Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 512.54

О НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРАХ ГРУПП S_n И A_n

В. А. Белоногов

Аннотация: Характеры φ и ψ конечной группы G называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и существует подмножество M в G такое, что пропорциональны ограничения φ и ψ на M и их ограничения на $G \setminus M$. Получено описание всех пар пропорциональных неприводимых характеров симметрических групп. А именно, в теореме 1 доказана равносильность следующих условий пары (φ, ψ) различных неприводимых характеров группы S_n ($n \in \mathbb{N}$):

(1) φ и ψ полупропорциональны,

(2) φ и ψ имеют одно и то же множество корней,

(3) φ и ψ ассоциированы (т. е. $\psi = \varphi\xi$, где ξ — линейный характер группы S_n с ядром A_n).

Отметим, что условия (1) и (2), вообще говоря, не равносильны для произвольных конечных групп. Равносильность условий (1) и (3) подтверждает для симметрических групп следующую гипотезу, проверенную ранее автором для ряда классов групп: полупропорциональные неприводимые характеры конечной группы имеют равные степени.

Знакопеременные группы, по-видимому, не имеют полупропорциональных неприводимых характеров. Теорема 2 настоящей статьи есть некоторый шаг в доказательстве этой гипотезы.

Ключевые слова: конечные группы, симметрические и знакопеременные группы, таблица характеров, полупропорциональные характеры, малые D-блоки.

Введение

В настоящей статье изучаются свойства неприводимых характеров симметрических и знакопеременных групп, связанные со следующей гипотезой.

Гипотеза 1. *Если φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры конечной группы, то $\varphi(1) = \psi(1)$.*

Характеры φ и ψ группы G называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого нормального подмножества M из G $\varphi|_M$ пропорционально $\psi|_M$ и $\varphi|_{G\setminus M}$ пропорционально $\psi|_{G\setminus M}$.

Эта гипотеза возникла при изучении понятия D-блока [1, 2], обобщающего классическое понятие p-блока. Первоначально она была выдвинута в [3] в следующей формулировке.

Гипотеза 1$'$. *Если $\{\varphi, \psi\}$ — D-блок группы G для некоторого нормального подмножества D из G, то $\varphi(1) = \psi(1)$.*

Понятие D-блока, а также некоторые связанные с ним результаты напоминаются в § 1. Равносильность гипотез 1 и 1$'$ видна из утверждения 1.2.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00463).

Подтверждения гипотез 1 и $1'$, а также полные описания всех двухэлементных D-блоков получены для спорадических простых групп в [4]; для групп $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{PGL}_2(q)$, $\mathrm{GL}_2(q)$ в [3]; для групп $\mathrm{PGL}_3(q)$, $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{PGU}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$ в [5]; для групп $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$ в [6].

Наличие или отсутствие в группе пары полупропорциональных неприводимых характеров, по-видимому, связано с ее локальным строением. Во всяком случае (см. [3, 5, 6]) в квазипростых группах $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$ и $\mathrm{SU}_3(q)$ такие пары отсутствуют при четных q и присутствуют при нечетных q, за исключением групп $\mathrm{L}_2(5)$, $\mathrm{L}_2(7)$ и $\mathrm{L}_2(9)$ (изоморфных $\mathrm{L}_2(4)$, $\mathrm{L}_3(2)$ и $\mathrm{PSp}_4(2)'$ соответственно).

В этой статье получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть φ и ψ — различные неприводимые характеры группы S_n ($n \in \mathbb{N}$). Равносильны условия:*

(а) *φ и ψ полупропорциональны,*

(б) *φ и ψ имеют одно и то же множество корней,*

(в) *φ и ψ ассоциированы (т. е. $\psi = \varphi\xi$, где ξ — линейный характер группы S_n с ядром A_n).*

В частности, для симметрических групп справедливы гипотезы 1 и $1'$.

Отметим, что для произвольных групп условия (а) и (б), вообще говоря, не равносильны (как, например, для почти всех групп серии $\mathrm{L}_2(q)$). Кроме того, гипотеза 1 не может быть усилена заменой в ней свойства полупропорциональности неприводимых характеров их свойством иметь одно и то же множество корней. Например, группа $\mathrm{L}_2(11)$ имеет два неприводимых характера степеней 5 и 10 с одним и тем же множеством корней.

Пусть $P(n)$ — множество всех разбиений натурального числа n. Имеется (детали см. в § 2) взаимно однозначное отображение $\alpha \mapsto \chi^\alpha$ множества $P(n)$ на множество всех неприводимых характеров группы S_n. Неприводимый характер группы A_n есть либо ограничение $\chi^\alpha|_{A_n}$ неприводимого характера группы S_n, либо одна из двух неприводимых частей такого ограничения. Разбиение вида $\alpha = (a, 1^b)$, где $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, называется *крюком.*

Знакопеременные группы, по-видимому, не имеют полупропорциональных неприводимых характеров. Следующая теорема — некоторый шаг в доказательстве этой гипотезы.

Теорема 2. *Пусть φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы A_n. Тогда φ и ψ являются ограничениями на A_n некоторых неприводимых характеров χ^α и χ^β группы S_n ($\alpha, \beta \in P(n)$). Более того, ни одно из разбиений α и β не является крюком.*

Теоремы 1 и 2 доказываются в § 4 и § 5 соответственно. Необходимые для их доказательства предварительные результаты доказываются в § 3. Известные результаты о полупропорциональных характерах и о характерах симметрических и знакопеременных групп приводятся в параграфах 1 и 2.

Обозначения, используемые в этой статье, стандартны (см., например, [2]). В частности, $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G; $(\varphi, \psi)_G$ — скалярное произведение классовых функций φ и ψ группы G; $\varphi|_K$ — ограничение классовой функции φ группы G на ее подмножестве K; $\mathrm{Cl}(G)$ — множество всех классов сопряженных элементов группы G; g^G — класс сопряженных элементов группы G, содержащий элемент $g \in G$; $\mathbb{C}$,

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ — множества всех комплексных, рациональных, целых и натуральных чисел соответственно; $\dot\cup$ — знак объединения попарно не пересекающихся множеств. Если m и n — целые числа, то (m,n) — наибольший общий делитель m и n, а запись $m \mid n$ означает, что m делит n. $P(n)$ есть множество всех разбиений натурального числа n, и если α — такое разбиение, то C_α и χ^α — соответствующие ему класс сопряженных элементов и неприводимый характер группы S_n соответственно, а g_α обозначает некоторый элемент из C_α (когда конкретный вид элемента класса не важен). Некоторые другие обозначения, связанные с группами S_n и A_n, будут введены в § 2.

§ 1. Известные результаты о полупропорциональных характерах

Напомним некоторые определения и результаты из [1, 2].

Пусть G — конечная группа, D — ее нормальное подмножество (т. е. объединение ее классов сопряженных элементов) и $\Phi \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. *$D$-срезкой* классовой функции ψ группы G называется классовая функция $\psi|_D^0$, совпадающая с ψ на D и исчезающая (обращающаяся в нуль) на $G \setminus D$. Говорят, что D и Φ *взаимодействуют*, если D-срезка $\varphi|_D^0$ любого характера φ из Φ является линейной комбинацией (с комплексными коэффициентами) характеров из Φ. *D-блок* группы G — это минимальное по включению непустое подмножество из $\mathrm{Irr}(G)$, взаимодействующее с D. D-блок мощности 2 группы G называется ее *малым D-блоком*. Заметим, что при D, равном множеству всех p'-элементов из G, где p — простое число, понятие D-блока совпадает с классическим понятием p-блока.

Утверждение 1.1. *Пусть G — конечная группа, φ и ψ — различные неприводимые характеры группы G и D — ее нормальное подмножество. Равносильны условия:*

(1) $\{\varphi,\psi\}$ — D-блок группы G;

(2) $\psi|_D = a\varphi|_D$ и $\psi|_{G\setminus D} = b\varphi|_{G\setminus D}$ для некоторых $a, b \in \mathbb{C}$;

(3) $\psi|_D = a\varphi|_D$ и $\psi|_{G\setminus D} = b\varphi|_{G\setminus D}$, где $\{a,b\} = \left\{\frac{\psi(1)}{\varphi(1)}, -\frac{\varphi(1)}{\psi(1)}\right\}$.

Для доказательства см. теорему 8З3 в [2].

Отсюда непосредственно вытекают следующие два утверждения.

Утверждение 1.2. *Пусть G — конечная группа, а φ и ψ — ее неприводимые характеры. Равносильны условия:*

(1) φ и ψ полупропорциональны;

(2) $\varphi \neq \psi$ и $\{\varphi,\psi\}$ есть D-блок группы G для некоторого нормального подмножества D из G.

Утверждение 1.3. *Пусть φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры конечной группы G. Если существует элемент g в G такой, что $|\varphi(g)| = |\psi(g)| \neq 0$, то $\varphi(1) = \psi(1)$.*

Далее нам потребуется следующее расширение понятия полупропорциональных характеров. Функции ρ и σ из некоторого множества X в $\mathbb{C}$ называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и существует подмножество M в X такое, что пропорциональны ограничения ρ и σ на M и их ограничения на $X \setminus M$. Будем говорить, что функции ρ и σ *полупропорциональны на M*, если их ограничения на M полупропорциональны.

