если же $\lambda_1 = -1$, то произведение остальных двух корней $\lambda_2\lambda_3$ должно быть равно -1. По условию оба корня λ_2, λ_3 обязательно будут комплексными, но тогда они комплексно сопряженные и потому их произведение равно квадрату модуля любого из них. В частности, это произведение не может равняться -1.

Предположим теперь, что равный по модулю единице корень λ_1 не веществен. Комплексно сопряженный к нему корень тоже по модулю равен единице. А так как произведение всех трех корней рассматриваемого уравнения равно 1, получаем, что третий, обязательно вещественный, корень рассматриваемого кубического уравнения будет равен единице. Но тогда $m = n$ (см. выше), что противоречит условию. Следовательно, матрица A гиперболична.

Отметим, что условие наличия у A комплексных собственный значений в лемме 1 существенно. Например, один из корней многочлена $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda - 1$ равен -1, и потому соответствующая ему матрица не гиперболична, хотя $m = 2 \neq n = -4$.

Аналогично можно получить и критерий гиперболичности произвольных матриц из $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$. Отметим, что $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ гиперболична тогда и только тогда, когда гиперболична $A^2 \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Так или иначе видно, что большинство (практически в любом естественном смысле этого слова) матриц из $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ гиперболические.

Имеются, конечно, и более общие условия гиперболичности целочисленных матриц любого порядка (например, основанные на кругах Гершгорина), но так или иначе очевидно, что гиперболических среди всех матриц из $GL_n(\mathbb{Z})$ большинство. В [7] явно указана целочисленная обратимая гиперболическая матрица любого порядка n, у которой все собственные значения вещественны, положительны и различны, причем только одно из них меньше 1 (это позволяет строить на торах, стандартных и фальшивых, диффеоморфизмы Аносова коразмерности 1). Эта матрица является нормальной формой Смита для следующего характеристического многочлена:

$$p(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - \cdots + (-1)^n,$$

где $a_i = n^{2[(n-1)+(n-2)+\cdots+i]}$.

После примера Тома для двумерного тора Смейлом был построен первый нетривиальный пример (точнее, два различных диффеоморфизма на одном и том же компактном многообразии) алгебраического диффеоморфизма Аносова на нильмногообразии. Это было ответом на вопрос Д. В. Аносова (сформулированный им на Московском математическом конгрессе в 1966 г.) о существовании диффеоморфизмов Аносова на компактных многообразиях, отличных от тора. Оказалось, что при этом нужно использовать нильпотентную группу Ли размерности, не меньшей чем 6. На нильпотентной группе Ли меньшей размерности подходящие гиперболические автоморфизмы, как можно показать, существуют тогда и только тогда, когда эта группа Ли абелева. Мы не будем здесь воспроизводить конструкцию Смейла в деталях (ее можно найти в [4, 5]), отметим лишь некоторые ее важные особенности. В качестве группы Ли G здесь берется прямое произведение $N_3(\mathbb{R})\times N_3(\mathbb{R})$ двух экземпляров трехмерной группы Ли $N_3(\mathbb{R})$, состоящей из всех унипотентных вещественных матриц третьего порядка (это единственная с точностью до изоморфизма трехмерная неабелева нильпотентная односвязная группа Ли). В $N_3(\mathbb{R})$ имеется очевидная решетка $N_3(\mathbb{Z})$, составленная из унипотентных целочисленных матриц. Тем самым можно было бы попытаться взять в качестве решетки в G прямое произведение двух экземпляров указанной решетки. Но оказывается, что в этом случае не существует гиперболического автоморфизма группы Ли G, который сохранял бы эту решетку-произведение. Однако можно построить и другие решетки в G, которые не распадаются в прямое произведение (даже с точностью до подгруппы конечного индекса) решеток в прямых сомножителях $N_3(\mathbb{R})$. Такого рода неприводимые решетки строятся с помощью использования некоторого квадратичного расширения поля рациональных чисел. Эта идея была подсказана Смейлу А. Борелем (которому принадлежит и один из двух примеров диффеоморфизмов Аносова, опубликованных Смейлом). В примере Смейла использовалось расширение $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Для соответствующих решеток в указанной группе Ли G нужные гиперболические автоморфизмы уже существуют, что и порождает требуемый пример (даже два) диффеоморфизма Аносова.

Тем самым на некотором нильмногообразии размерности 6 существует диффеоморфизм Аносова. В работе [9] найдены все шестимерные нильпотентные группы Ли, на которых существуют гиперболические авоморфизмы. Подробнее о них см. § 3 ниже.

Для инфранильмногообразий первые примеры алгебраических диффеоморфизмов Аносова (которые по определению тоже, как и для случая нильмногообразий, индуцируются гиперболическими автоморфизмами нильпотентных групп Ли) построены в [10] (см. также [4]). Там в качестве конечнолистно накрывающих нильмногообразий фигурировали торы (начиная с четырехмерного соответствующие им инфранильмногообразия — это плоские римановы многообразия) и шестимерное нильмногообразие (двулистно накрывающее построенное инфранильмногообразие) из примера Смейла. Отметим, что эти инфранильмногообразия не являются нильмногообразиями. Они даже, вообще говоря, не являются однородными многообразиями, т. е. на них обычно не существует транзитивного действия никакой группы Ли. Как указано в [11], из десяти трехмерных компактных плоских многообразий однородны семь, а из 75 четырехмерных компактных плоских многообразий однородны 21 (фактически в [11] рассматривались только однородные пространства разрешимых групп Ли, но можно доказать, что если плоское компактное многообразие однородно, то на нем всегда существует и транзитивное действие некоторой разрешимой группы Ли). Из сказанного следует, что примеры диффеоморфизмов Аносова на инфранильмногообразиях — это действительно новые примеры. Но вот дальше дело в построении примеров пошло медленнее: иногда появлялись новые примеры или небольшие группы примеров на нильмногообразиях и, реже, на инфранильмногообразиях (тут построение примеров технически более сложно), а выйти за пределы нильпотентных групп Ли при построении диффеоморфизмов Аносова так и не удалось. По этой причине и была сформулирована указанная выше гипотеза о том, что существенно выйти за эти пределы просто невозможно. В дальнейшем мы сосредоточим свое внимание на нильмногообразиях, не касаясь совершенно аналогичного, но технически более сложного случая инфранильмногообразий.

Для диффеоморфизмов Аносова на нильмногообразиях (обычных и «инфра») имеется следующая важная теорема, сводящая все вопросы к изучению алгебраических диффеоморфизмов Аносова.

Теорема 1 [12]. *Каждый диффеоморфизм Аносова на произвольном* (*инфра*)*нильмногообразии топологически сопряжен некоторому алгебраическому диффеоморфизму Аносова.*

Что же касается алгебраических диффеоморфизмов Аносова, то оказалось, что они существуют только на (инфра)нильмногообразиях. Это утверждение было указано Смейлом (на основе некоторых алгебраических результатов, сообщенных ему А. Борелем). А именно, имеет место

Теорема 2 (см. [5]). *Если на группе Ли существует гиперболический автоморфизм, то она нильпотентна.*

Это утверждение, как указывалось в [5], вытекает из следующей алгебраической леммы.

Лемма 2. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли, на которой существует автоморфизм f, все собственные значения которого по модулю не равны единице* (*т. е. гиперболический*)*. Тогда алгебра Ли L нильпотентна.*

Доказательство этой леммы в работе [5] (и в других известных автору работах на эту тему) не приводится. Известно, что близкое утверждение содержится в виде упражнения с указаниями в [13, упражнение 21, с. 112]. На самом деле здесь достаточно требовать, чтобы собственные значения указанного в лемме автоморфизма не были корнями из единицы. Эта лемма была в явном виде сформулирована и доказана еще в работе Джекобсона [14]. В его книге [15] сходная лемма (о том, что невырожденные дифференцирования существуют только для нильпотентных алгебр Ли) приводится в виде упражнения 9 гл. II. Удивительно, но мне не удалось найти простого замкнутого в себе доказательства этой важнейшей для теории алгебраических автоморфизмов Аносова теоремы 2 в каких-либо работах, посвященных этим вопросам. Поэтому для полноты изложения вопрос о доказательстве теоремы 2 ниже будет рассмотрен подробнее. Вначале будет приведено «традиционное» доказательство, основанное на перечисленных выше идеях. После этого будет дано еще одно, простое и достаточно короткое, доказательство, которое хорошо проясняет причину появления здесь свойства нильпотентности.

Итак, начнем с прямого доказательства леммы 2, следуя в основном статье [14].

