Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 510.53+515.1

О ГОМЕОМОРФИЗМАХ ЭФФЕКТИВНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А. С. Морозов

Аннотация: Изучаются эффективные представления и гомеоморфизмы эффективных топологических пространств. С помощью построения функтора из категории вычислимых моделей в категорию эффективных топологических пространств, в частности, показано, что существуют гомеоморфные эффективные топологические пространства, между которыми не существует гиперарифметического гомеоморфизма; существуют эффективные топологические пространства с группой автогомеоморфизмов мощности континуум, среди которых только тривиальный автогомеоморфизм является гиперарифметическим. Показано также, что если группа автогомеоморфизмов гиперарифметического топологического пространства имеет мощность менее 2^ω, то эта группа гиперарифметическая.

Введено понятие сильного вычислимого гомеоморфизма и решена проблема числа эффективных представлений T_0-пространств с эффективной базой открыто-замкнутых множеств относительно сильных гомеоморфизмов.

Ключевые слова: эффективное топологическое пространство, эффективная топология, гомеоморфизм, автогомеоморфизм, вычислимая модель, конструктивная модель.

1. Введение

В работе изучаются проблема числа эффективных представлений эффективных топологических пространств и их гомеоморфизмы и автогомеоморфизмы.

Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями топологии и теории вычислимости. Для понимания п. 4 и некоторых результатов п. 5 требуются знания о допустимых множествах и гиперарифметических множествах (см. [1]).

В работе существенно используются результаты об автоморфизмах вычислимых моделей. При этом может создаться впечатление, что рассмотрение таких пространств не дает ничего нового по сравнению с вычислимыми моделями. Однако это не так. Одна из причин состоит в том, что у гомеоморфизмов топологических пространств имеется одно свойство, которое существенно отличает их от автоморфизмов моделей. А именно, заметим, что если φ — перестановка на основном множестве модели $\mathfrak{M}$, каждая конечная часть которой содержится в некотором ее автоморфизме, то и сама она является автоморфизмом. В топологических пространствах это не так. Достаточно рассмотреть топологическое пространство $\omega + 1 + \omega$ с интервальной топологией и перестановку, переставляющую между собой элементы первого и второго сегментов ω и оставляющую

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ — DFG (код проекта 01–01–04003), INTAS (грант 00–499) и Фонда содействия отечественной науке.

© 2004 Морозов А. С.

средний элемент 1 на месте. Любая ее конечная часть содержится в некотором автогомеоморфизме этого пространства, но сама она не является автогомеоморфизмом, поскольку не сохраняет пределы.

Мы обозначаем гомеоморфность топологических пространств A и B через $A \cong B$. Множество изолированных точек топологического пространства $\mathfrak{X}$ обозначается через $\mathrm{Is}(\mathfrak{X})$, а множество его предельных точек — через $\mathrm{Lim}(\mathfrak{X})$. Если $\mathfrak{X}$ — топологическое пространство, то $\mathfrak{X} = \mathrm{Is}(\mathfrak{X}) \cup \mathrm{Lim}(\mathfrak{X})$ и $\mathrm{Is}(\mathfrak{X}) \cap \mathrm{Lim}(\mathfrak{X}) = \varnothing$. Если A — открытое подмножество в $\mathfrak{X}$, то мы обозначаем этот факт так: $A \Subset \mathfrak{X}$. Мощность множества X обозначается символом $|X|$. Симметрическая разность A и B, равная $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, обозначается через $A \triangle B$. Если множество $A \triangle B$ конечно, то пишем $A \approx B$. Отношение $\approx$ является отношением эквивалентности на любом семействе множеств. Произвольное непустое подмножество $T \subseteq 2^{<\omega}$ называется *бинарным деревом,* если с каждым своим элементом оно содержит все свои начальные сегменты. Если T_0 и T_1 — бинарные деревья и $T_0 \subseteq T_1$, то мы говорим, что T_0 — *поддерево* T_1. Если $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in 2^{<\omega}$ и ε_0 — начальный сегмент ε_1, мы обозначаем это так: $\varepsilon_0 \sqsubseteq \varepsilon_1$. Пустая последовательность обозначается через Λ. Обозначим для $\varepsilon \in 2^{<\omega}$ и $m \in \omega$ через $\varepsilon \upharpoonright m$ последовательность, полученную из ε отбрасыванием всех элементов начиная с $m+1$-го.

Зафиксируем некоторое вычислимое взаимно-однозначное отображение $c(x, y)$ из $\omega \times \omega$ на ω. Вычислимые функции $c^k(x_1, \dots, x_k)$, устанавливающие взаимно-однозначное соответствие между ω^k, $k = 2, 3, \dots$, и ω, определяются по индукции как обычно:

$$c^2(x, y) = c(x, y), \quad c^{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = c(c^n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}).$$

Зафиксируем также некоторые вычислимые функции r и ℓ, обладающие свойствами $\ell c(x, y) = x$ и $rc(x, y) = y$, предназначенные для раскодировки пар натуральных чисел. Для $A, B \subseteq \omega$ положим

$$A \oplus B = \{c(x, 0) \mid x \in A\} \cup \{c(x, 1) \mid x \in B\}.$$

Под *индексом* конечного множества $S = \{a_0 < \dots < a_{m-1}\}$ понимается натуральное число $\sum\limits_{i=0}^{m} 2^{a_i}$ (отсюда следует, что индекс пустого множества равен 0). Конечное множество с индексом m обозначается через D_m. Тьюрингова сводимость обозначается знаком $\leq_T$. Эквивалентость по Тьюрингу обозначается через $\equiv_T$. Символом $\mathrm{Aut}_c(\mathfrak{M})$ обозначим группу всех вычислимых автоморфизмов вычислимой модели $\mathfrak{M}$.

Изучению эффективности в топологических пространствах, понимаемой в различных смыслах, посвящено немало работ (см., например, [2–8]; этот список ни в коем случае не претендует на полноту).

Здесь мы будем пользоваться довольно-таки сильным определением эффективных топологических пространств, под которое, впрочем, подпадает значительная часть естественных примеров.