§ 2. Известные результаты о характерах групп S_n и A_n

Напомним некоторые определения и известные результаты о характерах симметрических и знакопеременных групп (см. [7, 8]).

Разбиением натурального числа n называется последовательность $\alpha = (a_1, \dots, a_l)$ натуральных чисел такая, что $a_1 \geq \dots \geq a_l$ и $n = a_1 + \dots + a_l$; i-й член a_i $(1 \leq i \leq l)$ разбиения α обозначается через α_i. Если в записи разбиения встречается подпоследовательность $a, \dots, a$ длины m, то ее разрешается заменить там на a^m. Всюду далее n обозначает натуральное число и $P(n)$ — множество всех его разбиений. Каждому разбиению $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in P(n)$ сопоставляется его *диаграмма Юнга* (или просто *диаграмма*) $[\alpha] := \{(i,j) \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq \alpha_i\}$. На рисунке ее обычно изображают в виде l-строчной таблицы, состоящей из n равных квадратных клеток, так, что i-я строка имеет α_i клеток и начальные клетки всех строк находятся в одном столбце. Клетки диаграммы вида (i,i) образуют ее *главную диагональ*. Говорят, что разбиения α и β *ассоциированы*, если диаграмма одного из них получается из диаграммы другого отражением относительно главной диагонали. Разбиение, ассоциированное с разбиением α, обозначается через α', например $(6,3,2,1)' = (4,3,2,1^3)$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in P(n)$. Ему естественным образом сопоставляется класс C_α сопряженных элементов группы S_n, элементы которого разлагаются в произведение l независимых циклов длин $\alpha_1, \dots, \alpha_l$. Понятно, что отображение $\alpha \mapsto C_\alpha$ $(\alpha \in P(n))$ является взаимно однозначным отображением из $P(n)$ на $\mathrm{Cl}(S_n)$.

Несколько сложнее строится взаимно однозначное отображение $\alpha \mapsto \chi^\alpha$ $(\alpha \in P(n))$ из $P(n)$ на $\mathrm{Irr}(S_n)$. Пусть S_α — подгруппа Юнга, соответствующая α, т. е. стабилизатор в S_n совокупности множеств A_i $(i = 1, \dots, l)$, где A_1 — множество первых α_1 членов последовательности $(1, \dots, n)$, A_2 — множество следующих α_2 членов этой последовательности, и т. д. Очевидно, S_α изоморфна $S_{\alpha_1} \times \dots \times S_{\alpha_l}$. Доказывается, что если взять главный характер подгруппы S_α и знакопеременный характер подгруппы $S_{\alpha'}$ и индуцировать их на S_n, то эти индуцированные характеры имеют точно одну общую неприводимую часть. Это и есть характер χ^α. Его обозначают также через $\chi^{[\alpha]}$.

Утверждение 2.1. 1. $\mathrm{Cl}(S_n) = \{C_\alpha \mid \alpha \in P(n)\}$, $|\mathrm{Cl}(S_n)| = |P(n)|$.

2. $\mathrm{Irr}(S_n) = \{\chi^\alpha \mid \alpha \in P(n)\}$, $|\mathrm{Irr}(S_n)| = |P(n)|$.

3. $\chi^{(n)} = 1_{S_n}$ *(главный характер группы S_n), $\chi^{(1^n)} = \xi$ — знакопеременный характер группы S_n (линейный характер с ядром A_n).*

4. $\chi^{\alpha'} = \chi^\alpha \xi$ *для всех $\alpha \in P(n)$ (характеры χ^α и $\chi^{\alpha'}$ называются ассоциированными).*

5. χ^α *исчезает на $S_n \setminus A_n$, если и только если $\alpha = \alpha'$ $(\alpha \in P(n))$.*

6. *Неприводимые характеры группы S_n принимают лишь целые значения.*

Для доказательства см. теоремы 2.1.8 и 2.3.15 в [7] или утверждения 2.3, 4.12, 6.7 в [8].

Клетка (элемент) (i,j) диаграммы $[\alpha]$ называется *граничной*, если $[\alpha]$ не содержит клетки $(i+1, j+1)$. Множество всех граничных клеток диаграммы $[\alpha]$ называется ее *границей*. *Крюком* диаграммы $[\alpha]$ с вершиной (i,j) называется множество $H_{ij}^\alpha := \{(i,j)\} \cup A \cup L$, где $L := \{(i+k, j) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*нога крюка*) и $A := \{(i, j+k) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*рука крюка*). *Косым крюком* с вершиной (i,j) диаграммы $[\alpha]$ называется часть границы диаграммы $[\alpha]$, «вырезанная» крюком

H^α_{ij}. Он обозначается через R^α_{ij} или через $R\bigl(H^\alpha_{ij}\bigr)$. Очевидно, $\bigl|R^\alpha_{ij}\bigr| = \bigl|H^\alpha_{ij}\bigr|$. Косые крюки диаграммы $[\alpha]$ — это в точности те связные части ее границы, после удаления которых из $[\alpha]$ остается диаграмма некоторого разбиения (какого-либо меньшего числа). Легко заметить, что диаграмму $[\alpha]\setminus R^\alpha_{ij}$ можно получить так: выбросить из $[\alpha]$ крюк H^α_{ij} и, если образуются две связные части, придвинуть одну из них к другой по диагонали влево-вверх. *Длиной* крюка (косого крюка, ноги крюка, диагонали крюка) называется его (или ее) мощность. Положим $h^\alpha_{ij} := |H^\alpha_{ij}|$ $(= |R^\alpha_{ij}|)$.

Утверждение 2.2. *Если $\alpha \in P(n)$, то $\chi^\alpha(1) = n!\Big/\prod\limits_{(i,j)\in[\alpha]} h^\alpha_{ij}$.*

См. теорему 2.3.21 в [7] или теорему 20.1 в [8].

Если множество $\{1,\dots,n\}$ является объединением двух непересекающихся подмножеств Γ и Δ, $g \in S_\Gamma$ и $d \in S_\Delta$, то через $g \times d$ обозначается элемент из S_n, ограничение которого на Γ равно g, а ограничение на Δ равно d.

Утверждение 2.3 (Теорема Мурнагана — Накаямы). *Пусть $\alpha \in P(n)$, $k \in \mathbb{N}$, x — произвольная перестановка элементов $1,\dots,n-k$ и z — циклическая перестановка остальных k элементов $n-k+1,\dots,n$. Тогда*

$$\chi^\alpha(z\times x) = \sum_{\substack{(i,j)\in[\alpha]\\ h^\alpha_{ij}=k}} (-1)^{l^\alpha_{ij}} \chi^{[\alpha]\setminus R^\alpha_{ij}}(x),$$

где l^α_{ij} — длина ноги крюка H^α_{ij} (при этом считается, что $\chi^\varnothing(x) = \chi^\varnothing(1) = 1$, а пустая сумма равна нулю).

См. теорему 2.4.7 в [7] или утверждение 21.1 в [8].

Для данного разбиения $\alpha \in P(n)$ можно построить разбиение

$$h(\alpha) := \bigl\{h^\alpha_{11},\dots,h^\alpha_{mm}\bigr\},$$

составленное из длин так называемых *главных крюков* H^α_{ii} диаграммы $[\alpha]$ (m — длина главной диагонали $[\alpha]$).

Утверждение 2.4. *Пусть $\alpha \in P(n)$ и $g \in C_{h(\alpha)}$. Тогда*

$$\chi^\alpha(g) = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{m}(\alpha'_i - i)},$$

где m — длина главной диагонали $[\alpha]$.

Непосредственно следует из теоремы Мурнагана — Накаямы (см. [7, 2.4.8]).

Утверждение 2.5. *Пусть $P_1(n) := \{\alpha \in P(n) \mid \alpha \neq \alpha'\}$ и $P_2(n) := \{\alpha \in P(n) \mid \alpha = \alpha'\}$.*

1. *Если $\alpha \in P_1(n)$, то $\chi^\alpha|_{A_n} = \chi^{\alpha'}|_{A_n} \in \mathrm{Irr}(A_n)$.*

2. *Если $\alpha \in P_2(n)$, то $\chi^\alpha|_{A_n} = \chi^\alpha_+ + \chi^\alpha_-$, где χ^α_+ и χ^α_- — различные характеры из $\mathrm{Irr}(A_n)$, сопряженные в S_n (какому из них приписать индекс плюс, а какому индекс минус — безразлично).*

3. *$\mathrm{Irr}(A_n) = I_1 \dot\cup I_2$, где*

$$I_1 = \{\chi^\alpha|_{A_n} \mid \alpha \in P_1(n)\},\ |I_1| = \frac{1}{2}|P_1(n)|,$$
$$I_2 = \{\chi^\alpha_+, \chi^\alpha_- \mid \alpha \in P_2(n)\},\ |I_2| = 2|P_2(n)|.$$

См. [7, теорема 2.5.7].