Рассмотрим корневое разложение комплексификации $L \otimes \mathbb{C}$ алгебры Ли L относительно заданного автоморфизма: $L \otimes \mathbb{C} = \oplus L_\lambda$, где $L_\lambda = \{X \in L \otimes \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}$ такое, что $(f - \lambda E)^n(X) = 0\}$ — корневое пространство (ненулевое), соответствующее корню λ (модуль которого по условию не равен единице). Тогда $[L_\lambda, L_\mu] \subset L_{\lambda \cdot \mu}$. Это включение легко выводится итерацией из очевидного тождества $(f - \lambda\mu E)[X, Y] = [(f - \lambda E)X, f(Y)] + [\lambda X, (f - \mu E)Y]$. Рассмотрим при фиксированных значениях индексов i, j последовательность величин $\lambda_i \lambda_j^n$, $n \in \mathbb{N}$. Из приведенного выше включения следует, что этим числам соответствуют нулевые подпространства или указанные выше корневые подпространства L_λ. Все числа $\lambda_i \lambda_j^n$ между собой различны (это вытекает из того, что среди чисел λ нет корней из единицы). Поэтому, так как L конечномерна, при некотором натуральном n одному из этих чисел (на самом деле почти всем из них) должно соответствовать нулевое подпространство и потому должно быть $\operatorname{ad}^n X_i(X_j) = 0$, где $\operatorname{ad} : L \otimes \mathbb{C} \to L \otimes \mathbb{C}$ — присоединенное представление, а X_i, X_j — произвольные элементы из $L_{\lambda_i}, L_{\lambda_j}$ соответственно. Отсюда вытекает, что все операторы $\operatorname{ad} X_i$ нильпотентны. Хорошо известна теорема Энгеля, в силу которой если все линейные операторы присоединенного представления конечномерной алгебры Ли нильпотентны, то и сама алгебра Ли нильпотентна. Однако в нашем случае нильпотентны не все линейные операторы $\operatorname{ad} X$, а только некоторые, соответствующие элементам корневых подпространств. Однако семейство этих подпространств замкнуто относительно операции коммутирования и в сумме дает всю алгебру Ли $L \otimes \mathbb{C}$. Поэтому можно применить обобщение теоремы Энгеля, полученное Джекобсоном (см., например, [15, гл. 2]). Оказывается, что если существует семейство элементов алгебры Ли, замкнутое относительно операции коммутирования, ее линейно порождающее и такое, что линейные операторы присоединенного представления для всех этих элементов нильпотентны, то и сама алгебра Ли нильпотентна. Доказательство этого утверждения является аналогом (несколько более изощренным) стандартного доказательства теоремы Энгеля. В виде задачи аналогичное утверждение содержится в книге Бурбаки [13, гл. I, упражнение 11, с. 109].

Из указанного выше обобщения теоремы Энгеля вытекает, что алгебра Ли $L \otimes \mathbb{C}$ нильпотентна. Но тогда, конечно, нильпотентна и исходная алгебра Ли L.

Приведенное доказательство весьма эффектно и поучительно, но оставляет некоторое чувство неудовлетворенности, так как из него трудно понять, почему же именно нильпотентность алгебры Ли есть следствие наличия гиперболического автоморфизма. Поэтому мы приведем еще одно доказательство леммы 1, которое использует лишь несложные стандартные сведения из теории алгебр Ли. А именно, рассмотрим разложение Леви $L = s + r$ алгебры Ли L, здесь s — полупростая часть алгебры Ли L (ее фактор Леви), а r — радикал в L (максимальный разрешимый идеал). Пусть $f : L \to L$ — гиперболический автоморфизм алгебры Ли L. Отметим, что и любая степень этого автоморфизма тоже, очевидно, является гиперболическим автоморфизмом. Так как радикал в алгебре Ли является характеристическим идеалом, он инвариантен относительно f и потому f индуцирует автоморфизм, причем, очевидно, тоже гиперболический, полупростой части $s = L/r$.

Группа автоморфизмов любой алгебры Ли является алгебраической группой, в частности, группой Ли с конечным числом связных (в обычной евклидовой топологии) компонент. Поэтому f или какая-либо его степень индуцирует некоторый элемент из связной компоненты единицы группы автоморфизмов полупростой алгебры Ли s. Однако эта связная компонента единицы, как хорошо известно, состоит из дифференциалов внутренних автоморфизмов полупростой связной группы Ли S, соответствующей алгебре Ли s. Поэтому таков и f. Более того, рассматриваемый нами автоморфизм можно считать принадлежащим не только связной компоненте группы автоморфизмом, но и лежащим в образе экспоненциального отображения. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим циклическую подгруппу в линейной алгебраической группе $\mathrm{Aut}(L)$, порожденную автоморфизмом f. Эта подгруппа абелева. Рассмотрим ее алгебраическое замыкание — это будет абелева алгебраическая группа. Алгебраическая группа имеет конечное число связных компонент, поэтому некоторая степень автоморфизма f лежит в торе — в связной алгебраической абелевой группе. Но, очевидно, любой элемент тора лежит в образе экспоненциального отображения. Поэтому мы можем считать, что $f = \exp(D)$, где $D \in \mathrm{Der}(L)$ — некоторое дифференцирование (внутреннее в силу полупростоты L). Так как автоморфизм f гиперболичен, дифференцирование D тоже будет гиперболично (т. е. его характеристические корни не лежат на мнимой оси).

Итак, мы можем считать, что автоморфизм f лежит в некоторой однопараметрической подгруппе автоморфизмов (а именно, в однопараметрической группе $\exp(tD)$, где D — указанное выше дифференцирование), поэтому как внутренний он имеет вид $\exp(\mathrm{ad}(Z))$, $Z \in s$, и потому у него хотя бы одно собственное значение равно 1 (с собственным вектором Z). Но это противоречит его гиперболичности.

В результате получаем, что должно быть $s = \{0\}$, т. е. алгебра Ли L должна быть разрешима. Рассмотрим теперь нильрадикал n в L. Любое дифференцирование D разрешимой алгебры Ли действует на L/n, как известно, тривиально (т. е. $D(L) \subset n$) (см., например, [13]). Но тогда действие f на этом факторе имеет характеристический корень, равный единице, что невозможно. Поэтому должно быть $L = n$, т. е. алгебра Ли L должна быть нильпотентна. Доказательство закончено. Из него видно, как именно существование гиперболического автоморфизма «заставляет» алгебру Ли L стать вначале разрешимой, а потом и нильпотентной.

Замечание 1. Если f — некоторый гиперболический автоморфизм алгебры Ли L, то L можно разложить в прямую сумму двух подпространств L_+, L_-, порожденных корневыми подпространствами, собственные числа для которых по модулю соответственно больше и меньше единицы (комплексификация алгебры Ли здесь не нужна, так как модули двух комплексно сопряженных корней одинаковы и потому входят одновременно в одну из двух указанных групп). Из включения $[L_\lambda, L_\mu] \subset L_{\lambda\mu}$ вытекает, что эти два подпространства являются подалгебрами. Тем самым они дают разложение алгебры Ли L в прямую сумму двух подалгебр (но, вообще говоря, не идеалов) с тривиальным пересечением. Алгебра Ли L здесь должна быть, как нам уже известно, нильпотентной. Но любое разложение нильпотентной алгебры Ли глобализуемо, т. е. оно порождает разложение $N = N_- \cdot N_+$ соответствующей односвязной нильпотентной группы Ли N в произведение двух связных и замкнутых (причем даже в топологии Зарисского) подгрупп с тривиальным пересечением [16]. Это легко доказывается для односвязной нильпотентной N, так как $N_\pm$ будут алгебраически замкнутыми подгруппами с тривиальным пересечением и нужно будет только доказать, что их произведение дает всю N (что легко следует из их алгебраичности). Действие автоморфизма f переносится с L на N, а там на подгруппах N_- и N_+ автоморфизм f порождает соответственно сжимающий и растягивающий автоморфизмы. Отметим, что автоморфизм, обратный к сжимающему, является растягивающим.

Подалгебры $L_\pm$ в общем случае не являются идеалами. Это видно в одном (втором, сообщенном А. Борелем, см. [5]) из примеров Смейла, а вот в первом его примере эти подалгебры — идеалы, они совпадают с прямыми слагаемыми $n_3(\mathbb{R})$ алгебры Ли $L = n_3(\mathbb{R}) \oplus n_3(\mathbb{R})$.

Замечание 2. Пусть $f \in \mathrm{Aut}(L)$ — некоторый гиперболический автоморфизм (нильпотентной) алгебры Ли L. Группа Ли $\mathrm{Aut}(L)$ алгебраична, а потому существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что f^n лежит в образе экспоненциального отображения $\exp : \mathrm{Der}(L) \to \mathrm{Aut}(L)$ (см. рассуждение выше). Другими словами, через f^n проходит однопараметрическая подгруппа автоморфизмов, причем $f^n = \exp(D)$, $D \in \mathrm{Der}(L)$. Так как f^n гиперболичен, как и f, то, очевидно, дифференцирование D гиперболично. Тем самым удается включить в однопараметрическую подгруппу автоморфизмов любой гиперболический автоморфизм (или его некоторую степень) алгебры Ли L. Аналогично можно вложить некоторую степень гиперболического автоморфизма группы Ли в однопараметрическую группу гиперболических автоморфизмов этой группы Ли. К сожалению, на фактор-пространство N/Γ такая конструкция обычно не переносится (давая там автоморфизм Аносова), так как трудно ожидать, что все элементы однопараметрической подгруппы автоморфизмов будут сохранять подгруппу Γ.

Интересно отметить, что свойство алгебр Ли иметь гиперболический автоморфизм наследуется при сжатии. Напомним, что алгебра Ли L' называется *сжатием* алгебры Ли L, если она лежит в замыкании орбиты естественного действия линейной группы $GL(n, \mathbb{R})$ в пространстве алгебр Ли данной размерности n (рассматриваемых как совокупности своих структурных констант c_{ij}^k, подробнее см. [17]). Так как характеристический полином при сопряжении не меняется, то и для предельной алгебры Ли он будет таким же, как и для исходной. Но тогда и его характеристические корни не изменятся при предельном переходе. Поэтому гиперболический автоморфизм исходной алгебры Ли L индуцирует не просто автоморфизм сжатой алгебры Ли L', а именно гиперболический автоморфизм. Это замечание позволяет в некоторых случаях строить новые примеры алгебр Ли, допускающих гиперболические автоморфизмы. Однако, к сожалению, при указанном предельном переходе свойства соответствующих групп Ли (например, наличие решетки и ее инвариантность относительно автоморфизма) не всегда сохраняются.