Определение 1. *Эффективное топологическое пространство* — это упорядоченная пара $\mathfrak{S} = \langle S, B \rangle$, где S — начальный сегмент ω и $B = (B_i)_{i \in \omega}$ — семейство подмножеств S такое, что

(1) отношение $\{c(x, i) \mid x \in B_i\}$ вычислимо;

(2) отношение $B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k} \subseteq B_{j_1} \cup \dots \cup B_{j_s}$ вычислимо по индексам $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_s$;

(3) семейство B образует базу топологии на S, т. е. множества B_i удовлетворяют следующему условию:

для любых $i, j \in \omega$ существует подмножество $I \subseteq \omega$ такое, что

$$B_i \cap B_j = \bigcup_{k \in I} B_k.$$

Обозначим топологию, определенную этой базой $B = (B_i)_{i\in\omega}$, через τ_B. Семейство $B = (B_i)_{i\in\omega}$ называется *эффективной базой* $\mathfrak{S}$.

Определение гиперарифметических топологических пространств получается из определения эффективных топологических пространств заменой слова «вычислимый» словом «гиперарифметический».

Приведем пример эффективного топологического пространства. Зафиксируем нумерацию $\nu : \omega \to \mathbb{Q}$ множества рациональных чисел, в которой по любому номеру $i \in \omega$ можно эффективно выписать дробь $\frac{m}{n} = \nu(i)$, а также по любой записи дроби $\frac{m}{n}$ можно вычислить ее ν-номер, т. е. такое натуральное число i, что $\frac{m}{n} = \nu(i)$. Основным множеством этого пространства будет множество всех натуральных чисел ω, а база открыто-замкнутых множеств этого пространства состоит из множеств

$$U_i = \{x \in \omega \mid \sqrt{2} \cdot \nu(\ell(i)) < \nu(x) < \sqrt{2} \cdot \nu(r(i))\}, \quad i \in \omega.$$

Если $\mathfrak{X}$ — эффективное топологическое пространство и $(U_i)_{i<\omega}$ — его эффективная база, то существует алгоритм, позволяющий отвечать на все вопросы следующих типов: «$t(U_1, \dots, U_n) = \varnothing$?» и «$t(U_1, \dots, U_n) = q(U_1, \dots, U_n)$?», где t и q — булевы выражения. В самом деле, второй тип вопросов сводится к первому, поскольку $t = q$ эквивалентно $(t \cap \bar{q}) \cup (q \cap \bar{t}) = \varnothing$. Для того чтобы отвечать на вопросы первого типа, преобразуем выражение t к объединению выражений вида $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n} \cap \overline{U}_{j_1} \cap \dots \cap \overline{U}_{j_m}$. Условие $t = \varnothing$ эквивалентно, таким образом, конъюнкции условий $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n} \cap \overline{U}_{j_1} \cap \dots \cap \overline{U}_{j_m} = \varnothing$. Последнее, в свою очередь, эквивалентно $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n} \subseteq U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_m}$, что уже является вычислимым по условию.

2. Основные категории и функторы

Здесь определяются основные категории и функторы, которые будут служить инструментом для переноса некоторых результатов из теории вычислимых моделей на эффективные топологические пространства.

Все, что нам нужно в данной работе, — это функтор из категории вычислимых моделей в категорию эффективных топологических пространств, сохраняющий ряд свойств морфизмов между объектами. Для облегчения доказательства определим этот функтор как композицию двух функторов. Идеи конструкций, описанных в этом параграфе, известны как фольклор. Тем не менее мы вынуждены детально описать эти конструкции, поскольку нам понадобится тщательная проверка их свойств в ходе доказательства.

Нам предстоит определить три категории: $\mathscr{M}$ (категорию вычислимых моделей), $\mathscr{O}$ (категорию упорядоченных множеств), $\mathscr{T}$ (категорию моделей, тесно связанных с топологическими пространствами), и функторы $\mathbf{F} : \mathscr{M} \to \mathscr{O}$, $\mathbf{G} : \mathscr{O} \to \mathscr{T}$. Функтор, нужный нам, является композицией $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$.

Определим эти категории.

Категория $\mathscr{M}$. *Объекты* категории $\mathscr{M}$ — это модели счетных предикатных сигнатур $\langle P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \dots \rangle$ (n_i — число аргументов соответствующего предикатного символа), основные множества которых являются подмножествами множества всех натуральных чисел ω. Для любых объектов $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ этой категории класс всех *морфизмов* из $\mathfrak{M}_0$ в $\mathfrak{M}_1$ состоит в точности из всех изоморфизмов из $\mathfrak{M}_0$ на $\mathfrak{M}_1$.

Категория $\mathscr{O}$. *Объекты* категории $\mathscr{O}$ суть частично упорядоченные подмножества ω. Для любых объектов $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ этой категории класс всех *морфизмов* из $\mathfrak{S}_0$ в $\mathfrak{S}_1$ состоит из всех изоморфизмов из $\mathfrak{S}_0$ на $\mathfrak{S}_1$.

Категория $\mathscr{T}$. *Объекты* категории $\mathscr{T}$ — упорядоченные пары $\langle S, \mathrm{B}\rangle$, первые компоненты которых — непустые подмножества $S \subseteq \omega$, а вторые компоненты — семейства $\mathrm{B} = (B_i)_{i\in S} \in (\mathscr{P}(S))^S$ такие, что $\{B_i \mid i \in S\}$ образует базу топологии.

Для каждой пары $\langle S, B\rangle$, $\langle T, V\rangle$ объектов этой категории класс всех морфизмов из $\langle S, B\rangle$ в $\langle T, V\rangle$ состоит из всех гомеоморфизмов из топологического пространства $\langle S, \tau_B\rangle$ на $\langle T, \tau_V\rangle$.

Для объекта $\mathfrak{A} = \langle A, B\rangle \in \mathscr{T}$ обозначим через $\mathrm{Top}(\mathfrak{A})$ его топологическое пространство $\langle A, \tau_B\rangle$.