Утверждение 2.6. *Пусть $\alpha \in P(n)$ и $\alpha = \alpha'$. Тогда*

1) $C_{h(\alpha)} = x^{A_n} \cup y^{A_n}$ *— объединение двух классов сопряженных элементов группы A_n;*

2) $\chi^{\alpha}_{\pm}(g) = \frac{1}{2}\chi^{\alpha}(g) \in \mathbb{Z}$ *для всех $g \in A_n \setminus C_{h(\alpha)}$,*

3) *с точностью до перемены мест x и y*

а) $\chi^{\alpha}_{\pm}(x) = \frac{1}{2}\left(\chi^{\alpha}(x) \pm \sqrt{\chi^{\alpha}(x)\prod\limits_{i=1}^{m} h^{\alpha}_{ii}}\right)$,

б) $\chi^{\alpha}_{\pm}(y) = \frac{1}{2}\left(\chi^{\alpha}(x) \mp \sqrt{\chi^{\alpha}(x)\prod\limits_{i=1}^{m} h^{\alpha}_{ii}}\right)$,

где m — длина главной диагонали в $[\alpha]$.

См. [7, теорема 2.5.13].

Иногда бывает удобно рассмотреть *разбиение числа* 0; так называют пустую последовательность натуральных чисел, обозначаемую через (0), и считают, что $[(0)] = \varnothing$. Замечание в скобках в утверждении 2.3, по существу, записано в этих терминах (при этом $x = 1$ — «пустая» перестановка, т. е. $z \times x = z$).

§ 3. О неприводимых характерах группы S_n

Лемма 3.1. *Пусть $\alpha \in P(n)$ и $\alpha \neq \alpha'$. Тогда существуют элементы $x \in A_n$ и $y \in S_n \setminus A_n$ такие, что $|\chi^{\alpha}(x)| = |\chi^{\alpha}(y)| = 1$.*

Доказательство. Будем использовать индукцию по n. Пусть h есть длина h^{α}_{11} наибольшего крюка H^{α}_{11} диаграммы $[\alpha]$, v — произвольная перестановка элементов $1, \dots, n-h$ и z — циклическая перестановка остальных h элементов $n-h+1, \dots, n$. По теореме Мурнагана — Накаямы

$$\chi^{\alpha}(z \times v) = \pm\chi^{\gamma}(v), \quad \text{где } [\gamma] = [\alpha] \setminus R^{\alpha}_{11}. \tag{1}$$

Если $\gamma \neq \gamma'$ (следовательно, $n - h \geq 2$), то по предположению индукции существуют элементы v_1 и v_2 разной четности в группе S_{n-h} такие, что $|\chi^{\gamma}(v_1)| = |\chi^{\gamma}(v_2)| = 1$. Тогда элементы $z \times v_1$ и $z \times v_1$ группы S_n также имеют разную четность и ввиду (1) заключение леммы выполнено при $\{x, y\} = \{z \times v_1, z \times v_2\}$.

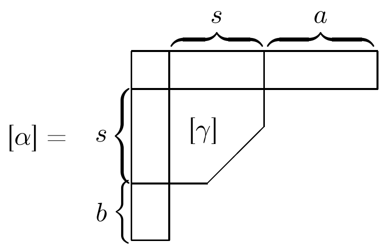

Рис. 1.

Пусть теперь $\gamma = \gamma'$ ($\gamma = (0)$ при $n = h$). В этом случае диаграмма $[\alpha]$ имеет вид, изображенный на рис. 1, где $\{s, a, b\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $s = \gamma_1$. Так как $\alpha \neq \alpha'$, то $a \neq b$, и без ограничения общности можно считать (ввиду п. 4 утверждения 2.1), что $b < a$. Тогда H^{α}_{12} есть единственный крюк длины $2s + a$ в $[\alpha]$. Пусть v — произвольная перестановка элементов $1, \dots, n - h^{\alpha}_{12}$ и g —

циклическая перестановка остальных h_{12}^{α} элементов $n-h_{12}^{\alpha}+1,\dots,n$. Снова по теореме Мурнагана — Накаямы

$$\chi^{\alpha}(g\times v)=\pm\chi^{\tilde{\alpha}}(v),\quad \text{где } [\tilde{\alpha}]:=[\alpha]\setminus R_{12}^{\alpha}. \tag{2}$$

Как видно из рис. 1, длина первого столбца в $[\tilde{\alpha}]$ равна $1+s+b$, а длина первой строки равна s при $s\neq 0$ и 1 при $s=0$. Если $s+b\geq 1$, то, очевидно, $\tilde{\alpha}\neq\tilde{\alpha}'$, и по предположению индукции существуют перестановки v_1 и v_2 разной четности в группе $S_{n-h_{12}^{\alpha}}$ такие, что $|\chi^{\tilde{\alpha}}(v_1)|=|\chi^{\tilde{\alpha}}(v_2)|=1$. Но тогда ввиду (2) верно заключение леммы при $\{x,y\}=\{g\times v_1, g\times v_2\}$. Если же $s+b=0$, то $\alpha=(n)$ ($n\geq 2$, так как $\alpha\neq\alpha'$), т. е. $\chi^{\alpha}=1_{S_n}$, и утверждение леммы очевидно.

Лемма 3.1 доказана.

Утверждение этой леммы совпадает с п. б) леммы 4 в [9], однако его доказательство в [9] имеет пробел (упущена возможность $\gamma=\gamma'$).

Лемма 3.2. *Пусть* $\chi^{\alpha}\in\mathrm{Irr}(S_n)$ $(\alpha\in P(n))$. *Тогда*

1) *если* $\alpha=\alpha'$ *и* $n\geq 3$, *то существует* $x\in A_n$ *с* $|\chi^{\alpha}(x)|=2$;

2) *если* $\varphi\in\mathrm{Irr}(A_n)$, *то существует* $x\in A_n$ *с* $|\varphi(x)|=1$.

Доказательство. Это доказано в [9, лемма 4, пп. в), г)].

Из утверждения 1.1 и п. 2) леммы 3.2 непосредственно вытекает

Лемма 3.3. *Если φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы A_n, то степень одного из них делит степень другого.*

Лемма 3.4. *Пусть χ^{α} и χ^{β} — неприводимые характеры группы S_n ($\alpha,\beta\in P(n)$). Равносильны условия:*

(1) $\chi^{\alpha}|_{A_n}$ *пропорционально* $\chi^{\beta}|_{A_n}$,

(2) $\alpha\in\{\beta,\beta'\}$.

Доказательство. Пусть верно условие (1). Согласно утверждению 2.5 для любого $\gamma\in P(n)$ характер χ^{γ} неприводим при $\gamma\neq\gamma'$ и является суммой двух неприводимых характеров при $\gamma=\gamma'$. Поэтому

либо $\alpha\neq\alpha'$, $\beta\neq\beta'$ и $\chi^{\alpha}|_{A_n}=\chi^{\beta}_{A_n}=:\zeta\in\mathrm{Irr}(A_n)$,

либо $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ и $\chi^{\alpha}|_{A_n}=\chi^{\beta}_{A_n}=\zeta_1+\zeta_2$ $(\zeta_1,\zeta_2\in\mathrm{Irr}(A_n))$.

В первом случае по закону взаимности Фробениуса [2, теорема 2Б1] должно быть $\zeta^G=\chi^{\alpha}+\chi^{\alpha'}=\chi^{\beta}+\chi^{\beta'}$, откуда следует, что $\{\alpha,\alpha'\}=\{\beta,\beta'\}$, т. е. верно условие (2). Во втором же случае из п. 3 утверждения 2.5 следует, что $\alpha=\beta$. Итак, из условия (1) следует условие (2).

Обратное утверждение очевидно.

Лемма 3.4 доказана.

Лемма 3.5. *Пусть χ^{α} и χ^{β} — неприводимые характеры группы S_n ($\alpha,\beta\in P(n)$). Равносильны условия:*

(1) $\chi^{\alpha}|_{S_n\setminus A_n}$ *пропорционально* $\chi^{\beta}|_{S_n\setminus A_n}$,

(2) *либо* $\alpha\in\{\beta,\beta'\}$, *либо* $\alpha=\alpha'$ *и* $\beta=\beta'$.

Доказательство. Пусть верно условие (1) и $S:=S_n\setminus A_n$. По условию леммы $\chi^{\alpha}|_S=c\chi^{\beta}|_S$, где $c\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$. Предположим, что $\alpha\notin\{\beta,\beta'\}$. Тогда из п. 3 утверждения 2.5 следует, что $\chi^{\alpha}|_{A_n}$ и $\chi^{\beta}|_{A_n}$ — различные характеры группы A_n. Если среди них есть приводимый, например, $\chi^{\alpha}|_{A_n}$, то по утверждению 2.5 $\alpha=\alpha'$ и, следовательно, по п. 5 утверждения 2.1 χ^{α} исчезает на S. Тогда по условию (1) χ^{β} исчезает на S, т. е. $\beta=\beta'$, и в этом случае верно условие (2).