§ 2. Алгебраические автоморфизмы Аносова на нильмногообразиях

Здесь мы рассмотрим свойства тех нильмногообразий, на которых существуют диффеоморфизмы Аносова. Это позволит выделить классы нильмногообразий, на которых не существует ни одного такого диффеоморфизма.

Пусть $M = N/\Gamma$ — компактное нильмногообразие. Нильпотентную группу Ли N можно считать односвязной, в противном случае можно перейти к ее универсальному накрытию, заменив решетку Γ прообразом при этом накрытии.

Произвольная односвязная нильпотентная группа Ли имеет естественную структуру алгебраической группы. Наличие этой алгебраической структуры на N вытекает из следующих известных фактов (подробнее о которых см., например, [18]).

1. Произвольная нильпотентная алгебра Ли имеет точное линейное представление нильпотентными матрицами (это простой частный случай теоремы Адо). Тем самым ее можно рассматривать как подалгебру в алгебре Ли $n_k(\mathbb{R})$ нильпотентных матриц некоторого порядка k.

Отсюда следует, что соответствующая алгебре Ли n односвязная нильпотентная группа Ли N может рассматриваться как подгруппа Ли в группе Ли $N_k(\mathbb{R})$ унипотентных матриц (которая, очевидно, является алгебраической группой).

2. Любая связная подгруппа Ли в $N_k(\mathbb{R})$ алгебраически замкнута. Это выводится из более общего утверждения о том, что любая связная подгруппа Ли в унипотентной алгебраической группе является алгебраически замкнутой подгруппой.

Единственность этой алгебраической структуры на N тоже нетрудно доказать. Для этого достаточно доказать, что любой изоморфизм между нильпотентными односвязными группами Ли является алгебраическим. Для доказательства можно рассмотреть график этого изоморфизма и заметить, что как связная подгруппа в прямом произведении двух нильпотентных алгебраических групп он тоже является алгебраической подгруппой.

Наличие решетки в односвязной нильпотентной группе Ли накладывает на эту группу Ли сильное ограничение. А именно, как фактически было доказано А. И. Мальцевым (подробнее см. обзор [18]), если в N имеется решетка, то алгебраическая структура на N должна быть рациональной, т. е. как алгебраическая группа N должна быть определена над $\mathbb{Q}$. Эта рациональная структура строится вполне конструктивно, исходя из решетки Γ. Большинство алгебраических нильпотентных групп Ли над $\mathbb{Q}$ не определены (хотя для размерностей ≤ 6 каждая односвязная нильпотентная группа Ли определена над $\mathbb{Q}$). Удобно рассматривать эту ситуацию и на уровне алгебр Ли. Говорят, что алгебра Ли L *имеет рациональную структуру*, если в некотором базисе структурные константы этой алгебры Ли рациональны. Например, как хорошо известно, любая полупростая алгебра Ли имеет рациональную структуру (для комплексных алгебр Ли в качестве подходящего базиса можно выбрать базис Шевалле, в котором структурные константы даже целочисленны). Нас будут интересовать в основном рациональные структуры для нильпотентных алгебр Ли. Ясно, что нильпотентная алгебра Ли имеет рациональную структуру тогда и только тогда, когда соответствующая ей односвязная группа Ли определена над $\mathbb{Q}$ как алгебраическая группа. Любая нильпотентная алгебра Ли размерности ≤ 6 имеет рациональную структуру. При этом до размерности 5 включительно такая рациональная структура единственна (с точностью до естественным образом определенного изоморфизма рациональных структур). Это утверждение вытекает из классификации нильпотентных алгебр Ли до размерности ≤ 6, приведенной в [18] для произвольного поля нулевой характеристики (отметим, что в множестве других известных классификаций такого рода рассматриваются только вещественные или даже только комплексные нильпотентные алгебры Ли). Для нильпотентных алгебр Ли размерности 6 может оказаться, что рациональная структура уже не единственна. Например, для алгебры Ли $n_3(\mathbb{R})\oplus n_3(\mathbb{R})$ (группа Ли которой была использована в примере Смейла, указанном выше) имеется счетное число попарно неизоморфных рациональных структур. Кроме этой алгебры Ли в размерности 6 есть еще ровно четыре нильпотентные алгебры Ли, на которых рациональная структура не единственна. Их описание см., например, в [18], причем там, как и в [19], допущена неточность: не указано, что бесконечное число таких структур имеют и алгебры Ли, обозначенные через $g_{6,14}$, $g_{6,18}$ (в [18] нужно для этих алгебр Ли добавить условие $c \notin k^2$, как это сделано для алгебр Ли $g_{6,5}$ и $g_{6,10}$).

Пусть N — односвязная нильпотентная группа Ли, содержащая некоторую решетку Γ. Тогда известно, что подгруппа $N_{\mathbb{Z}}$ целых точек в группе Ли N (рассматриваемой как алгебраическая группа, определенная над $\mathbb{Q}$) соизмерима с Γ, т. е. их пересечение имеет конечный индекс в каждой из них. Нетрудно проверить, что соответствующие соизмеримым решеткам в некоторой односвязной нильпотентной группе Ли компактные нильмногообразия имеют или не имеют диффеоморфизмы Аносова только одновременно. Поэтому для наших целей можно ограничиться рассмотрением компактных нильмногообразий с точностью до конечнолистного накрытия (соответствующего переходу к некоторой подгруппе конечного индекса в решетке).

Для дальнейшего нам будет важно изучить пересечения решеток в нильпотентных группах Ли N с некоторыми специальными нормальными подгруппами в N.

Обозначим через $C^k(N)$ члены убывающего центрального ряда группы Ли N: $C^1(N)=[N,N], C^2(N)=[N,C^1(N)],\dots,C^k(N)=[C^{k-1}(N),N],\dots$. Аналогично пусть $C_k(N)$ — члены возрастающего центрального ряда (первым членом является $C_1(N)=Z(N)$ — центр группы Ли N). Наконец, пусть $D^k(N)$ — члены ряда коммутантов ($D^1(N)=[N,N],\dots D^k(N)=[D^{k-1}(N),D^{k-1}(N)],\dots$). Известно, что в произвольной группе Ли N все члены введенных выше рядов всегда являются подгруппами Ли. Если же N нильпотентна, то они будут даже алгебраическими подгруппами. Аналогичные понятия вводятся для алгебр Ли, а также для произвольных абстрактных групп. Для удобства формулировок некоторых последующих результатов нам полезно ввести следующее

Определение. *Естественным идеалом* алгебры Ли L будем называть всякое пересечение любого числа членов рядов идеалов $C^k(L)$, $C_k(L)$, $D^k(L)$. *Естественной нормальной подгруппой* в группе Ли N будем называть пересечение любого числа членов рядов $C^k(N)$, $C_k(N)$, $D^k(N)$.

Отметим, что естественные идеалы (соответственно подгруппы Ли) являются характеристическими, т. е. инвариантными относительно любого автоморфизма исходной алгебры Ли (соответственно группы Ли). Для случая нильпотентных групп Ли естественные нормальные подгруппы являются связными подгруппами Ли, замкнутыми в топологии Зарисского. Следующее утверждение является естественным обобщением хорошо известных свойств решеток в нильпотентных группах Ли.

Теорема 3. *Пусть N — односвязная нильпотентная группа Ли, а Γ — некоторая решетка в ней. Тогда пересечение Γ с любой естественной нормальной подгруппой $F \subset N$ является решеткой в F.*

Доказательство. Известно, что утверждение теоремы 3 справедливо для членов каждого из указанных выше рядов в отдельности. Доказательство этого может быть, например, основано на использовании указанной выше естественной алгебраической структуры на N. Докажем вначале для примера, что $\Gamma \cap C_1(N) = Z(\Gamma)$ — решетка в $Z(N)$. Для этого вспомним, что Γ соизмерима с $N_{\mathbb{Z}}$. Подгруппа $Z(N)$ определена над $\mathbb{Q}$, так что $Z(N)_{\mathbb{Z}}$ — решетка в $Z(N)$. Но $N_{\mathbb{Z}} \cap Z(N) = Z(N)_{\mathbb{Z}}$, а потому и пересечение с $Z(N)$ решетки Γ, соизмеримой с $N_{\mathbb{Z}}$, тоже будет решеткой в $Z(N)$. Из этого рассуждения также видно, что $Z(\Gamma)$ — решетка в $Z(N)$. Аналогично доказывается, что любой член любого из трех указанных выше рядов нормальных подгрупп в группе Γ будет решеткой в соответствующей нормальной подгруппе Ли группы Ли N. Более того, подобное утверждение по аналогичным причинам справедливо и для произвольной естественной нормальной подгруппы в Γ. Она будет решеткой в соответствующей естественной нормальной подгруппе группы Ли N. Сказанное доказывает, в частности, и утверждение теоремы 3.