Замечание 1. Поскольку каждая операция $g : M^n \to M$ модели $\mathfrak{M}$ может быть представлена своим графом

$$\Gamma(g) = \{\langle x_1, \dots, x_n, g(x_1, \dots, x_n)\rangle \mid x_1, \dots, x_n \in M\},$$

для каждой модели $\mathfrak{M}$ определено ее предикатное представление $\mathfrak{M}^P$, в котором все операции g заменены их графами $\Gamma(g)$. Легко проверить, что группы автоморфизмов моделей $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^P$, рассматриваемые как семейства перестановок на M, совпадают. Более того, если $\mathfrak{M}$ — вычислимая модель, то такова и $\mathfrak{M}^P$. Если сигнатура модели $\mathfrak{M}$ конечна, то для наших целей мы можем рассматривать ее как модель бесконечной сигнатуры, добавив ω символов, интерпретируемых как равенство. После этих изменений группа автоморфизмов модели и ее категорные свойства не изменятся. Таким образом, ограничение на сигнатуру, содержащееся в определении категории $\mathscr{M}$, не означает потерю общности в наших рассмотрениях.

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель счетной предикатной сигнатуры $\left\langle P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \dots\right\rangle$ и ее основное множество M является подмножеством ω. Определим ее *диаграмму* $\mathrm{D}(\mathfrak{M})$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\mathfrak{M}) = M \oplus \big(\{c^3(i, 1, c^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})) \mid \mathfrak{M} \models P_i^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})\}\\ \cup \{c^3(i, 0, c^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})) \mid \mathfrak{M} \models \neg P_i^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})\}\big).\end{aligned}$$

Первый функтор $\mathbf{F}$ определяется в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Существует функтор* $\mathbf{F}$ *из категории* $\mathscr{M}$ *в категорию* $\mathscr{O}$, *обладающий следующими свойствами:*

(1) $\mathbf{F}(\mathfrak{M}) = \mathbf{F}(\mathfrak{N})$ *влечет* $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ *для всех объектов* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \in \mathscr{M}$;

(2) $\mathrm{D}(\mathfrak{M}) \equiv_T \mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$ *для всех объектов* $\mathfrak{M} \in \mathscr{M}$;

(3) *для всех* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathscr{M}$ $\mathbf{F}$ — *взаимно-однозначное соответствие между классами* $\mathrm{Mor}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ *и* $\mathrm{Mor}(F(\mathfrak{M}), F(\mathfrak{N}))$;

(4) *для всех морфизмов* $f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1)$ *выполнены условия* $f \leq_T \mathbf{F}(f)$ *и* $\mathbf{F}(f) \leq_T f \oplus \mathrm{D}(\mathfrak{M}_0) \oplus \mathrm{D}(\mathfrak{M}_1)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \left\langle M; P_0^{n_0}, P_1^{n_1}, \dots\right\rangle$ — объект категории $\mathscr{M}$. Идея конструкции состоит в том, что вначале мы берем множество $\{2x \mid x \in M\}$

и затем для каждого истинного утверждения $\mathfrak{M} \models P_i^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})$ добавляем в построение новые *нечетные* элементы b_1, b_2, b_3, … ; c_1, … ; d_1, d_{2i+1}, e, f, g и упорядочиваем их, как показано на рис. 1.

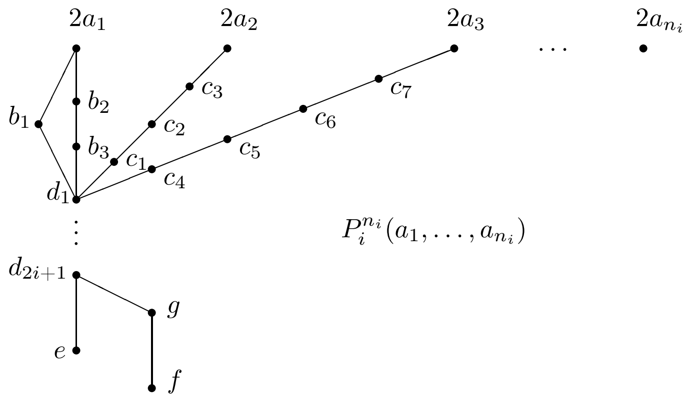

Рис. 1.

В дополнение для каждого истинного в $\mathfrak{M}$ утверждения $\neg P_i^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})$ мы добавляем в нашу модель новые различные нечетные элементы b_1, b_2, $b_3 \dots$; $c_1, \dots$; d_1, d_{2i+2}, e, f, g и упорядочиваем их почти так же, как и в предыдущем случае, с единственным исключением, что берем $2i+2$ элементов d с индексами вместо $2i+1$ в предыдущем случае.

Построим эту модель равномерно по диаграмме модели $\mathfrak{M}$. Более точно, перечисляем эту диаграмму в порядке возрастания, и каждый раз, когда в этом перечислении встретим номер, сообщающий, что верно $P_i^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})$ или $\neg P_i^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i})$, просто берем *последовательные* новые нечетные элементы $b_1 < b_2 < b_3 < c_1 < \dots < d_1 < d_2 < \dots < e < f < g$, где b_1 — первый нечетный элемент, еще не использованный в данный момент времени, и добавим их к построению, как описано выше.

Таким образом, модель $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$ полностью определена. Обозначим порядок на модели $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$ через $\lhd$.

Назовем *компанией* каждое множество элементов вида

$$\{b_1, b_2, b_3, c_1, \dots, d_1, d_2, \dots, e, f, g\},$$

добавленное на некотором шаге.

Определим теперь функтор $\mathbf{F}$ на морфизмах. Для каждого отображения $f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1)$ пусть $\mathbf{F}(f)$ будет единственным расширением отображения $f' = \{\langle 2x, 2y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in f\}$ до изоморфизма между $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$. Докажем существование такого расширения. Для его построения достаточно для каждого кортежа $2a_1, \dots, 2a_{n_i}$ отобразить нечетные элементы, образующие фигуру, подобную изображенной на рис. 1, и находящиеся под этим кортежем, в элементы, образующие изоморфную ей фигуру и находящиеся под кортежем $f'(2a_1), \dots, f'(2a_{n_i})$. Это возможно, поскольку f является изоморфизмом. Ясно, что $\mathbf{F}$ — функтор.

Докажем теперь свойства (1)–(4) для функтора $\mathbf{F}$.

(1) Покажем, как восстановить $\mathfrak{M}$ по $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$.