Поэтому можно считать, что $\chi^\alpha|_{A_n}$ и $\chi^\beta|_{A_n}$ неприводимы. Теперь, учитывая, что характеры группы S_n целочисленны (п. 6 утверждения 2.1), имеем

$$0 = |S_n|(\chi^\alpha, \chi^\beta)_{S_n} = \sum_{g\in S_n} \chi^\alpha(g)\chi^\beta(g) = \sum_{g\in A_n} \chi^\alpha(g)\chi^\beta(g) + \sum_{g\in S} \chi^\alpha(g)\chi^\beta(g)$$
$$= |A_n|(\chi^\alpha|_{A_n}, \chi^\beta|_{A_n})_{A_n} + c\sum_{g\in S} \chi^\alpha(g)^2 = c\sum_{g\in S} \chi^\alpha(g)^2,$$

откуда $\chi^\alpha(g) = 0$ для всех $g \in S$. Следовательно, $\chi^\alpha|_S = \chi^\beta|_S = 0$, т. е. по п. 5 утверждения 2.1 $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$. Таким образом, из условия (1) следует условие (2).

Обратно, из условия (2), очевидно, следует условие (1).

Лемма 3.5 доказана.

Лемма 3.6. *Пусть χ^α — неприводимый характер группы S_n ($\alpha \in P(n)$). Равносильны условия:*

(1) χ^α *не имеет нулевых значений на* $S_n \setminus A_n$*;*

(2) *верно одно из следующих утверждений:*

а) $\chi^\alpha(1) = 1$, *т. е.* $\alpha \in \{(n), (n)'\}$,

б) $n = 4$ *и* $\alpha \in \{(3, 1), (3, 1)'\}$,

в) $n = 5$ *и* $\alpha \in \{(3, 2), (3, 2)'\}$.

Доказательство. Пусть выполнено условие (1) и $S := S_n \setminus A_n$. Предположим, что $\chi^\alpha(1) \neq 1$, т. е. $\alpha \notin \{(n), (n)'\}$. Очевидно, $\alpha \neq \alpha'$ (иначе $\chi^\alpha|_S = 0$ по п. 5) утверждения 2.1). Далее через z_m мы обозначаем (произвольную) циклическую перестановку из S_n порядка m и, как мы уже условились, через g_γ для $\gamma \in P(m)$ — элемент класса C_γ ($m \in \mathbb{N}$).

Предположим сначала, что n четно. Тогда $z_n \in S$ и по теореме Мурнагана — Накаямы должно быть $h(\alpha) = (n)$, т. е. $\alpha = (1 + a, 1^b)$ для некоторых $a, b \in \mathbb{N}$. Так как α и α' симметрично входят в условие (2), то без ограничения общности можно считать, что $a > b$. Поскольку $[\alpha]$ не имеет крюка длины $a+1$, то по теореме Мурнагана — Накаямы $\chi^\alpha(z_{a+1}) = 0$ и, следовательно, $z_{a+1} \in A_n$, т. е. a четно. Но тогда $z_{a+2} \in S$ и по условию должно быть $\chi^\alpha(z_{a+2}) \neq 0$, откуда по теореме Мурнагана — Накаямы следует, что $[\alpha]$ имеет крюк длины $a + 2$. Значит, $a + 2 = n$, $b = 1$ и $\alpha = (n - 1, 1)$. Так как $a > b$ и n четно, то $n \geq 4$.

При $n = 4$ будет $\alpha = (3, 1)$, т. е. выполнено условие б).

Пусть $n > 4$, и положим $\gamma := (\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - 1, 1)$. Тогда $g_\gamma \in S$ и по условию (1) $\chi^\alpha(g_\gamma) \neq 0$. Однако по теореме Мурнагана — Накаямы

$$\chi^\alpha(g_\gamma) = \chi^{(\frac{n}{2}-1,1)}(g_{(\frac{n}{2}-1,1)}) = 0$$

(так как $\frac{n}{2} > 1$ и диаграмма $[(\frac{n}{2} - 1, 1)]$ не имеет крюка длины $\frac{n}{2} - 1$). Таким образом, при четном n имеет место лишь случай б).

Пусть теперь n нечетно. Тогда $z_{n-1} \in S$ и по теореме Мурнагана — Накаямы $[\alpha]$ имеет крюк длины $n-1$. Мы предположили, что $\alpha \notin \{(n), (n)'\}$, поэтому должно быть $h(\alpha) = (n-1, 1)$, т. е. $\alpha = (2+a, 2, 1^b)$, где $a, b \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Пусть без ограничения общности $a > b$. Таким образом, $[\alpha]$ есть частный случай (с $s = 1$) диаграммы, изображенной на рис. 1. Так как n нечетно, то $n \geq 5$.

При $n = 5$ будет $\alpha = (3, 2)$, т. е. выполнено условие в).

Пусть $n > 5$. Так как $a + b = n - 4$ нечетно, то a и b имеют различные четности. Если $b = 0$, то $a = n - 4$ нечетно и $a + 1$ четно, т. е. $z_{a+1} \in S$ и по условию должно быть $\chi^\alpha(z_{a+1}) \neq 0$. Однако в $[\alpha]$ нет крюка длины $a +$

1 и, следовательно, по теореме Мурнагана — Накаямы $\chi^\alpha(z_{a+1}) = 0$. Таким образом, $b \geq 1$. Но тогда в $[\alpha]$ нет крюка длины $n-2$ и по теореме Мурнагана — Накаямы $\chi^\alpha(g_{(n-2,2)}) = 0$. Поскольку, однако, $g_{(n-2,2)} \in S$, то это противоречит условию (1). Итак, при нечетном n имеет место случай в).

Таким образом, условие (1) влечет условие (2). Легкая проверка подтверждает обратное утверждение.

Лемма 3.6 доказана.

Лемма 3.7. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и характеры χ^α и χ^β группы S_n имеют одно и то же множество корней в A_n. (В частности, это условие выполнено, если характеры $\chi^\alpha|_{A_n}$ и $\chi^\beta|_{A_n}$ полупропорциональны.) Предположим, что $[\alpha]$ имеет единственный крюк H некоторой длины m. Тогда либо $[\beta]$ имеет крюк длины m, либо m четно и диаграмма $[\alpha] \setminus R(H)$ самоассоциированна.*

Доказательство. По условию

$$\chi^\alpha(g) = 0 \Longleftrightarrow \chi^\beta(g) = 0 \quad \text{для всех } g \in A_n. \tag{1}$$

Предположим, что $[\beta]$ не имеет крюка длины m. Пусть x — произвольная перестановка элементов $1, \ldots, n-m$, z — циклическая перестановка остальных m элементов $n-m+1, \ldots, n$ и $\tilde{\alpha}$ — разбиение числа $n-m$ с диаграммой $[\tilde{\alpha}] = [\alpha] \setminus R(H)$. Тогда по теореме Мурнагана — Накаямы

$$\chi^\alpha(z \times x) = \pm\chi^{\tilde{\alpha}}(x) \quad \text{и} \quad \chi^\beta(z \times x) = 0. \tag{2}$$

Отсюда и из (1) следует, что, во-первых, число m четно (так как $\chi^\alpha(z \times 1) \neq 0$ и потому $z \times 1 \notin A_n$) и, во-вторых, $\chi^{\tilde{\alpha}}(x) = 0$ для всех $x \in S_{n-m} \setminus A_{n-m}$ (так как в этом случае $z \times x \in A_n$). Последнее означает (по утверждению 2.1), что $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}'$, т. е. диаграмма $[\alpha] \setminus R(H)$ самоассоциированна.

Лемма 3.7 доказана.

Лемма 3.8. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и характеры χ^α и χ^β группы S_n имеют одно и то же множество корней в $S := S_n \setminus A_n$. (В частности, это условие выполнено, если ограничения $\chi^\alpha|_S$ и $\chi^\beta|_S$ полупропорциональны.) Предположим, что $[\alpha]$ имеет единственный крюк H некоторой длины m. Тогда либо $[\beta]$ имеет крюк длины m, либо m нечетно и диаграмма $[\alpha] \setminus R(H)$ самоассоциированна.*

Доказательство подобно доказательству леммы 3.7. А именно, с помощью теоремы Мурнагана — Накаямы получается утверждение (2) этого доказательства, а из него и из условия леммы — требуемое заключение.

Лемма 3.8 доказана.

Лемма 3.9. *Пусть φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы A_n, причем $\varphi = \chi^\alpha|_{A_n}$ и $\psi = \chi^\beta|_{A_n}$ ($\alpha, \beta \in P(n)$). Предположим, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку H^α и H^β соответственно некоторой длины m. Пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ — разбиения числа $n-m$ с диаграммами $[\tilde{\alpha}] = [\alpha] \setminus R(H^\alpha)$ и $[\tilde{\beta}] = [\beta] \setminus R(H^\beta)$. Тогда*

1) если m нечетно, то ограничения характеров $\chi^{\tilde{\alpha}}$ и $\chi^{\tilde{\beta}}$ на A_{n-m} полупропорциональны или пропорциональны;

2) если m четно, то ограничения характеров $\chi^{\tilde{\alpha}}$ и $\chi^{\tilde{\beta}}$ на $S_{n-m} \setminus A_{n-m}$ полупропорциональны или пропорциональны.