Следует отметить, что утверждение теоремы 3 (как и основанные на ней некоторые другие, приведенные ниже, утверждения) справедливо и в более общем случае, например для решеток в треугольных группах Ли (т. е. групп Ли, для которых матрицы присоединенного представления имеют только вещественные собственные значения (см., например, обзор [17]). Это без труда доказывается методами, использованными, например, в работе автора [20].

Утверждение теоремы 3 может быть обобщено еще в одном направлении. Пусть $w(X_1, X_2, \dots, X_m)$ — некоторое слово в алгебре Ли L, т. е. выражение, составленное из переменных X_i с помощью операций коммутирования. Назовем идеал в алгебре Ли L *вербальным*, если он порожден значениями некоторого фиксированного слова w на всевозможных элементах алгебры Ли L. Члены $C^k(L)$ и $D^k(L)$ двух из трех указанных выше рядов идеалов являются, очевидно, вербальными. Понятие вербальности можно применить и для случая групп (лиевых и абстрактных). Приведенное в доказательстве теоремы 3 рассуждение на самом деле доказывает, что пересечение решетки $\Gamma \subset N$ в нильпотентной группе Ли N будет решеткой и для любой вербальной подгруппы Ли. Более того, можно так обобщить понятие вербальности (введя в него кванторы), чтобы и члены ряда возрастающего центрального ряда C_k тоже можно было рассматривать как вербальные. Тогда теорема 3 обобщается и на пересечения решеток с такими обобщенными вербальными подгруппами Ли в односвязной нильпотентной группе Ли.

Определение. Пусть N — некоторая группа Ли, а F_1, F_2 — некоторые ее естественные нормальные подгруппы, причем F_1 содержится в F_2 (тогда она, очевидно, будет нормальна в F_2). Фактор-группу F_1/F_2 назовем *слоевой группой для N*.

Очевидно, что любая слоевая группа для нильпотентной группы Ли N будет связной нильпотентной группой Ли. Можно расширить понятие слоевой группы, рассматривая в качестве F_1, F_2 в определении произвольные вербальные подгруппы Ли, описанные выше.

Аналогичные слоевые понятия вводятся и для алгебр Ли, и для произвольных абстрактных групп.

Из теоремы 3 и общих свойств решеток в группах Ли (см., например, [18, 21]) получаем

Следствие 1. *Пусть N — односвязная нильпотентная группа Ли, а Γ — решетка в N. Тогда в произвольной слоевой группе Ли, построенной для N, соответствующая решетке слоевая подгруппа является решеткой.*

Точнее, если $F_1 \subset F_2$ — две естественные нормальные подгруппы в N, то $\Gamma \cap F_1/\Gamma \cap F_2$ — решетка в F_1/F_2.

На основании приведенных выше результатов о решетках в нильпотентных группах Ли можно получить немало частных необходимых условий существования гиперболических автоморфизмов нильпотентных групп Ли и диффеоморфизмов Аносова на соответствующих нильмногообразиях. Мы перечислим лишь некоторые из них. Линейное преобразование будем называть *унимодулярным*, если модуль его определителя равен 1 (мы здесь несколько отошли от стандартного понимания унимодулярности, когда предполагается, что сам определитель должен равняться единице). Автоморфизм группы Ли будем называть унимодулярным, если унимодулярен индуцированный автоморфизм (являющийся линейным преобразованием) соответствующей алгебры Ли.

Предложение 1. *Пусть f — алгебраический диффеоморфизм Аносова на нильмногообразии N/Γ. Тогда автоморфизм (очевидно, гиперболический) алгебры Ли $L(N)$ группы Ли N унимодулярен.*

Это сразу вытекает из такой леммы.

Лемма 3. *Автоморфизм группы Ли G, сохраняющий некоторую решетку Γ в ней, унимодулярен.*

Доказательство. Хорошо известно похожее по форме утверждение об унимодулярности любой локально компактной топологической группы, содержащей решетку (детали см., например, в [18, 21]). Унимодулярность же автоморфизма решетки можно вывести отсюда следующим образом. Рассмотрим вспомогательную группу $G^\star$ — расширение заданной группы Ли с помощью бесконечной циклической группы, порожденной рассматриваемым автоморфизмом. Ясно, что $G^\star$ — локально компактная топологическая группа (на самом деле она является группой Ли, хотя и несвязной). В $G^\star$ рассмотрим подгруппу $\Gamma^\star$, порожденную тем же автоморфизмом и решеткой Γ. Ясно, что $\Gamma^\star$ — дискретная подгруппа в $G^\star$ и что фактор-пространство $G^\star/\Gamma^\star$ компактно (так как оно, очевидно, диффеоморфно G/Γ. В силу указанного выше свойства решеток в локально компактных группах получаем, что $G^\star$ унимодулярна. Рассмотрим теперь действие исходного автоморфизма группы G как внутренний автоморфизм группы $G^\star$, ограниченный на G. Так как указанный внутренний автоморфизм тривиально действует на $G^\star/G$, получается, что его действие на G унимодулярно.

Можно также для доказательства унимодулярности применить буквально те же рассуждения, которые обычно используются для доказательства унимодулярности группы Ли, содержащей решетку (см., например, [17, 21]).

Из предложения 1 следует, что и любой автоморфизм, индуцированный на произвольной слоевой подгруппе, тоже унимодулярен, так как автоморфизм исходной группы Ли N индуцирует (в силу характеристичности всех естественных нормальных делителей) и автоморфизм этой слоевой группы. При этом индуцированный автоморфизм должен сохранять соответствующую решетку. Это же касается и обобщений слоевых групп, построенных с помощью вербальных подгрупп (см. выше).

Предложение 2. *Пусть $M = N/\Gamma$ — компактное нильмногообразие, на котором существует диффеоморфизм Аносова. Тогда размерность любой нетривиальной слоевой подгруппы для N не меньше чем 2.*

Доказательство. Предположим, что для N имеется одномерная слоевая группа. Эта группа абелева и изоморфна $\mathbb{R}$. Так как естественные нормальные делители инвариантны относительно любого автоморфизма группы, автоморфизм группы Ли N, связанный с диффеоморфизмом Аносова на M, порождает автоморфизм этой слоевой группы. Но индуцированный на ней автоморфизм сохраняет в ней индуцированную решетку (см. следствие 1) и поэтому должен быть унимодулярным (см. предложение 1), а потому либо тождественным, либо антиподальным (других унимодулярных автоморфизмов прямой не существует). В обоих случаях получаем, что автоморфизм имеет характеристическое значение, равное по модулю 1. Это противоречит гиперболичности автоморфизма группы Ли N. Следовательно, размерность любой слоевой группы не менее чем 2.

Отсюда, в частности, вытекает, что $\dim Z(N) \geq 2, \dim C_2(N) \geq 4$ и т. д. На этом пути по индукции получаем следующее неравенство (это утверждение приведено без явного доказательства в [8]).

Следствие 2. *В условиях предложения* $2\dim(N) \geq 2(c+1)$, *где c — класс нильпотентности группы Ли N.*

Автоморфизм нильпотентной алгебры Ли, порожденный алгебраическим диффеоморфизмом Аносова на компактном нильмногообразии, должен быть рациональным, т. е. должен сохранять естественную рациональную структуру (связанную с наличием решетки в соответствующей односвязной группе Ли) на этой алгебре Ли. Сложность построения алгебраических диффеоморфизмов Аносова связана в основном с тем, что не так просто найти автоморфизм алгебры Ли, сочетающий свойства гиперболичности, унимодулярности и рациональности.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — характеристические корни действия некоторого автоморфизма f нильпотентной группы Ли N, сохраняющего решетку, на абелевой односвязной группе Ли $N/[N,N]$ (или на соответствующей абелевой алгебре Ли). В силу унимодулярности автоморфизма произведение всех этих чисел по модулю равно 1 (т. е. равно 1 или -1). Переходя от f к f^2 (автоморфизму гиперболическому и рациональному, если таковым был f), мы можем считать, что указанное произведение равно 1.

Рассмотрим теперь действие f на слоевых абелевых группах Ли вида $C^k(N)/C^{k+1}(N)$. Ясно, что характеристическими корнями этого действия будут некоторые из произведений $k+1$ экземпляров указанных выше характеристических чисел. В частности, при $k = c$ (где c — класс нильпотентности группы Ли N) должно существовать характеристическое значение, равное 1. Но это невозможно. Если алгебра Ли $L(N)$ группы Ли N является свободной нильпотентной некоторого класса c, то из сказанного выше вытекает, в частности, необходимость в рассматриваемой нами ситуации неравенства $\dim N/[N,N] \geq c$ (этот результат упоминается и используется для групп Ли со свободными нильпотентными алгебрами Ли в [22–24]).