Сначала заметим, что основное множество модели $\mathfrak{M}$ полностью определено основным множеством объекта $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$, так как это множество совпадает с

$$\{x/2 \mid x \text{ — четный элемент носителя } \mathbf{F}(\mathfrak{M})\}.$$

Затем заметим, что функция $i \mapsto n_i$ полностью определена упорядочением $\lhd$. В самом деле, достаточно описать способ перечисления всех пар вида $\langle i, n_i\rangle$ относительно диаграммы объекта $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$. Мы перечисляем все конечные наборы последовательно расположенных нечетных чисел вида b_1, b_2, $b_3 \dots$; $c_1, \dots$; d_1, d_{2i+1}, e, f, g, упорядоченные, как показано на рис. 1, и по количествам элементов вида d_j и c_j определяем одновременно некоторые i и n_i. Этим способом все пары вида $\langle i, n_i\rangle$ будут перечислены.

Чтобы определить, удовлетворяет ли кортеж $a_1, \dots, a_{n_i}$ предикату $P_i^{n_i}$, надо просто рассмотреть элементы $2a_1, \dots, 2a_{n_i}$ и искать конечную структуру, образованную элементами, находящимися под $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{n_i}$, как на рис. 1, которая подтвердит (если число элементов типа d нечетно) или опровергнет это (в противном случае). Ниже мы покажем, что это можно осуществить эффективно.

(2) Сводимость $\mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M})) \leq_T \mathrm{D}(\mathfrak{M})$ достаточно очевидна, поскольку носитель $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$ равен $M \oplus A$, где A — начальный сегмент ω. Оставшаяся часть доказательства очевидна.

Докажем, что $\mathrm{D}(\mathfrak{M}) \leq_T \mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$. Сначала заметим, что имеет место сводимость $M \leq_T \mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$, поскольку $x \in M \Leftrightarrow c(2x, 0) \in \mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$.

Алгоритм, который по данному $i \in \omega$ вычисляет n_i относительно диаграммы $\mathbf{F}(\mathfrak{M})$, уже описан в доказательстве п. 1.

Следующий наш шаг состоит в том, чтобы научиться использовать оракул $\mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$ для ответов на вопросы «$c(m, 1) \in \mathrm{D}(\mathfrak{M})$?», что будет достаточно для доказательства п. 2.

Уже умея вычислять n_i, восстановим по m кортеж $a_1, \dots, a_n$ такой, что $m = c^3(i, 1, c^{n_i}(a_1, \dots, a_{n_i}))$. Если все элементы этого кортежа лежат в M, то продолжим выполнение процедуры; в противном случае выдадим отрицательный ответ. Ищем под элементами $2a_1$, $\dots$, $2a_{n_i}$ фигуру типа изображенной на рис. 1, образованную последовательно расположенными нечетными числами $b_1 < b_2 < b_3 < c_1 < \dots < d_1 < d_2 < \dots < e < f < g$. Если число элементов вида d_i нечетно, то ответ положительный, в противном случае — отрицательный.

(3) Это свойство легко следует из того, что $\mathbf{F}(f)$ — единственное расширение множества $\{\langle 2x, 2y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in f\}$, и из фактически установленного выше свойства, что каждый изоморфизм f между моделями $\mathbf{F}(\mathfrak{M}_0)$ и $\mathbf{F}(\mathfrak{M}_1)$ определяет изоморфизм

$$g = \{\langle x/2, y/2\rangle \mid f(x) = y \mathbin{\&} x, y \text{ четные}\}$$

между $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ со свойством $\mathbf{F}(g) = f$.

(4) Поскольку $f = \{\langle x, y\rangle \mid \langle 2x, 2y\rangle \in \mathbf{F}(f)\}$, имеем $f \leq_T \mathbf{F}(f)$. Докажем оставшуюся часть $\mathbf{F}(f) \leq_T f \oplus \mathrm{D}(\mathfrak{M}_0) \oplus \mathrm{D}(\mathfrak{M}_1)$. Надо показать, что по данному изоморфизму f из $\mathfrak{M}_0$ на $\mathfrak{M}_1$ и диаграммам $\mathrm{D}(\mathfrak{M}_0)$ и $\mathrm{D}(\mathfrak{M}_1)$ можно эффективно вычислить $\mathbf{F}(f)$. Легко видно, как делать это относительно f на четных числах. На нечетных числах делаем следующее. Используем оракул для $\mathrm{D}(\mathfrak{M}_0)(\equiv_T \mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}_0)))$ для перечисления всех элементов вида d_1 и элементов из компании, в которую входит d_1. Для каждого такого d_1 используем тот

же самый оракул для вычисления соответствующих элементов $2a_1, \dots, 2a_{n_i}$, находящихся выше их. Затем используем оракул f для вычисления их образов $2f(a_1), \dots, 2f(a_{n_i})$ и оракул $\mathrm{D}(\mathfrak{M}_1)(\equiv_T \mathrm{D}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}_1)))$ для нахождения элементов единственной компании под $2f(a_1), \dots, 2f(a_{n_i})$, которая изоморфна фигуре, содержащей d_1. Расширим изоморфизм, определенный к этому моменту, добавив к нему изоморфизм между этими компаниями. $\square$

Для объекта $\mathfrak{R} = \langle R, (B_i)_{i \in R} \rangle \in \mathscr{T}$ определим *диаграмму* $\mathrm{D}(\mathfrak{R})$ как диаграмму модели $\langle R, \overline{B} \rangle$, где $\overline{B}(x, i) \overset{df}{\Longleftrightarrow} x \in B_i$.

Второй функтор $\mathbf{G}$ определяется в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2.2. *Существует функтор* $\mathbf{G}$ *из категории* $\mathscr{O}$ *в категорию* $\mathscr{T}$, *обладающий следующими свойствами:*

(1) $\mathbf{G}(\mathfrak{M}) = \mathbf{G}(\mathfrak{N})$ *влечет* $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ *для всех объектов* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathscr{O}$;

(2) $\mathrm{D}(\mathfrak{M}) \equiv_T \mathrm{D}(\mathbf{G}(\mathfrak{M}))$ *для всех объектов* $\mathfrak{M} \in \mathscr{O}$;

(3) *для всех* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathscr{O}$ $\mathbf{G}$ — *взаимно-однозначное соответствие между классами* $\mathrm{Mor}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ *и* $\mathrm{Mor}(\mathbf{G}(\mathfrak{M}), \mathbf{G}(\mathfrak{N}))$;

(4) *для всех морфизмов* $f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1)$ *из* $\mathscr{O}$ *выполнено* $f \equiv_T \mathbf{G}(f)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R} = \langle R, \lhd \rangle$ — объект из $\mathscr{O}$. Пусть также $\mathbf{G}(\mathfrak{R}) = \langle R, (\check{x})_{x \in R} \rangle$, где $\check{x} = \{ y \in R \mid x \unlhd y \}$. Очевидно, что $\mathbf{G}(\mathfrak{R}) \in \mathscr{T}$. Если $f \in \mathrm{Mor}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \in \mathscr{O}$, то положим $\mathbf{G}(f) = f$. Рутинная проверка показывает, что $\mathbf{G}(\mathfrak{R})$ — функтор.