Доказательство. Можно считать, что $n-m \geq 2$, так как в противном случае утверждение верно. Пусть z — циклическая перестановках m элементов $n-m+1, \ldots, n$ и x — произвольная перестановка элементов $1, \ldots, n-m$ такая, что $\operatorname{sing}(x) = \operatorname{sing}(z)$ (следовательно, $z \times x \in A_n$). По теореме Мурнагана — Накаямы

$$\varphi(z \times x) = \chi^{\alpha}(z \times x) = \pm\chi^{\tilde{\alpha}}(x) \quad \text{и} \quad \psi(z \times x) = \chi^{\beta}(z \times x) = \pm\chi^{\tilde{\beta}}(x).$$

Отсюда и из условия леммы следует справедливость утверждений 1) и 2).

Лемма 3.9 доказана.

Лемма 3.10. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и характеры χ^{α} и χ^{β} группы S_n полупропорциональны на $S := S_n \setminus A_n$. Предположим, что диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку H^{α} и H^{β} соответственно некоторой длины m. Пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ — разбиения числа $n-m$ с диаграммами $[\tilde{\alpha}] = [\alpha] \setminus R(H^{\alpha})$ и $[\tilde{\beta}] = [\beta] \setminus R(H^{\beta})$. Тогда*

1) *если m нечетно, то ограничения характеров $\chi^{\tilde{\alpha}}$ и $\chi^{\tilde{\beta}}$ на $S_{n-m} \setminus A_{n-m}$ полупропорциональны или пропорциональны;*

2) *если m четно, то ограничения характеров $\chi^{\tilde{\alpha}}$ и $\chi^{\tilde{\beta}}$ на A_{n-m} полупропорциональны или пропорциональны.*

Доказательство подобно доказательству леммы 3.9 (нужно лишь выбрать x со свойством $\operatorname{sing}(x) = -\operatorname{sing}(z)$).

Лемма 3.10 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Очевидно, (в) влечет (а), и ввиду утверждения 1.1 (а) влечет (б). Остается доказать, что (б) влечет (в). В доказательстве этого мы будем использовать индукцию по n. При $n \leq 2$ утверждение очевидно. По утверждению 2.1

$$\varphi = \chi^{\alpha} \quad \text{и} \quad \psi = \chi^{\beta}, \quad \text{где } \alpha, \beta \in P(n).$$

Итак, пусть верно условие (б), т. е.

$$\chi^{\alpha}(g) = 0 \Longleftrightarrow \chi^{\beta}(g) = 0 \quad \text{для всех } g \in S_n. \tag{1}$$

По утверждению 2.1 равенство $\chi^{\alpha} = \chi^{\beta}\xi$ (т. е. условие (в)) равносильно равенству $\alpha = \beta'$. Поэтому далее, не предполагая заранее, что $\alpha \neq \beta$, мы будем доказывать, что $\alpha \in \{\beta, \beta'\}$. Это позволит в дальнейших рассуждениях без ограничения общности заменять α на α' и (независимо) β на β'.

Пусть $h(\alpha) = \left(h^{\alpha}_{11}, \dots, h^{\alpha}_{mm}\right)$ и $h(\beta) = \left(h^{\beta}_{11}, \dots, h^{\beta}_{kk}\right)$ — разбиения числа n, состоящие из длин главных крюков диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$. По утверждению 2.3

$$\chi^{\alpha}(g_{h(\alpha)}) = \pm 1 \quad \text{и} \quad \chi^{\beta}(g_{h(\beta)}) = \pm 1.$$

Тогда по (1) $\chi^{\alpha}(g_{h(\beta)}) \neq 0$ и $\chi^{\beta}(g_{h(\alpha)}) \neq 0$, откуда ввиду теоремы Мурнагана — Накаямы каждая из диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$ должна иметь крюки длин h^{α}_{11} и h^{β}_{11}. Так как эти длины — максимальные длины крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ соответственно, то $h^{\alpha}_{11} = h^{\beta}_{11}$. Более того, по этой же теореме характеры $\chi^{[\alpha]\setminus R^{\alpha}_{11}}$ и $\chi^{[\beta]\setminus R^{\beta}_{11}}$ также имеют одни и те же корни (ввиду (1)), и, применяя теорему Мурнагана — Накаямы к этим характерам, подобно предыдущему получаем, что $h^{\alpha}_{22} = h^{\beta}_{22}$. Продолжив этот процесс далее, мы получим, что $h^{\alpha}_{ii} = h^{\beta}_{ii} =: h_i$ для всех i. Следовательно,

$$h(\alpha) = h(\beta) = (h_1, \dots, h_m).$$

Предположим сначала, что $h_1 = n$, т. е. α и β — крюки: $\alpha = (1 + a, 1^b)$ и $\beta = (1 + c, 1^d)$, где $a + b = c + d = n - 1$ $(a, b, c, d \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Если $\{a, b\} = \{c, d\}$, то

$\alpha \in \{\beta, \beta'\}$, и теорема доказана. В противном случае без ограничения общности мы можем предположить, что

$$a = \max\{a, b, c, d\}.$$

Тогда, очевидно, $a > b$, $a > c$ и $a > d$. Но теперь по теореме Мурнагана — Накаямы $\chi^{\alpha}(g_{(a,1^{b+1})}) = \chi^{(1^{b+1})}(g_{(1^{b+1})}) = \pm 1$ и $\chi^{\beta}(g_{(a,1^{b+1})}) = 0$, так как $[\beta]$ не имеет крюка длины a. Это противоречит условию. Таким образом, при $h_1 = n$ утверждение «(б) $\Longrightarrow$ (в)» доказано.

Предположим теперь, что $h_1 < n$. Пусть x — произвольная перестановка чисел $1, \ldots, n - h_1$ и z — циклическая перестановка остальных h_1 чисел $n - h_1 + 1, \ldots, n$. Так как H_{11}^{α} и H_{11}^{β} — единственные крюки длины h_1 в $[\alpha]$ и $[\beta]$ соответственно, то по теореме Мурнагана — Накаямы

$$\varphi(z \times x) = \chi^{\alpha}(z \times x) = \pm\chi^{\tilde{\alpha}}(x), \quad \text{где } [\tilde{\alpha}] = [\alpha] \setminus R_{11}^{\alpha};$$
$$\psi(z \times x) = \chi^{\beta}(z \times x) = \pm\chi^{\tilde{\beta}}(x), \quad \text{где } [\tilde{\beta}] = [\alpha] \setminus R_{11}^{\beta}.$$

Поскольку мы предполагаем, что φ и ψ имеют одно и то же множество корней, то из предыдущих равенств следует, что неприводимые характеры $\chi^{\tilde{\alpha}}$ и $\chi^{\tilde{\beta}}$ группы S_{n-h_1} также обладают этим свойством. По предположению индукции (так как $1 \le n - h_1 < n$) должно быть либо $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$, либо $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}'$. Без ограничения общности можно считать, что $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} =: \gamma$. Следовательно, диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют вид, изображенный на рис. 2, где $\{s, t, a, b\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s = \gamma_1$ и $t = {\gamma'}_1$, причем $a + b = c + d$, $a \ne c$ и $b \ne d$.

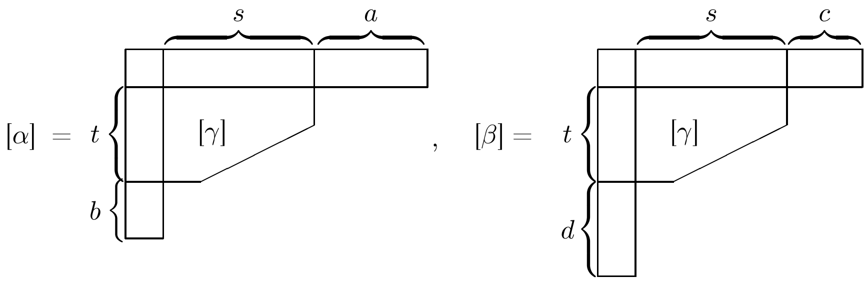

Рис. 2.

