Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 517.55

КОНЕЧНОМЕРНОСТЬ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЁТЕРОВЫХ p–АЛГЕБР ЛИ

М. А. Шевелин

Аннотация: Доказывается конечномерность неприводимых представлений почти разрешимых ограниченных алгебр Ли с условием обрыва возрастающих цепочек p-подалгебр над совершенным полем.

Ключевые слова: почти полициклическая p-алгебра Ли, ограниченная универсальная обертывающая алгебра, неприводимое представление.

Введение

Работа посвящена доказательству следующего результата.

Теорема. *Пусть L — p-алгебра Ли над совершенным полем K характеристики $p > 0$, $R = uL$ — ограниченная универсальная обертывающая алгебра для L. Предположим, что L обладает p-подалгеброй G конечной коразмерности, G разрешима и удовлетворяет условию максимальности для p-подалгебр. Тогда каждый неприводимый R-модуль V конечномерен.*

В п. 2 устанавливается локальная конечность ассоциативной алгебры, порожденной некоторыми дифференцированиями свободной конечно порожденной коммутативной p-алгебры Ли над совершенным полем. Из этого выводится конечномерность некоторых p-алгебр Ли, которые появляются в п. 3.

Главный результат п. 3 — это следствие 3.5, утверждающее в основном, что в условиях теоремы, сформулированной выше, ограниченная универсальная обертывающая алгебры G удовлетворяет полиномиальному тождеству. Здесь же вводятся полициклические p-алгебры Ли, получающиеся из однопорожденных при помощи конечного числа расширений, и устанавливаются некоторые их свойства, похожие на свойства полициклических групп.

Под *представлением* p-алгебры Ли G мы будем понимать p-представление, т. е. представление ее ограниченной универсальной обертывающей алгебры, то же самое соглашение касается G-модулей. Поэтому для p-отображения используется сокращенное обозначение $x \mapsto x^p$.

Мне не известно, насколько существенно требование совершенности поля K, но без него, по-видимому, неверен аналог основной теоремы о конечно порожденных абелевых группах (лемма 1.1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00489) и фондом «Университеты России» (грант УР 04.01.049).

1. Предварительные сведения

Буквой k обозначается простое поле характеристики $p > 0$, K — его совершенное расширение. Объектом изучения в этой работе являются p-алгебры Ли. Определение p-алгебр Ли и ограниченных универсальных обертывающих, а также некоторые свойства можно найти в [1, с. 94–96, 101, 123].

Автоморфизм Фробениуса поля K обозначим через $\pi : K \to K$. Рассмотрим множество $K_p[T]$ всех p-многочленов от буквы T с коэффициентами в поле K. На этом множестве можно определить операцию $(f \circ g)(T) = f(g(T))$. Эта операция ассоциативна, k-билинейна и обладает следующим свойством: $T^p \circ \alpha T = \alpha^\pi T^p \circ T$. Обозначим через $K[t,\pi]$ алгебру косых многочленов над K с автоморфизмом π. Эта ассоциативная алгебра как K-пространство есть алгебра многочленов от t, а умножение полностью определено правилом $t\alpha = \alpha^\pi t$.

Отображение

$$\mathrm{K}_p[T] \ni \sum_i \alpha_i T^{p^i} \to \sum_i \alpha_i t^i \in K[t,\pi]$$

является изоморфизмом ассоциативных алгебр. Если A — коммутативная p-алгебра Ли над K, то можно превратить A в $K_p[T]$-модуль и тем самым в $K[t,\pi]$-модуль, полагая $f \circ a = f|_{T=a}$ для $f \in K_p[T], a \in A$. В книге П. Кона [2] доказано, что $K[t,\pi]$ есть кольцо главных правых и левых идеалов, а также (гл. 8, § 2) приведены теоремы о строении конечно порожденных модулей над такими кольцами. Из этих теорем следует

1.1. Лемма. *Каждая конечно порожденная коммутативная p-алгебра Ли A над полем K раскладывается в прямую сумму однопорожденных p-подалгебр. Для каждой p-подалгебры $X \le A$ найдутся множества порождающих*

$$\{x_1,\dots,x_m\}, \quad \{a_1,\dots,a_m\}$$

для X и A соответственно и p-многочлены $\{f_i \mid 1 \le i \le m\}$ из $K_p[T]$ такие, что $x_i = f_i(a_i)$. Найдутся две такие p-подалгебры A_1 и A_2, что A_1 без кручения (как $K[t,\pi]$-модуль), A_2 конечномерна и $A = A_1 \oplus A_2$. В A_2 существует цепочка

$$0 = B_0 < B_1 < \dots < B_n = A_2$$

p-подалгебр, все факторы которой одномерны.