Предложение 3. *Пусть на компактном нильмногообразии $M = N/\Gamma$ существует диффеоморфизм Аносова. Тогда на соответствующей алгебре Ли $L(N)$ существует полупростой (т. е. вполне приводимый) гиперболический автоморфизм Аносова, сохраняющий рациональную структуру на $L(N)$, соответствующую решетке Γ. Также существует и некоторый унимодулярный расщепимый (т. е. триангулируемый) над $\mathbb{R}$ автоморфизм алгебры Ли $L(N)$ (но не обязательно сохраняющий указанную рациональную структуру).*

То же верно и для соответствующих гиперболических дифференцирований алгебры Ли $L(N)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{Aut}(N)$ — автоморфизм нильпотентной односвязной группы Ли N, порождающий диффеоморфизм Аносова на нильмногообразии M. Так как N имеет решетку, то N как алгебраическая группа определена над $\mathbb{Q}$ (и ее алгебра Ли имеет $\mathbb{Q}$-структуру). Но тогда и алгебраическая группа $\mathrm{Aut}(N)$ тоже будет определена над $\mathbb{Q}$. Имеется разложение $\mathrm{Aut}(N) = F \cdot U$ в полупрямое произведение редуктивной группы F и унипотентного радикала U, причем это разложение тоже определено над $\mathbb{Q}$. Автоморфизм f тогда имеет разложение $f = f_s \cdot f_u$ в произведение двух коммутирующих между собой автоморфизмов — полупростого f_s и унипотентного f_u (фактически это полупростая и унипотентная компоненты разложения Жордана для f). Элемент $f_s \in F$ определен над $\mathbb{Q}$, т. е. он принадлежит группе $F_{\mathbb{Q}}$ рациональных точек алгебраической группы F. Ясно, что f_s гиперболичен тогда и только тогда, когда гиперболичен f, то же верно и для условия унимодулярности. Из всего сказанного вытекает, что автоморфизм f_s порождает диффеоморфизм Аносова на N/Γ.

Далее, рассмотрим некоторый тор в $T \subset F$, содержащий f_s. Как и всякий тор, определенный над $\mathbb{R}$, он допускает разложение в почти прямое произведение $T = T_a \cdot T_d$ расщепимого над $\mathbb{R}$ тора T_d (диагонализируемого над $\mathbb{R}$) и анизотропного тора T_a (группа вещественных точек которого является компактной абелевой группой Ли, см., например, [25, гл. 12]) Пусть $f_s = f_a \cdot f_d$, $f_a \in T_a$, $f_d \in T_d$. Ясно, что автоморфизм f_d гиперболичен и унимодулярен (так как характеристические числа элементов из T_a чисто мнимые). Это и дает нам нужный автоморфизм группы Ли N.

Отметим, что во второй части предложения 3 доказать существование не просто расщепимого автоморфизма, но и сохраняющего рациональную структуру, в общем случае не удается. Это связано с тем, что разложение тора на расщепимую и анизотропную (компактную) компоненту определено над $\mathbb{R}$, но не обязательно над $\mathbb{Q}$. Чтобы построить иллюстрирующий это пример, достаточно рассмотреть группу единиц некоторого алгебраического поля и ее алгебраическое замыкание — некоторый тор T. Он будет определен над $\mathbb{Q}$, но группа единиц в него в общем случае вложена диагонально (если поле не абсолютно вещественное или абсолютно мнимое) и компоненты T_a, T_d над $\mathbb{Q}$ определены не будут. Эта конструкция напоминает построение арифметических решеток в абелевых алгебраических группах (см., например, [18, гл. 3, §6, пример 6.5.1]).

В силу предложения 3 начинать поиск автоморфизма заданной нильпотентной группы Ли N, порождающего диффеоморфизм Аносова на некотором подходящем нильмногообразии N/Γ, нужно с построения унимодулярного расщепимого гиперболического автоморфизма. Расщепимые автоморфизмы существуют у нильпотентной односвязной группы Ли N тогда и только тогда, когда она не является характеристически нильпотентной, т. е. когда ее группа автоморфизмов не унипотентна. После этого нужно пытаться найти на алгебре Ли $L(N)$ инвариантную относительно найденного автоморфизма рациональную структуру, а если такой нет, то добавлением некоторой анизотропной компоненты (т. е. переходом от вещественных собственных значений к комплексным с той же вещественной частью) изменить построенный выше автоморфизм так, чтобы инвариантная рациональная структура существовала. Ясно, что указанная программа далеко не всегда будет приводить к цели, так как на многих нильмногообразиях диффеоморфизмов Аносова просто не существует.

§ 3. Некоторые специальные классы нильмногообразий

Переходим теперь к рассмотрению некоторых классов односвязных нильпотентных групп Ли, на нильмногообразиях для которых обычно не существует диффеоморфизмов Аносова. В некоторых случаях будут даны все же примеры диффеоморфизмов Аносова. Однако основные позитивные результаты — о существовании диффеоморфизмов Аносова на некоторых классах нильмногообразий — предполагается опубликовать позже.

Нильпотентные группы Ли не поддаются пока разумному общему описанию и нетривиальной классификации. Поэтому в последние десятилетия стали выделять отдельные специальные классы нильпотентных групп Ли и алгебр Ли. Среди них филиформные алгебры Ли и различные их обобщения, стандартные алгебры Ли — нильрадикалы параболических подалгебр в полупростых алгебрах Ли, и многие другие. Мы собираемся рассмотреть представителей некоторых из этих классов на предмет наличия на соответствующих нильмногообразиях диффеоморфизмов Аносова.

1. Филиформные группы Ли и соответствующие нильмногообразия. Алгебра Ли называется *филиформной*, если все факторы ее убывающего центрального ряда, кроме первого, одномерны, а для первого фактор двумерен, т. е. $\dim L/C^1(L) = 2$. Например, алгебра Ли, которая в базисе $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, задается соотношениями $[e_1, e_i] = e_{i+1}$ (мы полагаем $e_{n+1} = 0$), филиформна. В силу доказанного выше (предложение 2) на филиформной алгебре Ли не существует гиперболических автоморфизмов, так как, например, ее центр одномерен. Имеются различные обобщения понятия филиформности (квазифилиформные, k-филиформные алгебры Ли и др.). Например, иногда отказываются от требования $\dim L/C^1(L) = 2$ (сохраняя условия одномерности всех остальных факторов центрального ряда). Но и в этом случае алгебра Ли L тоже не имеет гиперболических автоморфизмов. Вообще, если хотя бы одна из слоевых алгебр для L одномерна, то на алгебре Ли L нет гиперболических автоморфизмов.

Однако уже на прямой сумме двух филиформных алгебр Ли гиперболические автоморфизмы могут существовать. Например, алгебра Ли $n_3(\mathbb{R})$ филиформна, а ведь именно для прямой суммы двух экземпляров такой алгебры Ли и был построен первый пример Смейла (см. выше). Ниже мы рассмотрим другие примеры подобного рода.

2. Стандартные нильпотентные алгебры Ли. Это очень широкий класс нильпотентных алгебр Ли, интересных тем, что для них можно достаточно явно провести многие вычисления (чего не скажешь о большинстве более «диких» нильпотентных алгебр Ли).

Начнем с общих определений для полупростых комплексных алгебр Ли. Для вещественных полупростых алгебр Ли определения несколько сложнее, мы коснемся их позже.

Пусть L — полупростая комплексная алгебра Ли, h — ее подалгебра Картана, R — система корней относительно h, S — система простых корней, R^+ — система положительных корней (подробнее см., например, [13]). Выберем для каждого корня $\alpha \in \mathbb{R}$ ненулевой элемент e_α из корневого (одномерного в комплексном случае) подпространства E_α. Имеем коммутационные соотношения $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha,\beta} \cdot e_{\alpha+\beta}$, если $\alpha+\beta \in R$. Если $\alpha+\beta = 0$, то $[e_\alpha, e_\beta] = h_\alpha \in h$, а если $\alpha+\beta \neq 0$ и $\notin R$, то $[e_\alpha, e_\beta] = 0$. Коэффициенты $N_{\alpha,\beta} \neq 0$ можно выбрать целыми (см., например, [13]). Это, в частности, означает наличие рациональной формы у любой полупростой алгебры Ли L (комплексной, хотя для вещественных полупростых алгебр Ли это утверждение тоже верно, но менее известно).

Выберем и зафиксируем некоторую подсистему S_1 в системе простых корней S. Обозначим через Δ_1 множество корней, выражающихся через $S \setminus S_1$, положим $\Delta_2 = R \setminus \Delta_1, \Delta_2^+ = \Delta_2 \cap R^+$. Легко проверить, что подпространство

$$r = r(S_1) = h + \sum_{\alpha \in \Delta_1 \cup \Delta_2^+} E_\alpha$$

является подалгеброй в алгебре Ли L, причем параболической, т. е. содержащей борелевскую подалгебру $b = r(S)$, соответствующую подсистеме всех простых корней. Редуктивная часть этой параболической подалгебры равна

$$f = f(S_1) = h + \sum_{\alpha \in \Delta_1} E_\alpha,$$

а нильрадикал равен

$$n = n(S_1) = \sum_{\alpha \in \Delta_2^+} E_\alpha.$$

Как известно, любая параболическая подалгебра в L сопряжена (относительно естественного действия сопряжениями соответствующей полупростой группы Ли) одной из построенных подалгебр $r(S_1)$. Нормализатор подалгебры n совпадает с r. В соответствии с этим наблюдением вводится понятие стандартной подалгебры Ли.

Определение. Подалгебра полупростой комплексной алгебры Ли называется *стандартной*, если ее нормализатор содержит борелевскую подалгебру (т. е. он является параболической подалгеброй).

Другими словами, стандартные подалгебры — это идеалы параболических подалгебр.