Теперь докажем утверждение теоремы.

(1) В случае частично упорядоченных множеств объект $\mathfrak{R} = \langle R, \lhd \rangle$ может быть однозначно восстановлен по $\mathbf{G}(\mathfrak{R}) = \langle R, B \rangle$ с использованием следующего свойства:

$$\forall x, y \in R \, (x \unlhd y \Leftrightarrow \forall i \in R (x \in B_i \Rightarrow y \in B_i)).$$

(2) Тривиально.

(3) Заметим, что каждый гомеоморфизм $f : \langle R, \tau_B \rangle \to \langle R', \tau'_B \rangle$ отображает открытые множества в открытые. По этому свойству и по эквивалентности

$$\forall x, y \in R \, (x \unlhd y \Leftrightarrow \forall Q \in \tau_B (x \in Q \Rightarrow y \in Q))$$

каждый такой гомеоморфизм изоморфно отображает исходное упорядочение $\unlhd$ на R на упорядочение на R' и, таким образом, этот гомеоморфизм, рассматриваемый как множество, является морфизмом категории $\mathscr{O}$.

(4) Тривиально. $\square$

3. Перенос результатов с вычислимых моделей на топологические пространства

В этом разделе мы используем свойства функтора $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ для переноса результатов об автоморфизмах и изоморфизмах вычислимых моделей на эффективные топологические пространства.

Замечание 2. Заметим, что если $\mathfrak{M}$ — вычислимая модель с основным множеством ω, то $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$ — эффективное топологическое пространство. В самом деле, по каждому $i \in \omega$ можно эффективно определить индекс конечного множества B_i в $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$, откуда следует свойство (3) из определения 1 эффективных топологических пространств.

Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень и $\mathfrak{M}$ — модель, у которой носитель — начальный сегмент ω и $\mathfrak{S}$ — топологическое пространство со счетной базой $(U_i)_{i<\omega}$, носителем которого является начальный сегмент ω. Обозначим группу всех $\mathbf{d}$-вычислимых автоморфизмов $\mathfrak{M}$ (группу всех $\mathbf{d}$-вычислимых автогомеоморфизмов $\mathfrak{S}$) через $\mathrm{Aut}^{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ (соответственно через $\mathrm{AHom}^{\mathbf{d}}(\mathfrak{S})$).

Следствие 3.1. *Для каждой вычислимой модели $\mathfrak{M}$ существуют эффективное топологическое пространство S и изоморфизм $\psi : \mathrm{Aut}\,\mathfrak{M} \to \mathrm{AHom}\,S$ такие, что для каждой тьюринговой степени $\mathbf{d}$ справедливо равенство*

$$\psi(\mathrm{Aut}^{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})) = \mathrm{AHom}^{\mathbf{d}}(S).$$

Доказательство. Пусть $S = \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$. Изоморфизм $\psi : \mathrm{Aut}\,\mathfrak{M} \to \mathrm{AHom}\,S$ можно выбрать как $\psi(f) = \mathbf{G}(\mathbf{F}(f))$. Требуемые свойства следуют из замечания 2 и теорем 2.1 и 2.2. $\square$

Следствие 3.2. (1) *Существует эффективное топологическое пространство, имеющее 2^ω автогомеоморфизмов, но не имеющее нетривиальных гиперарифметических автогомеоморфизмов. Более того, каждое гиперарифметическое представление этого пространства не обладает нетривиальными гиперарифметическими автогомеоморфизмами.*

(2) *Существуют эффективное топологическое пространство $\mathfrak{X}$ и два его элемента a и b, которые гомеоморфны, но каждый автогомеоморфизм, переводящий a в b, не является гиперарифметическим. Более того, таким же свойством обладает каждое гиперарифметическое пространство, гомеоморфное $\mathfrak{X}$ вместе с образами элементов a и b относительно этого гомеоморфизма.*

Доказательство. В [9] доказано, что существует вычислимая модель $\mathfrak{M}$ такая, что

(1) $|\,\mathrm{Aut}\,\mathfrak{M}| = 2^\omega$;

(2) Каждая гиперарифметическая модель $\mathfrak{M}'$, изоморфная $\mathfrak{M}$, не имеет нетривиальных гиперарифметических автоморфизмов.

Топологическое пространство $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$ годится для доказательства пп. 1 и 2.

В части, где речь не идет о различных гиперарифметических представлениях пространства, это непосредственно следует из теорем 2.1, 2.2 и замечания 2.

Докажем оставшуюся часть. Рассмотрим некоторое гиперарифметическое представление $\mathfrak{X}'$ этого пространства (возможно, с совсем другой базой топологии). Как и в доказательстве теоремы 2.2, по этой базе можно однозначно восстановить исходный гиперарифметический порядок $\lhd$, а по нему и некоторое гиперарифметическое представление исходной модели. Из свойств функторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ следует, что топологическое пространство $\mathfrak{X}'$ гомеоморфно гиперарифметическому топологическому пространству $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$, не имеющему нетривиальных гиперарифметических автогомеоморфизмов, причем в качестве гомеоморфизма между этими пространствами может быть выбрано тождественное отображение. Отсюда следует, что у $\mathfrak{X}'$ нет нетривиальных гиперарифметических автогомеоморфизмов. $\square$

Следствие 3.3. *Для каждой гиперарифметической группы G существует эффективное топологическое пространство, у которого группа всех автогомеоморфизмов изоморфна G.*

Доказательство. В [10] доказано, что для каждой гиперарифметической группы существует вычислимая модель $\mathfrak{M}$, у которой группа всех автоморфизмов изоморфна этой группе. По теоремам 2.1, 2.2 и замечанию 2 топологическое пространство $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$ годится для доказательства нашего утверждения. $\square$