Пусть L — p-алгебра Ли над полем F характеристики p, uL — ее ограниченная универсальная обертывающая алгебра. Если X — упорядоченный F-базис пространства L, то F-базис пространства uL состоит из всевозможных формальных произведений $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_d^{n_d}$ элементов $x_j \in X$, удовлетворяющих двум условиям: $x_1 < x_2 < \dots < x_d$ и $n_j < p$ при $1 \le j \le d$. Отсюда, в частности, следует, что для каждой p-подалгебры G в L ассоциативная алгебра uL есть свободный модуль над своей подалгеброй uG. Если коразмерность $\dim_F(L/G)$ конечна, то этот модуль имеет конечный ранг. По-другому ограниченную универсальную обертывающую алгебру можно определить как ассоциативную алгебру над полем F, заданную теми же порождающими, что и L, и подходящими определяющими соотношениями, точный вид которых для нас сейчас не важен. Поэтому если L — конечно порожденная p-алгебра Ли, то uL — конечно порожденная ассоциативная алгебра.

2. Дифференцирования коммутативных p-алгебр Ли

Пусть A — свободная коммутативная p-алгебра Ли над полем K с порождающими $x_1, \ldots, x_n$, $\mathrm{Der}_p A = \{\delta \in \mathrm{End}_K A \mid \delta(A^p) = 0\}$ — p-алгебра Ли p-дифференцирований [1, с. 101] алгебры A. Сопоставим каждому дифференцированию δ матрицу (ϕ_{ij}), в которой $\phi_{ij} \in K[t, \pi]$ определяются следующим образом. Пусть $\delta x_i = \sum f_{ij}(x_j)$, тогда $\phi_{ij} \in K[t, \pi]$ — это многочлены, соответствующие p-многочленам f_{ij} при изоморфизме ассоциативных алгебр $K_p[T]$ и $K[t, \pi]$, который определен выше.

Множество $n \times n$-матриц с элементами из множества S обозначаем через $M_n(S)$. Для $\phi(t) \in K[t, \pi]$ положим $\varepsilon\phi = \phi(0)$, а для любой матрицы $m = (m_{ij})$ с элементами в $K[t, \pi]$ пусть $\varepsilon m = (\varepsilon m_{ij})$. Обозначим через E ассоциативную K-алгебру без единицы, элементы которой составляют $M_n(K[t, \pi])$, а умножение определяется правилом $a.b = a(\varepsilon b)$ (справа стоит произведение матриц). Эта алгебра действительно ассоциативна в силу равенства $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Очевидно, K-пространство $\mathrm{Der}_p A$ вкладывается в E. Для этого нужно выбрать базис алгебры A, рассмотренной как свободный модуль над $K[t, \pi]$, и сопоставить дифференцированию δ матрицу коэффициентов разложения по этому базису образов под действием δ базисных элементов. При этом, как легко проверяется, действие E на $K[t, \pi]^n$, определенное правилом $a.v = a(\varepsilon v)$ (в правой части равенства стоит произведение матрицы на вектор), согласовано с действием $\mathrm{Der}_p A$ на A, а суперпозиции дифференцирований отвечает произведение элементов E.

2.1. Лемма. *Пусть R — конечно порожденная ассоциативная подалгебра в E. Тогда R конечномерна.*

Доказательство. Предположим, что R порождается множеством $\{r_j\}$ $(1 \le j \le l)$. Тогда $K^n + R.K[t, \pi]^n$ есть R-инвариантное подпространство относительно определенного выше действия и

$$K^n + R.K[t, \pi]^n \subset K^n + r_1 K^n + \cdots + r_l K^n.$$

Последнее K-пространство конечномерно.

Представление R в пространстве $K^n + R.K[t, \pi]$ точное, так как для каждого $r \in R$ равенство $r.(K^n + R.K[t, \pi]) = 0$ влечет $r.K^n = rK^n = 0$, а значит, $r = 0$. Отсюда следует заключение леммы.

2.2. Следствие. *Конечно порожденная p-подалгебра Ли L в p-алгебре Ли $\mathrm{Der}_p A$ конечномерна.*

2.3. Следствие. *Пусть A' — конечно порожденная коммутативная p-алгебра Ли над K, L — конечно порожденная p-подалгебра в $\mathrm{Der}_p A'$. Тогда L конечномерна.*

Доказательство. Выберем в A' какое-нибудь конечное порождающее множество X'. Пусть A — свободная коммутативная p-алгебра Ли над K с множеством свободных порождающих X, находящемся во взаимно однозначном соответствии с X', и пусть Δ' — конечное множество, порождающее L. Каждое дифференцирование $\delta' \in \Delta'$ определяется своим действием на порождающие A'. Пусть $\delta \in \mathrm{Der}_p A$ будет одним из дифференцирований, действующих на порождающие A «так же», как δ' действует на порождающие A'. Сразу видно, что значки δ (с точностью до штрихов) перестановочны со значком гомоморфизма

$A \to A'$, переводящего элементы X в соответствующие элементы X'. Получается эпиморфизм, который переводит каждый лиев p-многочлен от $\{\delta\}$ в такой же многочлен от $\{\delta'\}$. Поэтому L конечномерна.