Пусть (без ограничения общности) $a = \max\{a, b, c, d\}$. Тогда $c < a$. Очевидно, H_{12}^{α} есть единственный крюк длины $t + s + a$ в $[\alpha]$. Пусть g — циклическая перестановка порядка $t + s + a$ в S_n. По теореме Мурнагана — Накаямы

$$\chi^{\alpha}(g) = \pm\chi^{[\alpha]\setminus R_{12}^{\alpha}}(1) \ne 0.$$

Но тогда по условию (1) $\chi^{\beta}(g) \ne 0$, и ввиду теоремы Мурнагана — Накаямы $[\beta]$ имеет крюк H длины $h := t + s + a$. Ясно, что претендентами на H могут быть лишь крюки H_{12}^{β} и H_{21}^{β} длин $h_{12}^{\beta} = t + s + c$ и $h_{21}^{\beta} = t + s + d$. Так как, однако, $c < a$, то $H = H_{12}^{\beta}$ и $d = a$. Таким образом, H_{12}^{α} и H_{21}^{β} — единственные крюки длины h в $[\alpha]$ и $[\beta]$ соответственно. Пусть x — произвольная перестановка чисел $1, \ldots, n - h$ и z — циклическая перестановка остальных h чисел $n - h + 1, \ldots, n$. Тогда по теореме Мурнагана — Накаямы

$$\varphi(z \times x) = \chi^{\alpha}(z \times x) = \pm\chi^{\tilde{\alpha}}(x), \quad \text{где } [\tilde{\alpha}] = [\alpha] \setminus R_{12}^{\alpha};$$
$$\psi(z \times x) = \chi^{\beta}(z \times x) = \pm\chi^{\tilde{\beta}}(x), \quad \text{где } [\tilde{\beta}] = [\alpha] \setminus R_{21}^{\beta}.$$

Отсюда следует, что $\chi^{\tilde\alpha}$ и $\chi^{\tilde\beta}$ имеют одно и то же множество корней. По предположению индукции $\tilde\alpha$ совпадает с одним из разбиений $\tilde\beta$ и $\tilde\beta'$. Но, как легко увидеть из рис. 2, диаграмма $[\tilde\alpha]$ получается из диаграммы $[\gamma]$ добавлением $1+b$ клеток к ее первому столбцу, а диаграмма $[\tilde\beta]$ — из диаграммы $[\gamma]$ добавлением $1+c$ клеток к ее первой строке. Следовательно, $\tilde\alpha=\tilde\beta'$. Но отсюда следует, что $\gamma=\gamma'$. Так как к тому же $d=a$ и, следовательно, $c=b$, то $\alpha=\beta'$. Таким образом, из (б) следует (в).

Теорема 1 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 2

Теорема 2 непосредственно вытекает из следующих двух предложений.

Предложение 5.1. *Пусть φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы A_n. Тогда φ и ψ являются ограничениями на A_n некоторых неприводимых характеров группы S_n.*

Доказательство. Предположим, что φ не является ограничением на A_n неприводимого характера группы S_n. Тогда согласно утверждению 2.5 существует разбиение α числа n такое, что $\alpha=\alpha'$ и $\chi^\alpha|_{A_n}=\chi^\alpha_++\chi^\alpha_-$, где χ^α_+ и χ^α_- — неприводимые характеры группы A_n, один из которых совпадает с φ.

Пусть $h(\alpha)=\left(h^\alpha_{11},\dots,h^\alpha_{mm}\right)$ и $g_{h(\alpha)}$ — элемент класса $C_{h(\alpha)}$. Положим $\varepsilon:=\chi^\alpha(g_{h(\alpha)})$ и $h:=\prod\limits_{i=1}^m h^\alpha_{ii}$. По утверждению 2.4

$$\varepsilon=\pm1. \tag{1}$$

Далее, согласно утверждению 2.6 существуют два класса x^{A_n} и y^{A_n} сопряженных элементов группы A_n такие, что

$$\begin{cases} C_{h(\alpha)}=x^{A_n}\cup y^{A_n},\\ \varphi(g)=\frac12\chi^\alpha(g)\in\mathbb Z \quad \text{для всех} \quad g\in A_n\setminus C_{h(\alpha)},\\ \varphi(x)=\frac12(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon h}),\\ \varphi(y)=\frac12(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon h}).\end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что $\psi\ne\{\chi^\alpha_+,\chi^\alpha_-\}$, так как в противном случае ввиду утверждения 2.6 наряду с равенствами (2) выполнялись бы равенства

$$\psi(x)=\frac12(\varepsilon-\sqrt{\varepsilon h}),\quad \psi(y)=\frac12(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon h}),$$

и по утверждению 1.1 должно быть

$$\frac{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon h}}{\varepsilon-\sqrt{\varepsilon h}}=\frac{\varepsilon-\sqrt{\varepsilon h}}{\varepsilon+\sqrt{\varepsilon h}}\quad(=-1),$$

что невозможно.

Следовательно, согласно утверждению 2.5 существует разбиение β числа n такое, что

либо $\psi=\chi^\beta_\pm$, где $\beta=\beta'$ и $\beta\ne\alpha$;

либо $\psi=\chi^\beta|_{A_n}$, где $\beta\ne\beta'$.

Во втором случае, очевидно, $\psi(x)=\psi(y)$ (так как x и y сопряжены в S_n). Покажем, что это равенство верно и в первом случае. Действительно, в этом случае по утверждению 2.6 $\psi(g)=\frac12\chi^\beta(g)\in\mathbb Z$ для всех $g\in A_n\setminus C_{h(\beta)}$. Однако легко увидеть, что для самоассоциированных α и β из $\alpha \neq \beta$ следует, что $h(\alpha) \neq h(\beta)$ и тем самым $C_{h(\alpha)} \neq C_{h(\beta)}$. Но тогда согласно утверждению 2.6 $\psi(x) = \frac{1}{2}\chi^\beta(x) = \frac{1}{2}\chi^\beta(y) = \psi(y)$.

Итак, всегда $\psi(x) = \psi(y) \in \mathbb{Z}$, и мы имеем следующий фрагмент таблицы характеров группы A_n:

	x	y
φ	$\frac{1}{2}(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon h})$	$\frac{1}{2}(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon h})$
ψ	$\psi(x)$	$\psi(x)$

Рассмотрим подмножества

$$D_1 := \left\{ g \in A_n \mid \frac{\varphi(g)}{\psi(g)} = \frac{\varphi(1)}{\psi(1)} \right\} \quad \text{и} \quad D_2 := \left\{ g \in A_n \mid \frac{\varphi(g)}{\psi(g)} = -\frac{\psi(1)}{\varphi(1)} \right\}.$$

Согласно утверждению 1.1 $\{x, y\} \subseteq D_1 \cup D_2$. Так как $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq \frac{\varphi(y)}{\psi(y)}$, то x и y лежат в разных множествах D_1 и D_2. Положим $\delta = 1$, если $x \in D_1$, и $\delta = -1$, если $x \in D_2$. Тогда по утверждению 1.1

$$\frac{\frac{1}{2}(\varepsilon + \delta\sqrt{\varepsilon h})}{\psi(x)} = \frac{\varphi(1)}{\psi(1)} = \frac{\varphi_0}{\psi_0}, \tag{3}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(\varepsilon - \delta\sqrt{\varepsilon h})}{\psi(x)} = -\frac{\psi(1)}{\varphi(1)} = -\frac{\psi_0}{\varphi_0}, \tag{4}$$

где $\varphi_0 := \varphi(1)/(\varphi(1), \psi(1))$ и $\psi_0 := \psi(1)/(\varphi(1), \psi(1))$. Поскольку значения неприводимых характеров группы S_n являются целыми числами, из (3) и (1) следует, что $\varepsilon = 1$. Теперь, сложив равенства (3) и (4), получим

$$\frac{1}{\psi(x)} = \frac{\varphi_0^2 - \psi_0^2}{\varphi_0\psi_0},$$

откуда $\varphi_0\psi_0/(\varphi_0^2 - \psi_0^2) = \psi(x) \in \mathbb{Z}$. Так как, очевидно, $\left(\varphi_0\psi_0, \varphi_0^2 - \psi_0^2\right) = 1$, то должно быть $\varphi_0^2 - \psi_0^2 = \pm 1$, что невозможно. Таким образом, предположив, что φ не является ограничением неприводимого характера группы S_n, мы получили противоречие.

Предложение 5.1 доказано.

Предложение 5.2. *Пусть φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы A_n, причем $\varphi = \chi^\alpha|_{A_n}$ и $\psi = \chi^\beta|_{A_n}$, где $\alpha, \beta \in P(n)$. Тогда ни одно из разбиений α и β не является крюком.*

Доказательство. Согласно утверждению 2.5 $\alpha \neq \alpha'$, $\beta \neq \beta'$, $\chi^\alpha|_{A_n} = \chi^{\alpha'}|_{A_n}$ и $\chi^\beta|_{A_n} = \chi^{\beta'}|_{A_n}$. В частности, в дальнейших рассуждениях мы можем при желании заменять α на α' и β на β'.