Для случая алгебры Ли $sl_n(\mathbb{C})$ понятие стандартной подалгебры Ли было впервые введено Г. Б. Гуревичем (см., например, [26]), который подробно изучил эти стандартные нильпотентные подалгебры. В общем случае это понятие введено в [27], где описано строение произвольных стандартных подалгебр Ли. Оттуда, в частности, следует, что с точностью до сопряжения число стандартных нильпотентных алгебр Ли заданной размерности конечно. Тем самым они образуют некоторый дискретный подкласс в непрерывном (начиная с размерности 7) семействе всех нильпотентных алгебр Ли. Алгебры Ли из этого подкласса удобны для проведения конкретных вычислений. Много более общих семейств нильпотентных алгебр Ли можно получить деформацией элементов этого дискретного класса.

Нас будут интересовать в основном не все стандартные подалгебры, даже нильпотентные, а только нильрадикалы параболических подалгебр (их еще иногда называют полными стандартными подалгебрами). Для них в [27] был вычислен центр. В случае нильрадикала борелевской подалгебры этот центр одномерен, он натянут на старший вектор δ. В общем случае центр порожден корневыми векторами, для которых число корней из S_1 в разложении по простым корням то же, что у старшего корня. Это утверждение позволяет выделить случаи, когда центр нильрадикала параболической подалгебры одномерен. В [27] доказано, что если система корней S_1 содержит все особые простые корни, то центр нильрадикала одномерен (натянут на старший вектор). Особые корни введены в [27] (они по другим поводам встречались и ранее); для всех простых алгебр Ли, кроме A_n, особый корень ровно один, а для A_n особые корни — это два граничных корня на диаграмме Дынкина.

Для большинства параболических подалгебр в простых комплексных алгебрах Ли их нильрадикалы не допускают гиперболических автоморфизмов, так как их центры одномерны. Для других стандартных нильпотентных подалгебр Ли вполне может оказаться, что гиперболические автоморфизмы существуют. Например, если не ограничиваться простыми алгебрами, то уже на прямом произведении алгебр Ли $n_3(\mathbb{C})$ (нильрадикалов в борелевской подалгебре алгебры Ли $sl_3(\mathbb{C})$) гиперболический автоморфизм существует (он строится так же, как в вещественном случае, использованном в примере Смейла). Вообще, тем же методом нетрудно доказать, что на прямой сумме двух изоморфных между собой градуированных рациональных алгебр Ли существует гиперболический рациональный автоморфизм. Можно привести примеры подходящих стандартных подалгебр и в простых алгебрах Ли.

Для более подробного рассмотрения нильрадикалов в параболических подалгебрах можно использовать работу [28], где явно указаны все члены убывающего центрального ряда. Аналогично можно описать и все члены возрастающего центрального ряда (по аналогии с описанием центра в [27]). На самом деле имеет место следующее утверждение, на доказательстве которого мы здесь останавливаться не будем.

Предложение 4. *Для нильрадикалов в полупростых комплексных алгебрах Ли верхний и нижний центральные ряды совпадают* (*точнее, совпадают попарно их члены, рассматриваемые, например, в порядке убывания размерности*).

Что касается произвольных стандартных подалгебр в полупростых комплексных алгебрах Ли, то здесь тоже можно выделять различные классы подалгебр, у которых имеются одномерные слойные группы и которые поэтому не имеют гиперболических автоморфизмов. Более подробно этим вопросом мы здесь заниматься не будем.

Несколько слов о вещественном случае. Для вещественных полупростых алгебр Ли тоже естественным образом вводятся понятие системы корней (относительно некоторой расщепимой над $\mathbb{R}$ подалгебры) и понятие параболической подалгебры — по определению она должна содержать некоторую максимальную треугольную подалгебру — вещественный аналог борелевской. Схемам Дынкина на смену здесь приходят схемы Сатаке (см. например, обзор [16]). Можно также рассматривать аналоги параболических подалгебр и их идеалы — стандартные подалгебры. Однако в вещественном случае не всегда корневые подпространства одномерны, что заметно усложняет изучение стандартных подалгебр в общем случае. Среди вещественных полупростых алгебр Ли можно выделить подкласс расщепимых (иногда их называют нормальными), для них картановская подалгебра будет расщепима (т. е. диагонализируема). В случае расщепимых полупростых алгебр Ли можно буквально повторять все определения и результаты, которые были даны выше в комплексном случае. Например, там тоже выделяются стандартные подалгебры (которые строятся по подсистемам простых корней) и описывается их строение по аналогии с [27], вводятся особые корни и т. д. В частности, все это касается и примеров, в которых не существует гиперболических автоморфизмов.

Из сказанного выше получаем

Предложение 5. *Пусть L — расщепимая вещественная или любая комплексная простая алгебра Ли, а n — нильрадикал некоторой параболической подалгебры, задаваемой подмножеством S_1 простых корней. Если S_1 содержит все особые корни алгебры Ли L, то алгебра Ли n не имеет гиперболических автоморфизмов.*

Особые корни: для серии A_l это α_1, α_l, для B_l — α_2, для C_l — α_1, для D_l — α_2, для исключительных алгебр G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 это $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_8$ соответственно (в нумерации, использованной в [13]).

3. Важным классом нильпотентных алгебр Ли является класс 2-нильпотентных алгебр Ли или, что то же самое, алгебр класса нильпотентности 2. Для таких алгебр Ли имеем $[L, [L, L]] = 0$. Это очень обширный и интересный класс нильпотентных алгебр. Многие задачи, связанные с ним, имеют прямую связь с задачами линейной алгебры, в том числе, к сожалению, и с теми из них, которые называют «дикими». А именно, если обозначить $U = [L, L], V = L/[L, L]$, то задание структуры алгебры Ли на L определяется линейным отображением $U \wedge U \to V$. Тем самым исследование таких алгебр Ли сводится к задаче тензорной алгебры. В частности, такого рода алгебры Ли до сих пор не поддаются какой-либо разумной классификации. Нетрудно показать, что на большинстве 2-нильпотентных алгебр Ли не существует рациональной структуры (а потому им не соответствуют никакие компактные нильмногообразия, а уж тем более диффеоморфизмы Аносова). Дело в том, что множество алгебр Ли с рациональной структурой счетно, а как нетрудно проверить, существуют непрерывные (континуальные) семейства 2-нильпотентных алгебр Ли. Однако стоит отметить, что 2-нильпотентных алгебр Ли ограниченной размерности с одномерным центром конечное число. Это алгебры Гейзенберга $h_p(\mathbb{R})$, в подходящем базисе $x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots, x_p, y_p, z$ они задаются соотношениями $[x_i, y_i] = z$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Если центр 2-нильпотентной алгебры Ли двумерен, то для небольших размерностей их число конечно, но с ростом размерности здесь появляются и континуальные семейства неизоморфных между собой алгебр Ли.

Обозначим через $T(k, l)$ класс 2-нильпотентных алгебр Ли L размерности $n = k + l$, для которых $\dim([L, L]) = l$, $\dim(L/[L, L] = k$. Ясно, что алгебры Гейзенберга лежат в $T(k, 1)$. Некоторые результаты об алгебрах Ли $T(k, l)$ малой размерности будут приведены ниже.

В работе [28] приведен пример 2-нильпотентной алгебры Ли, которая не имеет гиперболических автоморфизмов. Там векторное пространство V пятимерно, $L = V + (V \wedge V)/W$, где W — подпространство в $V \wedge V$, натянутое на $e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3$, $e_1 \wedge e_5 - e_2 \wedge e_4$, $e_2 \wedge e_5 - e_3 \wedge e_4$. Однако на некоторых 2-нильпотентных алгебрах Ли гиперболические автоморфизмы существуют. Например, они существуют на свободных 2-нильпотентных алгебрах Ли, на прямых произведениях двух экземпляров любой алгебры Гейзенберга и др.

4. Прямые произведения нильмногообразий. Пусть $M_i = N_i/\Gamma_i$, $i = 1, 2$, — два компактных нильмногообразия. Если на M_1 и на M_2 существуют диффеоморфизмы Аносова, то диффеоморфизм Аносова существует, конечно, и на их прямом произведении $M = M_1 \times M_2$. Для соответствующих алгебр Ли все аналогично: наличие гиперболических автоморфизмов на L_1 и L_2 влечет автоматически его наличие и для $L_1 \oplus L_2$, при этом сохраняются все хорошие свойства исходных автоморфизмов (унимодулярность, сохранение ими рациональных структур и т. д.). А вот обратные задачи выглядят уже не столь очевидно. Например, пусть на прямой сумме $L_1 \oplus L_2$ действует некоторый унимодулярный гиперболический автоморфизм. Верно ли, что тогда и на обоих прямых слагаемых тоже имеются унимодулярные гиперболические автоморфизмы? Аналогично ставится вопрос и для диффеоморфизмов Аносова на прямом произведении нильмногообразий.

В общем случае ответы на поставленные вопросы отрицательны. Например, на окружности S^1 диффеоморфизмов Аносова, конечно, нет, а на прямом произведении двух окружностей, т. е. на торе $T^2 = S^1 \times S^1$, диффеоморфизмы Аносова, как мы знаем, существуют. Аналогично одномерная алгебра Ли унимодулярных гиперболических автоморфизмов не имеет, а двумерная абелева (прямая сумма двух одномерных) имеет их очень много. Еще пример — для диффеоморфизмов Аносова — прямая сумма двух экземпляров алгебры Ли $n_3(\mathbb{R})$ (см. выше пример Смейла). Однако оказывается, что если исключить специальный случай — наличие у нильпотентной алгебры Ли прямого абелевого слагаемого, то ответ для случая гиперболических автоморфизмов оказывается положительным. Это позволяет отбраковывать алгебры Ли, непригодные для построения с их помощью диффеоморфизмов Аносова, раскладывая их в прямые суммы и анализируя по отдельности прямые слагаемые.