Следствие 3.4. *Существуют два гомеоморфные эффективные топологические пространства, для которых не существует гиперарифметических гомеоморфизмов из одного на другое.*

Доказательство. Рассмотрим две изоморфные не гиперарифметически изоморфные вычислимые модели $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ из работы [9]. По замечанию 2 и теоремам 2.1, 2.2 эффективные топологические пространства $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}_0))$ и $\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}_1))$ удовлетворяют следствию. $\square$

Семейство $(\mathfrak{X}_i)_{i<\omega}$ эффективных топологических пространств назовем *вычислимым,* если существует эффективная процедура, которая по данному $i<\omega$ выдает алгоритмы, участвующие в определении эффективных топологических пространств, т. е. алгоритм для перечисления основного множества, алгоритм для распознавания отношения $x \in B_j$ и алгоритм для распознавания истинности утверждений вида $B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k} \subseteq B_{j_1} \cup \dots \cup B_{j_s}$ для данных $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_s$.

Следствие 3.5.

(1) *Существует вычислимое семейство $(S_i)_{i<\omega}$ эффективных топологических пространств такое, что множество $\{c(i,j) \mid S_i \cong S_j\}$ является Σ^1_1-полным.*

(2) *Существует вычислимое семейство $(S_i)_{i<\omega}$ эффективных топологических пространств такое, что множество $\{i \mid S_i \cong S_0\}$ является Σ^1_1-полным.*

Доказательство. Заметим, что если $(\mathfrak{M}_i)_{i<\omega}$ — вычислимое семейство моделей, то семейство $(\mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}_i)))_{i<\omega}$ — вычислимое семейство эффективных топологических пространств.

Чтобы доказать п. 1, достаточно взять вычислимое семейство $(\mathfrak{M}_i)_{i<\omega}$ моделей из [9], для которого множество $\{c(i,j) \mid S_i \cong S_j\}$ Σ^1_1-полно, и применить замечание 2 вместе с теоремами 2.1 и 2.2.

П. 2 получается точно так же из существования вычислимого семейства $(\mathfrak{M}_i)_{i<\omega}$ моделей, для которого множество $\{i \mid S_i \cong S_0\}$ Σ^1_1-полно (см. [9]). $\square$

Следствие 3.6. *Существует эффективное топологическое пространство S такое, что для любой вычислимой модели $\mathfrak{M}$ найдется его эффективное представление S' такое, что* $\mathrm{AHom}\, S' \cong \mathrm{Aut}_c(\mathfrak{M})$.

Доказательство. В [11] построена вычислимая модель $\mathfrak{M}$ такая, что для любой вычислимой модели $\mathfrak{N}$ существует вычислимая изоморфная копия $\mathfrak{M}'$, для которой $\mathrm{Aut}_c \mathfrak{M} \cong \mathrm{Aut}_c \mathfrak{M}'$. Теперь мы можем положить $S = \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{M}))$ и применить замечание 2 вместе с теоремами 2.1 и 2.2. $\square$

Теорема 3.7. *Для каждого $n \geq 1$, $n \leq \omega$, существует эффективное топологическое пространство $\mathfrak{S}$, для которого существуют эффективные топологические пространства $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$ такие, что*

(1) *для каждого эффективного топологического пространства $\mathfrak{W}$ если $\mathfrak{W}$ гомеоморфно $\mathfrak{S}$, то оно вычислимо изоморфно одному из пространств $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$;*

(2) *пространства $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$ попарно вычислимо не гомеоморфны.*

Доказательство. В [12] С. С. Гончаровым доказано, что для любого $n \geq 1$, $n \leq \omega$, существует вычислимая модель с n вычислимыми вычислимо неизоморфными представлениями. Остается применить теоремы 2.1 и 2.2. $\square$

4. Эффективные топологические пространства со счетными группами автогомеоморфизмов

Теорема 4.1. *Пусть группа автогомеоморфизмов гиперарифметического топологического пространства имеет мощность менее 2^ω. Тогда эта группа изоморфна некоторой гиперарифметической группе.*

Доказательство использует допустимые множества [1]. Пусть $\langle S, U\rangle$ — гиперарифметическое топологическое пространство, удовлетворяющее посылке теоремы. Сначала запишем формулу $\varphi(F)$ в языке арифметики, расширенном предикатными символами для U и F, которые говорят, что F — автогомеоморфизм $\langle S, U\rangle$. Эта формула будет конъюнкцией следующих трех формул:

• формула, утверждающая, что F — перестановка;

• формула, утверждающая, что F переводит открытые множества в открытые:

$$\forall x\, \forall i\, (x \in U_i \to \exists\, j\, (F(x) \in U_j \subseteq F(U_i)));$$

• формула, утверждающая, что F^{-1} переводит открытые множества в открытые (записывается аналогично).

Поскольку отношение $x \in U_i$ гиперарифметическое, т. е. имеет род Δ^1_1, эта формула эквивалентна некоторой Σ^1_1-формуле $\varphi'(F)$ такой, что ей удовлетворяют менее чем 2^ω функций F. По теореме о совершенном множестве [1, теорема 4.4, с. 128] все такие F гиперарифметические.

Теперь покажем, что множество всех таких F является элементом допустимого множества $\mathbb{HYP}_{\langle\omega;+,\cdot,0\rangle}$. По Δ_0-выделению для этого достаточно показать, что существует элемент $b \in \mathbb{HYP}_{\langle\omega;+,\cdot,0\rangle}$, содержащий все такие F. Если такого b не существует, построим Σ-семейство Ω предложений из допустимого фрагмента $L_{\mathbb{HYP}_{\langle\omega;+,\cdot,0\rangle}}$, которые говорят, что F — не гиперарифметическая перестановка, удовлетворяющая $\varphi(F)$. Это семейство Ω состоит из следующих предложений в сигнатуре $\sigma = \langle +, \cdot, s, 0\rangle$, где s обозначает функцию взятия следующего натурального числа:

• $\forall x \bigvee\limits_{n\in\omega} (x = s^n(0))$;

• все бескванторные предложения сигнатуры σ, истинные в гиперарифметической модели $\langle\omega; +, \cdot, U, 0\rangle$;

• формула, утверждающая, что F — автогомеоморфизм $\langle S, U\rangle$; такая формула может быть получена из $\varphi(F)$, описанной выше, заменой формул вида $x \in U_i$ на $\bigvee\limits_{m\in U_n} (x = s^m(0)\ \&\ i = s^n(0))$;

• семейство, утверждающее, что F — не гиперарифметическая перестановка на ω, а именно семейство, состоящее из предложений

$$\bigvee_{n\in\omega} (F(s^n(0)) \neq s^{g(n)}(0))$$

для всех гиперарифметических перестановок g на натуральных числах.