3. Разрешимые p-алгебры Ли с условием максимальности

Пусть G — p-алгебра Ли над полем K. Она называется нётеровой, если каждая возрастающая цепочка p-подалгебр в G обрывается на конечном шаге, это эквивалентно тому, что все p-подалгебры в G конечно порождены. Если в G найдется конечная цепочка p-идеалов (субнормальная цепочка p-подалгебр)

$$0 = G_0 < G_1 < \cdots < G_m = G$$

с коммутативными (однопорожденными) факторами G_{j+1}/G_j $(0 \le j \le m-1)$, то G называется *разрешимой* (*полициклической*), и G называется *нильпотентной*, если она нильпотентна как алгебра Ли.

3.1. Лемма. *Пусть G — полициклическая p-алгебра Ли над полем K. Тогда ее ограниченная универсальная обертывающая ассоциативная алгебра uG нётерова справа и слева.*

Доказательство. Выберем в G цепочку $0 = G_0 < G_1 < \cdots < G_m = G$ с однопорожденными факторами, обозначим $R_i = uG_i$ и предположим, что R_i нётерова справа (при $i = 0$ это очевидно). Пусть $x \in G_{i+1}$ такой элемент, что G_{i+1} порождается (как алгебра) этим элементом и G_i. Можно считать, что G_{i+1}/G_i бесконечномерна (в противном случае R_{i+1} — конечно порожденный модуль над R_i). Обозначим через δ дифференцирование алгебры R_i такое, что $\delta|_{G_i} = ad\,x|_{G_i}$. Тогда алгебра R_{i+1} представится как кольцо косых многочленов $R_i[x; 1, \delta]$. По теореме 8.2 из [2, § 0.8] R_{i+1} нётерова справа и слева.

3.2. Лемма. *Разрешимая p-алгебра Ли G над полем K нётерова тогда и только тогда, когда G полициклическая.*

Доказательство. Если G разрешимая и нётерова, то из леммы 1.1 можно получить, что G полициклическая.

Обратно, пусть G полициклическая. Допустим, что $A_1 < A_2 < \dots$ — строго возрастающая бесконечная цепочка p-подалгебр. Тогда по теореме о базисе ограниченной универсальной обертывающей алгебры [1, с. 101] цепочка правых идеалов в uG, порожденных A_i, тоже бесконечная и строго возрастающая. Это противоречит лемме 3.1.

3.3. Лемма. *Пусть G — полициклическая p-алгебра Ли над полем K. Тогда найдется такой нильпотентный p-идеал N в G, что $\dim_K(G/N) < \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим в G цепочку p-идеалов

$$0 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{m+1} = G,$$

где все факторы G_{i+1}/G_i — конечно порожденные коммутативные p-алгебры Ли. Рассмотрим представления G в факторах G_i/G_{i+1}, определенные правилом: для $g \in G$, $h \in G_i$ положим $g.(h + G_{i+1}) = [g, h] + G_{i+1}$. По следствию 2.3 ядра N_i этих представлений имеют конечные коразмерности в G, значит, пересечение $N = \bigcap N_i$ тоже имеет конечную коразмерность в G. По определению N для всех $i = 0, \dots, m$ справедливо включение $[G_{i+1}, N] \subseteq G_i$, следовательно, $[G, N, \dots, N] = 0$, если прокоммутировать $m+1$ раз. Тем более N нильпотентна.

3.4. Следствие. *В условиях леммы* 3.3 *размерность* $\dim_K(G/Z(G))$ *конечна.*

Доказательство. Пусть N и m обозначают то же, что в лемме 3.3. Для каждого $h \in N$ если $p^l \geq m+1$, то $h^{p^l} \in Z(N)$. Поскольку $Z(N)$ есть коммутативный p-идеал в G, то $Z(N)^p \subseteq Z(G)$. Значит, фактор-алгебра $N' = N/(Z(G) \cap N)$ нильпотентна, и $x^{p^{l+1}} = 0$ для всех $x \in N'$. Отсюда следует, что центр $Z(N')$ конечномерен. Индукцией по ступени нильпотентности N' убеждаемся, что N' конечномерна, откуда и вытекает заключение леммы.