Алгебра Ли L называется *несократимой*, если ее нельзя представить в виде прямой суммы $L_1 \oplus A$, где A — некоторая абелева алгебра Ли положительной размерности. Например, алгебра Ли $n_3(\mathbb{R})$ несократима, а вот одномерная алгебра Ли сократима (берется $L_1 = \{0\}$). Нетрудно понять, что алгебра Ли L несократима тогда и только тогда, когда ее центр $Z(L)$ содержится в коммутанте $[L, L]$.

Предложение 6. *Прямая сумма $L = \oplus_i L_i$ несократимых алгебр Ли имеет гиперболический автоморфизм тогда и только тогда, когда его имеет каждое из прямых слагаемых.*

Если этот гиперболический автоморфизм сохраняет некоторую рациональную структуру на L, а разложение этой алгебры Ли в прямую сумму определено над $\mathbb{Q}$, то и соответствующие ему гиперболические автоморфизмы прямых слагаемых тоже можно выбрать рациональными.

Доказательство. В одну сторону утверждения предложения 6 очевидны: автоморфизмы прямых слагаемых дают нужные автоморфизмы прямой суммы. Докажем обратное, предположив наличие гиперболического (а потом дополнительно и рационального) автоморфизма на алгебре Ли L.

Как отмечалось выше, можно заменить рассмотрение гиперболических автоморфизмов алгебры Ли рассмотрением гиперболических дифференцирований. Далее, достаточно рассматривать только полупростые (т. е. вполне приводимые) гиперболические дифференцирования. В разложении Шевалле — Жордана (алгебры Ли $\mathrm{Der}(L)$, являющейся, очевидно, алгебраической алгеброй Ли) для произвольного дифференцирования это будет полупростая компонента исходного дифференцирования. Алгебра Ли дифференцирований $\mathrm{Der}(L)$ имеет в силу [29] разложение в сумму подалгебры $\Sigma_i \mathrm{Der}(L_i)$ и идеала $\sum\limits_{i\neq j} \mathrm{Der}(L_i, L_j)$. Здесь $\mathrm{Der}(L_i, L_j) = \{f \in \mathrm{End}(L) \mid f(L_k) = \{0\}\}$ при $k \neq i$, $f(L_i) \in Z(L_j)$, $f([L_i, L_i]) = \{0\}\}$. Из несократимости алгебр Ли L_i получаем, что $Z(L_i) \in [L_i, L_i]$. Но тогда очевидно, что композиция двух дифференцирований из $\mathrm{Der}(L_i, L_j)$ и $\mathrm{Der}(L_k, L_l)$ равна нулю. Это, в частности, означает, что идеал $\sum\limits_{i\neq j} \mathrm{Der}(L_i, L_j)$ абелев и потому содержится в нильрадикале алгебры $\mathrm{Der}(L)$. Близкое утверждение может быть найдено в [30] при доказательстве теоремы 1 (однако в доказательстве там имеются небольшие опечатки). Из доказанного следует, что редуктивная часть алгебраической алгебры Ли $\mathrm{Der}(L)$ равна прямой сумме редуктивных частей алгебр Ли дифференцирований прямых слагаемых L_i. Спектр полупростого (а потому и любого) элемента из $\mathrm{Der}(L)$ есть объединение спектров его ограничений на прямые слагаемые. Поэтому гиперболическое дифференцирование рассматриваемой прямой суммы алгебр Ли порождает гиперболические дифференцирования каждой из них. Это и доказывает первую часть предложения.

Что касается второй части доказываемого предложения, то из сказанного выше также выводится, что редуктивную часть группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(L)$ алгебры Ли L можно считать разложенной в прямое произведение редуктивных частей групп автоморфизмов прямых слагаемых (переходя при необходимости к подгруппе конечного индекса), причем это прямое произведение определено над $\mathbb{Q}$. Отсюда следует, что автоморфизмы f_i прямых слагаемых, соответствующие исходному рациональному автоморфизму f алгебры Ли L, тоже определены над $\mathbb{Q}$.

Однако существование унимодулярного гиперболического автоморфизма на прямой сумме несократимых алгебр Ли не обязательно гарантирует наличие унимодулярных гиперболических дифференцирований на прямых слагаемых. Именно этим объясняется тот факт, что на $n_3(\mathbb{R})$ таких дифференцирований нет, а на $n_3(\mathbb{R}) \oplus (n_3\mathbb{R})$ есть. Вторая часть предложения 6 указывает, что построение рациональных автоморфизмов прямых слагаемых — менее сложная проблема, чем унимодулярного. Некоторые полезные результаты для перехода от произвольного гиперболического автоморфизма к другому, сохраняющему некоторую решетку, можно найти в [23].

Рассмотрим теперь приводимые нильпотентные алгебры Ли. Ясно, что любая алгебра Ли может быть представлена (не обязательно строго единственным образом, но единственным с точностью до изоморфизма) в виде прямой суммы $L_1 \oplus A$, где алгебра Ли L_1 несократима, а A — некоторая абелева алгебра Ли (она является дополнением к $[L, L]$ в $Z(L)$ и тривиальна тогда и только тогда, когда L несократима).

Предложение 7. *Пусть $L = L_1 \oplus A$ — разложение алгебры Ли L в прямую сумму некоторой несократимой алгебры Ли L_1 и абелевой алгебры Ли A.*

Если $\dim(A) > 1$, *то алгебра Ли* L *имеет гиперболический автоморфизм (или дифференцирование) тогда и только тогда, когда его имеет* L_1. *Если автоморфизм алгебры Ли* L *сохраняет некоторую рациональную структуру на* L, *то и порожденный им автоморфизм алгебры Ли* L_1 *(тоже, как нетрудно понять, имеющей тогда некоторую рациональную структуру), можно считать рациональным.*

В случае, если $\dim(A) = 1$, *алгебра Ли* L *никогда не имеет гиперболических дифференцирований.*

Доказательство. Вначале, как и выше, заметим, что достаточно ограничиться рассмотрением гиперболических дифференцирований алгебр Ли, причем только полупростых дифференцирований.

Из $L = L_1 \oplus A$ в силу [31] имеем $\mathrm{Der}(L) = (\mathrm{Der}(L_1) \oplus (\mathrm{End})(A)) + (\mathrm{Der}(L_1, A) + \mathrm{Der}(A, L_1)$. Здесь $\mathrm{Der}(L_1) \oplus \mathrm{End}(A) = \mathrm{Der}(L_1) \oplus \mathrm{Der}(A)$ — прямая сумма алгебр Ли дифференцирований прямых слагаемых алгебры Ли L. Далее, $\mathrm{Der}(L_1, A)$ и $\mathrm{Der}(A, L_1)$ являются, очевидно, абелевыми идеалами в $\mathrm{Der}(L)$, поэтому и их сумма $U = \mathrm{Der}(L_1, A) \oplus \mathrm{Der}(A, L_1)$ тоже является идеалом в $\mathrm{Der}(L)$ (не всегда абелевым, но обязательно разрешимым как сумма двух абелевых идеалов). Докажем, что в рассматриваемом случае алгебра Ли U будет 2-нильпотентна (этот факт интересен и сам по себе).

Пусть $d \in \mathrm{Der}(L_1, A), \delta \in \mathrm{Der}(A, L_1)$. Отображение $d : L \to A$ тривиально на A и переводит $[L_1, L_1]$ в нуль. Отображение $\delta : L \to L_1$ тривиально на L_1 и переводит A в $Z(L_1)$. По условию $Z(L_1) \subset [L_1, L_1]$. Отсюда вытекает, что композиция $d \circ \delta$ равна нулю. Композиция $\delta \circ d$ отображает L_1 в $Z(L_1)$ и тривиальна на $[L_1, L_1]$. Рассмотрим коммутатор $[d, \delta] = d \circ \delta - \delta \circ d$, который, как следует из сказанного выше, равен $-\delta \circ d$ и для нильпотентных алгебр Ли L может быть отличен он нуля (так как для них $L \neq [L, L]$ и центр $Z(L)$ нетривиален). Вычислим теперь коммутаторы второго порядка. Рассмотрим, например, элемент $[[d, \delta], d]$. Он равен $-\delta \circ d \circ d$. Ясно, что $d \circ d = 0$, поэтому рассматриваемый коммутатор равен нулю. Возьмем еще один коммутатор — $[[d, \delta], \delta]$. Он равен $-\delta \circ d \circ \delta$, но $d \circ \delta = 0$ (см. выше), поэтому и этот коммутатор нулевой. Разбор остальных видов коммутаторов столь же прост. В результате получаем, что $[[U, U], U] = 0$, т. е. U является 2-нильпотентной алгеброй Ли. В частности, U содержится в нильрадикале алгебры Ли $\mathrm{Der}(L)$. Это означает, что при рассмотрении полупростых дифференцирований нам нет необходимости учитывать U и все сводится к рассмотрению $\mathrm{Der}(L_1) \oplus \mathrm{End}(A)$.