Теперь предположим, в противоречие с заключением теоремы, что $[\alpha]$ есть крюк, т. е.

$$\alpha = (1 + a, 1^b), \quad n = 1 + a + b, \quad \{a, b\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1}$$

Мы опровергнем это предположение, используя индукцию по n. Если $a = 0$ или $b = 0$, то по утверждению 2.1 φ есть линейный характер A_n, а тогда по утверждению 1.1 характер ψ не имеет нулевых значений и поэтому (см. [2, 2A28]) является линейным характером. Но это невозможно, так как A_n имеет лишь один линейный характер. Следовательно, $ab \neq 0$, и мы можем предположить, что

$$0 < b < a. \tag{2}$$

По утверждению 1.1

$$\varphi(g) = 0 \Longleftrightarrow \psi(g) = 0 \quad \text{для всех } g \in A_n. \tag{3}$$

Диаграмма $[\alpha]$ имеет единственный крюк H^α_{12} длины a. Так как диаграмма $[\alpha] \setminus R^\alpha_{12}$ не самоассоциированна (ввиду (2)), то из (3) по лемме 3.7 следует, что

$$[\beta] \quad \text{имеет крюк длины } a \tag{4}$$

и, в частности,

$$h^\beta_{11} \geq a. \tag{5}$$

Предположим, что $[\beta]$ также является крюком: $\beta = (1+c, 1^d)$, где без ограничения общности $d \leq c$. Тогда подобно доказательству утверждения (4) (поменяв местами α и β) можно доказать, что $[\alpha]$ имеет крюк длины c. Но это означает, что $a = c$ и $\alpha = \beta$. Таким образом,

$$[\beta] \quad \text{не является крюком.} \tag{6}$$

Отсюда и из леммы 3.7 следует, что

$$n \quad \text{четно.} \tag{7}$$

Случай 1. Пусть h^β_{11} нечетно.

Тогда по лемме 3.7 диаграмма $[\alpha]$ имеет крюк длины h^β_{11} и, следовательно, $h^\beta_{11} \leq a$. Отсюда и из (5) вытекает, что

$$h^\beta_{11} = a. \tag{8}$$

В частности, a нечетно.

Ясно, что $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку длины a. Если x — четная перестановка элементов $1, \dots, n-a$ ($n - a = 1 + b \geq 2$ по (2)) и z — циклическая перестановка a чисел $n-a+1, \dots, n$ (так, что $z \times x \in A_n$), то по теореме Мурнагана — Накаямы

$$\begin{aligned} \varphi(z \times x) &= \chi^\alpha(z \times x) = \chi^{\tilde\alpha}(x), \quad \text{где } \tilde\alpha = (1^{1+b}), \\ \psi(z \times x) &= \chi^\beta(z \times x) = \pm\chi^{\tilde\beta}(x), \quad \text{где } [\tilde\beta] = [\beta] \setminus R^\beta_{11}. \end{aligned} \tag{9}$$

По лемме 3.1 существует $x_1 \in A_{n-a}$ такой, что $|\chi^{\tilde\beta}(x_1)| = 1$. Поскольку $\chi^{\tilde\alpha}$ — знакопеременный характер по утверждению 2.1, то из свойства (9) следует, что $|\varphi(z \times x_1)| = |\psi(z \times x_1)| = 1$. Отсюда по утверждению 1.3

$$\varphi(1) = \psi(1). \tag{10}$$

Согласно утверждению 1.1 из (10) вытекает, что $|\varphi(g)| = |\psi(g)|$ для всех $g \in A_n$. Отсюда и из (9) (при $x = 1$) следует, что $\chi^{\tilde\beta}(1) = \chi^{\tilde\alpha}(1) = 1$ и, значит, $\tilde\beta \in \{\tilde\alpha, \tilde\alpha'\}$. Поскольку мы можем заменить β на β', то без ограничения общности можно считать, что $\tilde\beta = \tilde\alpha' = (1+b)$. Тогда $\beta = (2+b+c, 2+b, 1^d)$, где c, d — целые неотрицательные числа. Диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ изображены на рис. 3.

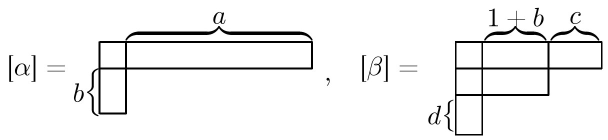

Рис. 3.

Вычислим степени характеров φ и ψ. По утверждению 2.2, используя рис. 3, находим, что $\varphi(1) = \chi^{\alpha}(1) = n!/na!b!$ и $\psi(1) = \chi^{\beta}(1) = n!/a(2+b+c)(1+b+c)\dots(2+c)c!(2+b+d)(1+b)!d!$. Согласно (10) равны знаменатели этих дробей, т. е.

$$n(a-1)!(1+c) = (2+b+c)!d!(1+b)(2+b+d).$$

Если $d > 0$, то отсюда, учитывая, что $a-1 = 2+b+c+d$ (так как $n = 1+a+b = 4+2b+c+d$ согласно рис. 3), получаем

$$\frac{n(1+c)}{2+b+d}\frac{2+b+c+d}{d}\frac{2+b+c+d-1}{d-1}\cdots\frac{2+b+c+1}{1} = 1+b,$$

что противоречиво, так как все перемножаемые дроби левой части больше единицы и последняя из них больше правой части.

Следовательно, $d = 0$, $a = 3+b+c$ и $(4+2b+c)(1+c) = (1+b)(2+b)$. Последнее равенство показывает, что при $c = 0$ будет $b = 1$, а это противоречит четности n (см. (7)), ибо $n = 1+a+b$, а a нечетно по (8). Итак, $c \neq 0$. Далее, так как $n = 4+2b+c$, то c четно и поэтому $c \geq 2$. Понятно, что H^{α}_{14} есть единственный крюк в $[\alpha]$ длины $a-2 = 1+b+c \geq 3+b$, причем $a-2$ нечетно. Значит, по лемме 3.7 диаграмма $[\beta]$ также должна иметь крюк длины $a-2$. Найдем его. Имеем $h^{\beta}_{11} = a$, $h^{\beta}_{12} = 2+b+\mathrm{c} > a-2$, $h^{\beta}_{13} = 1+b+\mathrm{c} = a-2$, а все другие длины крюков меньше $a-2$. Таким образом, H^{β}_{13} — единственный крюк длины $a-2$ в $[\beta]$. Следовательно, по теореме Мурнагана — Накаямы

$$\chi^{\alpha}(g_{(a-2,b+3)}) = \chi^{(3,1^b)}(g_{(b+3)}) = (-1)^b,$$

но $\chi^{\beta}(g_{(a-2,b+3)}) = \chi^{(1+b,2)}(g_{(b+3)}) = 0$, что противоречиво, поскольку $g_{(a-2,b+3)} \in A_n$. Следовательно, случай 1 невозможен.

Случай 2. Пусть h^{β}_{11} четно. Согласно (5) $h^{\beta}_{11} \geq a$.

2A. Предположим что $h^{\beta}_{11} > a$. Тогда $[\beta]$ имеет единственный крюк длины h^{β}_{11}, а $[\alpha]$ не имеет крюков такой длины. Следовательно, по лемме 3.7

диаграмма $[\gamma] := [\beta] \setminus R^{\beta}_{11}$ самоассоциированна.

В этом случае диаграмма $[\beta]$ выглядит так же, как и диаграмма, изображенная на рис. 1, с той лишь разницей, что вместо a и b там должны стоять c и d ($\{c,d\} \subset \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $s := \gamma_1$).

Так как диаграмма $[\gamma]$ непуста по (6) и $|[\gamma]| = n - h^{\beta}_{11}$ четно, то

$$s \geq 2 \quad \text{и} \quad |[\gamma]| \geq 4. \tag{11}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$d < c. \tag{12}$$

Так как $h^\beta_{11} = 1 + 2s + c + d$, то $d + c$ нечетно. Согласно (4) $[\beta]$ имеет некоторый крюк H^β_{ij} длины a. Поскольку h^β_{12} — наибольшая из длин крюков в $[\beta]$, отличных от H^β_{11} (ввиду (12)), то $h^\beta_{12} \geq a$. Если $h^\beta_{12} > a$, то $[\beta]$ имеет единственный крюк длины h^β_{12}, а $[\alpha]$ не имеет крюков такой длины. Следовательно, по лемме 3.7 диаграмма $[\beta] \setminus R^\beta_{12}$ должна быть самоассоциированной. Но это не так, что видно из строения $[\beta]$ ($[\beta] \setminus R^\beta_{12}$ получается из $[\gamma]$ добавлением $1 + d$ клеток в конце первого столбца).

Таким образом,

$$h^\beta_{12} = a. \tag{13}$$

Но тогда $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку длины a и по лемме 3.9 для разбиений $\tilde\alpha$ и $\tilde\beta$ числа $n-a$ с диаграммами $[\tilde\alpha] = [\alpha]\setminus R^\alpha_{12} = (1^{1+b})$ и $[\tilde\beta] = [\beta]\setminus R^\beta_{12}$ выполнено одно из условий:

а) a нечетно, и $\chi^{\tilde\alpha}|_{A_{n-a}}$ полупропорционально или пропорционально $\chi^{\tilde\beta}|_{A_{n-a}}$;

б) a четно, и $\chi^{\tilde\alpha}|_S$ полупропорционально или пропорционально $\chi^{\tilde\beta}|_S$, где $S := S_{n-a} \setminus A_{n-a}$.

Случай а) невозможен. Действительно, так как, очевидно, $\alpha \neq \alpha'$ и $\beta \neq \beta'$, то $\chi^{\tilde\alpha}|_{A_{n-a}}$, и $\chi^{\tilde\beta}|_{A_{n-a}}$ — неприводимые характеры группы A_{n-a}. По предположению индукции они не полупропорциональны, а тогда по лемме 3.4 $\tilde\beta \in \{\tilde\alpha, \tilde\alpha'\} = \{(1^{1+b}), (1 + b)\}$, в противоречие с (11).