Каждая $\mathbb{HYP}_{\langle\omega;+,\cdot,0\rangle}$-конечная часть семейства Ω имеет модель. По теореме компактности Барвайса [1] это семейство имеет модель. Эта модель изоморфна модели $\langle\omega; +, \cdot, U, 0\rangle$ с добавленным предикатом F, являющимся негиперарифметическим автоморфизмом $\langle S, U\rangle$, что противоречит сказанному ранее.

Итак, семейство автогомеоморфизмов $\langle S, U\rangle$ есть элемент из $\mathbb{HYP}_\omega$. Поэтому группа всех автогомеоморфизмов пространства $\langle S, U\rangle$ является элементом

$\mathbb{HYP}_\omega$. Поскольку существует Σ-вложение множества $\mathbb{HYP}_\omega$ в ω (см. [1, следствие 5.5, с. 171]), эта группа изоморфна подходящей гиперарифметической группе. $\square$

Следствие 4.2. *Пусть группа всех автогомеоморфизмов гиперарифметического топологического пространства имеет мощность менее чем 2^ω. Тогда эта группа изоморфна группе всех автоморфизмов подходящей вычислимой модели.*

Доказательство. По теореме 4.1 эта группа изоморфна гиперарифметической группе. В [10] доказано, что каждая гиперарифметическая группа изоморфна группе всех автоморфизмов подходящей вычислимой модели. $\square$

5. О числе эффективных представлений пространств

В предыдущих разделах мы рассматривали топологические пространства со слабыми свойствами отделимости. Здесь рассмотрим T_0-пространства с эффективными базами из открыто-замкнутых множеств и опишем зависимость числа эффективных гомеоморфных представлений от числа изолированных точек. Следует заметить, что любое T_0-пространство с базой, состоящей из открыто-замкнутых множеств, является T_2-пространством.

Будем говорить, что эффективные топологические пространства $\mathfrak{X}_0 = \langle X_0, (U_i)_{i<\omega}\rangle$ и $\mathfrak{X} = \langle X_1, (V_i)_{i<\omega}\rangle$ *сильно вычислимо гомеоморфны*, если существуют вычислимое отображение φ из X_0 на X_1, являющееся гомеоморфизмом из $\mathfrak{X}_0$ на $\mathfrak{X}_1$ и вычислимые функции h_0 и h_1 такие, что для каждого $i \in \omega$ выполнены следующие два равенства:

$$\varphi(U_i) = \bigcup_{j\in W_{h_0(i)}} V_j, \quad \varphi^{-1}(V_i) = \bigcup_{j\in W_{h_1(i)}} U_j.$$

Если $\mathfrak{X}_0$ и $\mathfrak{X}_1$ сильно вычислимо гомеоморфны, то будем обозначать этот факт как $\mathfrak{X}_0 \cong_s \mathfrak{X}_1$. Легко убедиться, что отношение сильного вычислимого гомеоморфизма является отношением эквивалентности на эффективных топологических пространствах.

Нам понадобится ряд технических утверждений. Сначала докажем

Предложение 5.1. *Пусть $\mathfrak{X} = \langle X, (U_i)_{i\in\omega}\rangle$ — счетное топологическое T_0-пространство со счетной базой из открыто-замкнутых подмножеств и бесконечным множеством изолированных точек.*

Пусть семейство $(F_a)_{a\in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})}$ конечных множеств обладает следующим свойством:

$$\forall a, b \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})\, (a \neq b \to F_a \cap F_b = \varnothing)\ \&\ \forall a \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})(F_a \cap X) = \varnothing.$$

Пусть топологическое пространство $\mathfrak{X}^*$ получается из $\mathfrak{X}$ следующим образом: его основное множество равно

$$X^* = X \cup \bigcup_{a\in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})} F_a,$$

а база $\mathfrak{X}^*$ образована множествами вида

$$U \cup \bigcup_{a\in \mathrm{Is}(X)\cap U} F_a,$$

$U \Subset \mathfrak{X}$, и множествами $\{x\}$ такими, что $x \in \{a\} \cup F_a$, $a \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$.

Тогда $\mathfrak{X} \cong \mathfrak{X}^*$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $h : X^* \to X$, определенное следующим образом:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in X, \\ a, & \text{если } x \in F_a. \end{cases}$$

В ходе доказательства нам потребуется ряд свойств $\mathfrak{X}^*$ и h.

Лемма 5.2. (1) *Отображение h непрерывно; для каждого $x \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$ его прообраз $h^{-1}(x)$ — конечное множество, состоящее из изолированных точек; для каждого $x \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X}^*)$ справедливо $h(x) \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$;*

(2) $\mathrm{Lim}(\mathfrak{X}) = \mathrm{Lim}(\mathfrak{X}^*)$*;*

(3) *для каждого $B \Subset \mathfrak{X}^*$ выполнено $h(B) \Subset \mathfrak{X}$;*

(4) *для каждого $A \subseteq X$*

$$|\,\mathrm{Is}(\mathfrak{X}) \cap A| = \omega \text{ тогда и только тогда, когда } |\,\mathrm{Is}(\mathfrak{X}^*) \cap h^{-1}(A)| = \omega;$$

(5) *для каждого $B \subseteq X^*$*

$$|\,\mathrm{Is}(\mathfrak{X}^*) \cap B| = \omega \text{ тогда и только тогда, когда } |\,\mathrm{Is}(\mathfrak{X}) \cap h(B)| = \omega;$$

(6) *если S — конечное множество изолированных точек из $\mathfrak{X}$, то $h^{-1}(S)$ — конечное множество изолированных точек из $\mathfrak{X}^*$;*

(7) *если S — конечное множество изолированных точек из $\mathfrak{X}^*$, то $h(S)$ — конечное множество изолированных точек из $\mathfrak{X}$.*

Доказательство леммы. П. (1) непосредственно следует из определения топологии на $\mathfrak{X}^*$.