Если L_1 имеет гиперболическое дифференцирование, то его имеет и $L = L_1 \oplus A$, если $\dim(A) > 1$ (так как $\mathbb{R}^2$ такие дифференцирования, конечно, имеет). Обратно, если L имеет (полупростое) гиперболическое дифференцирование, то в силу доказанного выше гиперболические дифференцирования (полупростые) имеют A (откуда следует, что $\dim(A) > 1$) и L_1. Из приведенных рассуждений также вытекает, что если L_1 несократима, то $L_1 \oplus \mathbb{R}$ не имеет гиперболических дифференцирований (так как их не имеет одномерная абелева алгебра Ли $\mathbb{R}$).

Вопрос о рациональности автоморфизма алгебры Ли L_1 решается без труда так же, как при доказательстве предложения 6.

Вопрос о существовании унимодулярного автоморфизма на прямых слагаемых более сложен и здесь рассматриваться не будет.

Рассмотрим некоторые простые примеры. Алгебра Ли $h_p(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ (где $h_p(\mathbb{R})$ — алгебра Гейзенберга), как следует из сказанного выше, не имеет гиперболических автоморфизмов (однако сама $h_p(\mathbb{R})$ гиперболические автоморфизмы, хоть и не унимодулярные, имеет). Поэтому на соответствующем ей нильмногообразии (которое строится по естественной $\mathbb{Q}$ структуре на этой группе) не существует диффеоморфизмов Аносова. Еще пример: диффеоморфизмов Аносова нет на любом нильмногообразии группы Ли $N_3(\mathbb{R}) \times N_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, тогда как именно на нильмногообразии группы Ли $N_3 \times N_3$ был построен первый «неторический» диффеоморфизм Аносова.

5. Нильмногообразия размерности ≤ 7**.** На нильмногообразиях размерности ≤ 6 все диффеоморфизмы Аносова описаны в [8]. Рассмотрим здесь вкратце случай размерности 7. Существуют несколько классификаций семимерных нильпотентных алгебр Ли, большинство из которых для комплексных алгебр Ли. В [32] приведена классификация и в вещественном случае, но, насколько мне известно, в этой (как чуть ли не во всех других) классификации имеются некоторые неточности. Поэтому здесь будут рассматриваться нильпотентные алгебры размерности 7 с точностью до возможных неточностей классификации, приведенной в [32].

Пусть L — нильпотентная алгебра Ли размерности 7. Тогда из следствия 2 вытекает, что если она имеет гиперболический унимодулярный автоморфизм, то ее класс нильпотентности не более чем 2 (иначе будет $7 < 2(c+1)$). Так как случай абелевой алгебры Ли тривиален, остается рассмотреть только 2-нильпотентные L. Они должны принадлежать одному из классов $T(k, 7-k)$, $k = 2, \dots, 6$. Если $k = 6$, то центр $Z(L)$ одномерен и потому L не имеет гиперболических автоморфизмов. Рассмотрим теперь для краткости только те L, которые не имеют прямых абелевых слагаемых. В этом случае должно выполняться неравенство $7 - k \leq k(k+1)/2$. Поэтому остаются для рассмотрения только $T(5, 2)$ и $T(4, 3)$. Комплексных алгебр Ли (комплексной размерности 7) в них (с точностью до изоморфизма) конечное число (их 11, и они перечислены в [33]). Комплексные алгебры Ли из $L(4, 3)$ также перечислены в [34], это $L_{7,i}$, $i = 1, 2, 4$ (в используемых там обозначениях), а также (из разложимых) $L_{6,1} \oplus \mathrm{L}_1$ и двойственная к ней. В [32] эти неразложимые алгебры Ли тоже перечислены, их там пять: $g_{7,124}$, $g_{7,125}$, $g_{7,126}$, $g_{7,127}$, $g_{7,127}$, причем над $\mathbb{C}$ имеются изоморфизмы $g_{7,124} \simeq g_{7,125}$, $g_{7,126} \simeq g_{7,128}$, так что тогда остаются три, как и в [34]. Алгебры Ли из $T(5, 2)$ можно указать, тоже используя одну из известных классификаций. В [32] неразложимых в прямые суммы алгебр указано только две: $g_{7,130}$, $g_{7,131}$. Полное перечисление всех разложимых вещественных нильпотентных алгебр Ли размерности 7 тоже не представит особого труда, более подробно мы здесь об этом говорить не будем. Остается выделить среди найденных алгебр Ли те, которые имеют унимодулярные гиперболические автоморфизмы. При этом можно использовать предложение 6. Эту несложную задачу мы представляем заинтересованным читателям в качестве упражнения по применению полученных в данной работе результатов. Напомним, например, что из предложения 7 вытекает, что для любой несократимой нильпотентной шестимерной алгебры Ли L семимерная алгебра Ли никогда не имеет гиперболических автоморфизмов. В частности, $n_3(\mathbb{R}) \oplus n_3(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ не имеет гиперболических автоморфизмов. Это замечание упростит перебор всех возможных случаев алгебр Ли в виде прямых сумм при решении сформулированного упражнения. Сказанное позволяет утверждать, что можно дать перечисление всех семимерных нильпотентных алгебр Ли, которые имеют унимодулярные гиперболические автоморфизмы. Можно убедиться, что все такие алгебры Ли имеют рациональную структуру и потому на соответствующих им компактных нильмногообразиях существуют диффеоморфизмы Аносова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1967. Т. 90. С. 1–210.
2. *Аносов Д. В.* Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 4. С. 707–709.
3. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
4. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.
5. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, N 6. P. 747–817.
6. *Newhouse S.* On codimension one Anosov diffeomorphisms // Amer. J. Math. 1970. V. 92, N 3. P. 761–770.
7. *Farrell F., Jones L.* Anosov diffeomorphisms constructed from $\pi_1 \operatorname{Diff}(S^n)$ // Topology. 1978. V. 17, N 3. P. 274–282.
8. *Assadi A., Burghelea D.* Examples of asymmetric differentiable manifolds // Math. Ann. 1987. V. 255, N 3. P. 423–430.
9. *Malfait W.* Anosov diffeomorphisms on nilmanifolds of dimension at most six // Geom. Dedicata. 2000. V. 79. P. 291–298.
10. *Shub M.* Endomorphisms of compact differentiable manifolds // Amer. J. Math. 1969. V. 91, N 1. P. 175–199.
11. *Morgan A.* The classification of flat solvmanifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 339. P. 321–351.
12. *Manning A.* There are no new Anosov diffeomorphisms on tori // Amer. J. Math. 1974. V. 96, N 3. P. 422–429.
13. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1976.
14. *Jacobson N.* A note on automorphisms and derivations of Lie algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1955. V. 6, N 2. P. 281–283.
15. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
16. *Малышев Ф. М.* О разложениях нильпотентных алгебр Ли // Мат. заметки. 1978. Т. 23, № 1. С. 17–18.
17. *Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Строение групп и алгебр Ли // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1990. Т. 41. С. 5–258. (Итоги науки и техники).
18. *Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Шварцман О. В.* Дискретные подгруппы групп Ли // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1988. Т. 41. С. 5–120. (Итоги науки и техники).
19. *Морозов В. В.* Классификация нильпотентных алгебр Ли 6-го порядка // Изв. вузов. Математика. 1958. № 4. С. 161–174.
20. *Горбацевич В. В.* О решетках в группах Ли типов (E) и (R) // Вестн. МГУ. Сер. I. Математика и механика. 1975. № 6. С. 56–63.
21. *Рагунатан М.* Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977.
22. *Dekimpe K., Malfait W.* A special class of nilmanifolds admitting an Anosov diffeomorphism // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. V. 128, N 7. P. 2171–2179.
23. *Dani S.* Nilmanifolds with Anosov diffeomorphisms // J. London Math. Soc. 1978. V. 18, N 3. P. 553–559.
24. *Dekimpe K.* Hyperbolic automorphisms and Anosov diffeomorphisms on nilmanifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 2001. V. 353, N 7. P. 2859–2877.
25. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980.
26. *Гуревич Г. Б.* Стандартные алгебры Ли // Мат. сб. 1954. Т. 35, № 3. С. 437–460.
27. *Хакимджанов Ю. Б.* О дифференцированиях некоторых нильпотентных алгебр Ли // Изв. вузов. Математика. 1976. № 1. С. 100–110.
28. *Bajo I.* Isometrias sobre grupos de Lie Riemannianos y semi-Riemannianos // Pub. Dept. Geom. Topol. Santiago de Compostela, 1995. V. 84.
29. *Togo S.* On the derivation algebras of Lie algebras // Canad. J. Math. 1961. V. 13, N 2. P. 210–216.

30. *Онищик А. Л., Хакимджанов Ю. Б.* О полупрямых суммах алгебр Ли // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 1. С. 31–40.
31. *Dani S.* Some two-step and three-step nilpotent Lie groups with small automorphism groups E. Schrodinger Inst. Math. Phys. 2002. (Preprint; 1150).
32. *Romdhani M.* Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 6 // Linear and Multilinear Algebra. 1989. V. 24, N 3. P. 167–189.
33. *Gauger M.* On the classification of metabelian Lie algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 179. P. 293–329.
34. *Revoy Ph.* Algebres de Lie metabeliennes // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). 1980. V. 11. P. 93–100.

Статья поступила 9 декабря 2003 г.

Горбацевич Владимир Витальевич
Московский государственный технологический университет МАТИ
им. К. Э. Циолковского, кафедра высшей математики,
ул. Оршанская, 3, Москва 121552