Рассмотрим случай б). Так как $\chi^{\tilde\alpha}$ — линейный характер группы S_{n-a}, то по (2) характер $\chi^{\tilde\beta}$ не имеет нулевых значений на $S_{n-a} \setminus A_{n-a}$ и по лемме 3.6 выполнено одно из следующих условий:

б1) $\chi^{\tilde\beta}(1) = 1$, т. е. $\tilde\beta \in \{(n - a), (n - a)'\}$,

б2) $n - a = 4$ и $\tilde\beta \in \{(3, 1), (3, 1)'\}$,

б3) $n - a = 5$ и $\tilde\beta \in \{(3, 2), (3, 2)'\}$.

Условие б1) противоречиво ввиду (11).

Если верно б2), то $\tilde\beta = (3, 1)' = (2, 1, 1)$ и тогда $\gamma = (2, 1)$, а это снова противоречит (11).

Условие б3) противоречиво, поскольку число $n - a$ четно (n четно по (7), a четно по условию б)).

Таким образом, мы доказали противоречивость утверждения б), а вместе с ним и противоречивость подслучая 2А.

2Б. Пусть $h^\beta_{11} = a$. Тогда $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку длины a и по лемме 3.9 для разбиений $\tilde\alpha$ и $\tilde\beta$ числа $n - a$ с диаграммами $[\tilde\alpha] = [\alpha] \setminus R^\alpha_{12} = [(1^{1+b})]$ и $[\tilde\beta] = [\beta] \setminus R^\beta_{11}$ выполнено одно из условий:

а) a нечетно, и $\chi^{\tilde\alpha}|_{A_{n-a}}$ полупропорционально или пропорционально $\chi^{\tilde\beta}|_{A_{n-a}}$;

б) a четно, и $\chi^{\tilde\alpha}|_S$ полупропорционально или пропорционально $\chi^{\tilde\beta}|_S$, где $S := S_{n-a} \setminus A_{n-a}$.

Случай а) невозможен, так как мы рассматриваем случай, когда h^β_{11} четно.

Рассмотрим случай б). Так как $\chi^{\tilde\alpha}$ — линейный характер группы S_{n-a}, то по (2) $\chi^{\tilde\beta}$ не имеет нулевых значений на S, и по лемме 3.6 выполнено одно из условий б1)–б3), сформулированных выше при рассмотрении подслучая 2А (но с новыми $\tilde\alpha$ и $\tilde\beta$).

Пусть верно б1). Тогда можно считать (из-за возможности заменить β на β'), что $\tilde\beta = (1 + b)$ и

$$\beta = (2 + b + c, 2 + b, 1^d), \quad \text{где} \quad c, d \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

т. е. $[\beta]$ имеет вид, изображенный на рис. 3. Очевидно, $[\alpha]$ имеет единственный крюк длины $a-1=2+b+c+d\geq 3+b$, причем $a-1$ нечетно. Следовательно, по лемме 3.7 диаграмма $[\beta]$ имеет крюк длины $a-1$. Это возможно лишь при $cd=0$.

Предположим, что $d=0$, но $c\neq 0$. Тогда H^{β}_{12} — единственный крюк длины $a-1=2+b+c$ в $[\beta]$, причем, как легко увидеть, диаграммы $[\tilde{\alpha}]:=[\alpha]\setminus R^{\alpha}_{13}=(2,1^b)$ и $[\tilde{\beta}]:=[\beta]\setminus R^{\beta}_{12}=(1+b,1)$ ассоциированы. Но тогда по теореме Мурнагана — Накаямы

$$|\chi^{\alpha}(z)|=|\chi^{\tilde{\alpha}}(1)|=|\chi^{\tilde{\beta}}(1)|=|\chi^{\beta}(z)|,$$

где z — циклическая перестановка порядка $a-1$ из S_n. Так как $z\in A_n$, то отсюда и из утверждения 1.3 следует, что $\chi^{\alpha}(1)=\chi^{\beta}(1)$. Согласно утверждению 2.2 имеем

$$\chi^{\alpha}(1)=n!/n\,a!\,b!,\quad \chi^{\beta}(1)=n!/a(2+b+c)(1+b+c)\dots(c+2)c!(b+2)!.$$

Следовательно, $(c+1)n=(b+1)(b+2)$ (так как $2+b+c=a-1$), откуда, учитывая, что $n=4+2b+c=2(b+2)+c$, получаем

$$c(c+1)=(b+2)(b-2c-1).$$

Отсюда легко следует, что $c\geq 2$ и $b>2c+1>5$. Число $b+4=n-a+3$ нечетно, а так как, очевидно, диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку длины $b+4$, то по лемме 3.9 полупропорциональны или пропорциональны характеры $\chi^{\hat{\alpha}}|_{A_{a-3}}$ и $\chi^{\hat{\beta}}|_{A_{a-3}}$, где $\hat{\alpha}=(c,1^b)$ и $\hat{\beta}=(1+b,c-1)$. Очевидно, что $\hat{\alpha}\neq\hat{\alpha}'$ и $\hat{\beta}\neq\hat{\beta}'$. Поэтому $\chi^{\hat{\alpha}}|_{A_{a-3}}$ и $\chi^{\hat{\beta}}|_{A_{a-3}}$ — неприводимые характеры группы A_{a-3}, и по предположению индукции они не полупропорциональны. Но тогда они пропорциональны и по лемме 3.4 должно быть $\hat{\beta}\in\{\hat{\alpha},\hat{\alpha}'\}$, что, очевидно, не так. Итак, случай $d=0$ и $c\neq 0$ противоречив.

Предположим теперь, что $c=0$. Тогда H^{β}_{21} — единственный крюк длины $a-1=2+b+d$ в $[\beta]$, причем $[\hat{\alpha}]:=[\alpha]\setminus R^{\alpha}_{13}=[(2,1^b)]$ и $[\hat{\beta}]:=[\beta]\setminus R^{\beta}_{21}=[(2+b)]$. Но тогда для любой четной перестановки x чисел $1,\dots,b+2$ и циклической перестановки z, состоящей из $a-1$ чисел $b+3,\dots,n$, по теореме Мурнагана — Накаямы

$$\chi^{\alpha}(z\times x)=\chi^{\tilde{\alpha}}(x),\quad \chi^{\beta}(z\times x)=\chi^{\tilde{\beta}}(x)=1.$$

Так как $z\times x\in A_n$, то по лемме 3.9 характеры $\chi^{\hat{\alpha}}|_{A_{b+2}}$ и $\chi^{\hat{\beta}}|_{A_{b+2}}$ полупропорциональны или пропорциональны. Поскольку второй из них линейный, то первый также должен быть линейным (см. [2, 2A29]). Но это не так, поскольку согласно утверждению 2.2 $\chi^{\hat{\alpha}}(1)=(b+2)!/(b+2)b!=b+1$, где $b>0$ по (2). Следовательно, случай б1) невозможен.

Пусть верно б2). Тогда можно считать, что $\beta=(4+c,4,2,1^d)$, $b=3$, $n=4+a$ и $a=6+c+d$ ($\{c,d\}\subset\{\mathbb{N}\cup\{0\}\}$). Так как $[\alpha]$ имеет единственный крюк длины $a-1$ и $a-1$ нечетно, то по лемме 3.7 диаграмма $[\beta]$ также имеет крюк длины $a-1$. Это возможно лишь при $c+d=1$. Но тогда $n=11$, что противоречит четности n (по (7)).

В случае б3) $n-a=5$, в противоречие с четностью n и a.

Таким образом, подслучай 2Б, а вместе с ним и случай 2 противоречивы.

Предложение 5.2 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоногов В. А.* D-блоки характеров конечной группы // Исследования по теории групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1984. С. 3–31. (Англ. перевод: Belonogov V. A. D-blocks of characters of finite group // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1989. V. 143. P. 103–128).
2. *Белоногов В. А.* Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990.
3. *Белоногов В. А.* О малых взаимодействиях в конечных группах // Тр. ИММ УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 3–18.
4. *Белоногов В. А.* Взаимодействия и D-блоки в конечных группах // Подгрупповая структура групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 4–44.
5. *Белоногов В. А.* Малые взаимодействия в группах $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$, $\mathrm{PGL}_3(q)$ и $\mathrm{PGU}_3(q)$ // Тр. ИММ УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 17–47.
6. *Белоногов В. А.* Малые взаимодействия в группах $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$, $\mathrm{PSL}_3(q)$ и $\mathrm{PSU}_3(q)$ // Тр. ИММ УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 3–27.
7. *James G., Kerber A.* The representation theory of the symmetric group. London: Addison-Wesley, 1981.
8. *Джеймс Г.* Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982.
9. *Масляков И. Ю.* Строго точные неприводимые характеры симметрических и знакопеременных групп // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 8. С. 55–80.

Статья поступила 26 мая 2003 г.

Белоногов Вячеслав Александрович,
Институт математики и механики УрО РАН
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219
`belonogov@imm.uran.ru`