3.5. Следствие. *В условиях леммы* 3.3 *алгебра* uG *вкладывается в алгебру матриц над коммутативной алгеброй и, значит, удовлетворяет полиномиальному тождеству.*

Доказательство. Алгебра uG — свободный модуль конечного ранга над коммутативным подкольцом $uZ(G)$ своего центра $Z(uG)$, откуда и следует лемма.

4. Основной результат

4.1. Теорема. *Пусть* L — p*-алгебра Ли над полем* K, $R = uL$ — *ограниченная универсальная обертывающая алгебра для* L. *Предположим, что* L *обладает* p*-подалгеброй* G *конечной коразмерности,* G *разрешима и удовлетворяет условию максимальности для* p*-подалгебр. Тогда каждый неприводимый* R*-модуль* V *конечномерен.*

Доказательство. Будем обозначать штрихом гомоморфизм

$$' : R \to \mathrm{End}_K(V),$$

определяющий представление R в V. Мы можем предполагать, что алгебра G' бесконечномерна, так как в противном случае R', а значит, и V конечномерны и доказывать нечего.

По лемме 2 из работы [3] можно предполагать, что G есть p-идеал в L. По следствию 3.4 центр $Z(G)$ алгебры G имеет в L конечную коразмерность. Обозначим $S = u(Z(G)^p)$. Так как $Z(G)$ — коммутативный p-идеал алгебры L, то $Z(G)^p \subseteq Z(L)$. Коразмерность $\dim_K(Z(G)/Z(G)^p)$ конечна, значит, и коразмерность $\dim_K(L/Z(G)^p)$ тоже конечна. Поскольку S — ограниченная универсальная обертывающая подалгебры в L, то S — конечно порожденная K-алгебра и R есть свободный модуль конечного ранга над нётеровым ассоциативным кольцом S. Промежуточные между S и R подалгебры, будучи S-подмодулями, конечно порождены как S-модули. Тем самым эти подалгебры являются конечно порожденными K-алгебрами. То же самое справедливо и для гомоморфных образов S' и R'.

Так как R' — примитивная PI-алгебра, по теореме Капланского [4] для некоторого натурального числа n имеется изоморфизм $R' \cong M_n(Z')$, где Z' — центр алгебры R'. Согласно предыдущему K-алгебра Z', промежуточная между S' и R', конечно порождена.

При $n = 1$ наша теорема справедлива, так как в этом случае к полю R' можно применить теорему Гильберта о нулях, одна из формулировок которой гласит, что неприводимые представления конечно порожденных коммутативных алгебр конечномерны над основным полем. Далее считаем, что $n \geq 2$.

Кольцо R' содержит много конечных мультипликативных групп Γ, K-линейная оболочка которых совпадает с R'. Например, пусть $\Gamma = GL_n(k) \subset R' \cong$

$M_n(Z')$. Рассмотрим трансвекции $\tau_{ij}(1) = 1 + e_{ij} \in \Gamma$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n,\ i \neq j)$. Поскольку $\tau_{ij} - 1 = e_{ij}$ при $i \neq j$, $e_{i1}e_{1i} = e_{ii}$ при $i \neq 1$ и $e_{12}e_{21} = e_{11}$, то Z'-линейная оболочка Γ совпадает с R':

$$R' = \sum_{x\in\Gamma} Z'x.$$

Пусть M — максимальный Z'-подмодуль в V (см. лемму 3.1). Поскольку V/M — неприводимый модуль над гомоморфным образом Z' алгебры многочленов от конечного числа неизвестных, по теореме Гильберта о нулях V/M — конечномерное K-пространство.

Так как элементы $x \in \Gamma$ суть обратимые линейные преобразования, пространства V/Mx изоморфны V/M. Поэтому пространство

$$W = \bigcap_{x\in\Gamma} Mx,$$

будучи конечным пересечением подпространств конечной коразмерности, само имеет конечную коразмерность в V. Очевидно, что $W \subseteq M$ есть R-подмодуль ($y \in \Gamma$ переставляет компоненты пересечения), строго меньший V. Из неприводимости V следует, что $W = 0$. Тем самым V — конечномерное K-пространство и подалгебра $G' \subseteq \mathrm{End}_K(V)$ конечномерна. Это противоречие заканчивает доказательство.

Я благодарен профессорам Л. А. Бокутю и А. Н. Зубкову. Первому — за поддержку, второму — за важное замечание.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1976.
2. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975.
3. *Кукин Г. П.* Проблема равенства и свободные произведения алгебр Ли и ассоциативных алгебр // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 2. С. 85-95.
4. *Херстейн И.* Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 23 января 2004 г.

Шевелин Михаил Александрович
Омский гос. университет, кафедра алгебры, проспект Мира 55-а, Омск 644077
shevelin@math.omsu.omskreg.ru