Докажем (2). Сначала докажем включение $\mathrm{Lim}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{Lim}(\mathfrak{X}^*)$. Пусть $a \in \mathrm{Lim}(\mathfrak{X})$, но $a \notin \mathrm{Lim}(\mathfrak{X}^*)$. Тогда точка a изолирована в $\mathfrak{X}^*$, т. е. $\{a\} \Subset \mathfrak{X}^*$. Из определения $\mathfrak{X}^*$ следует, что единственно возможный случай — это $a \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$, что противоречит $a \in \mathrm{Lim}(\mathfrak{X})$.

Докажем другое включение $\mathrm{Lim}(\mathfrak{X}^*) \subseteq \mathrm{Lim}(\mathfrak{X})$. Пусть $a \in \mathrm{Lim}(\mathfrak{X}^*)$, но $a \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$. Тогда по определению h и по п. 1 $h^{-1}(a)$ — конечное открытое множество, содержащее a. Следовательно, $\{a\} \Subset \mathfrak{X}^*$, что противоречит $a \in \mathrm{Lim}(\mathfrak{X}^*)$.

Докажем (3). Согласно определению открытые подмножества $\mathfrak{X}^*$ являются объединениями семейств множеств вида $U \cup \bigcup\limits_{a \in \mathrm{Is}(X) \cap U} F_a$, $U \Subset X$, и некоторого множества изолированных точек из $\mathfrak{X}$. По п. 1 настоящей леммы образ этого множества относительно h есть объединение соответствующих открытых подмножеств в U и некоторого семейства изолированных точек X, тоже открытого.

Пп. (4)–(7) легко следуют из определения отображения h и из (1). $\square$

Открыто-замкнутые множества $A \subseteq X$ и $B \subseteq X^*$ будем называть *эквивалентными,* если выполнены следующие два условия:

(1) $|\,\mathrm{Is}(\mathfrak{X}) \cap A| = |\,\mathrm{Is}(\mathfrak{X}^*) \cap B|$;

(2) $h(B) \triangle A$ — конечное подмножество $\mathrm{Is}(\mathfrak{X})$, т. е. $h(B)$ отличается от A только на конечном множестве изолированных точек.

Лемма 5.3. *Пусть $A \subseteq X$ и $B \subseteq X^*$ эквивалентны. Тогда*

(1) *для каждого открыто-замкнутого в $\mathfrak{X}$ множества $U \subseteq A$ существует открыто-замкнутое в $\mathfrak{X}^*$ множество $U^* \subseteq B$ такое, что $A \cap U$ и $B \cap U^*$ эквивалентны и $A \setminus U$ и $B \setminus U^*$ тоже эквивалентны.*

(2) *для каждого открыто-замкнутого в* $\mathfrak{X}$ *множества* $U^* \subseteq B$ *существует открыто-замкнутое в* $\mathfrak{X}$ *множество* $U \subseteq A$ *такое, что* $A \cap U$ *и* $B \cap U^*$ *эквивалентны и* $A \setminus U$ *и* $B \setminus U^*$ *тоже эквивалентны.*

Доказательство леммы. Докажем (1). Пусть U — конечное открыто-замкнутое подмножество в A. Поскольку наша топология обладает свойством T_2, оно состоит из изолированных точек из X^*. Выберем $U^* \subseteq \mathrm{Is}(X^*)$ как множество, состоящее из $|U|$ изолированных точек из B. Очевидно, что это множество открыто-замкнуто. Такой выбор возможен, ибо A и B эквивалентны и, следовательно, содержат одинаковое число изолированных точек. По тем же причинам количества изолированных точек в $A \setminus U$ и $B \setminus U^*$ совпадают. Далее, U и $h(U^*)$ отличаются на конечном множестве изолированных точек, поскольку сами являются конечными. Множества $A \setminus U$ и $h(B \setminus U^*)$ отличаются на конечное множество изолированных точек, так как

$$A \setminus U \approx A \approx h(B) \approx h(B \setminus U^*).$$

Таким образом, множество U^* подходящее.

Случай, когда $A \setminus U$ конечно, рассматривается аналогично.

Пусть теперь U и $A \setminus U$ бесконечны. Обозначим

$$U_0 = h(B) \cap U, \quad U_1 = h(B) \setminus U.$$

По п. (3) леммы 5.2 эти множества открыты. Рассмотрим следующие открытые подмножества X^*:

$$U_0^* = h^{-1}(U_0) \cup h^{-1}(h(B) \setminus A), \quad U_1^* = h^{-1}(U_1).$$

Если множества изолированных точек в U и $A \setminus U$ бесконечны, то по п. (4) леммы 5.2 множества изолированных точек из $h^{-1}(U_0)$ и $h^{-1}(U_1)$ тоже бесконечны; в таком случае мы можем взять $U^* = U_0^*$. Если одно из этих множеств, скажем множество изолированных точек из U, конечно, то множество изолированных точек из $h^{-1}(U_0)$ также конечно вместе с множеством изолированных точек из U_0^* и оно отличается от него на конечное подмножество множества $h^{-1}(h(B) \setminus A)$. Ввиду того, что количество изолированных точек в A и в B одно и то же, можно добавить или убрать конечное множество изолированных точек из U_0^* так, чтобы его мощность была равна числу изолированных точек из U, получив в результате требуемое множество U^*. Непосредственная проверка показывает, что так построенное множество U^* удовлетворяет лемме.

Докажем (2). Фактически доказательство использует те же идеи, что и для п. (1). Мы дадим его набросок. Пусть

$$U_0^* = U^*, \quad U_1^* = B \setminus U^*, \quad U_i = h(U_i^*) \cap A, \quad i = 0, 1.$$

По п. (3) леммы 5.2 множества U_i, $i = 0, 1$ открыты. По пп. 4, 5 леммы 5.2 множества изолированных точек из U_i бесконечны тогда и только тогда, когда множество изолированных точек из в U_i^* бесконечно. Поскольку мощность множеств изолированных точек в A и B совпадают, можно добавить или убрать из U_0 конечное множество изолированных точек так, чтобы количества изолированных точек в U_0 и в U_1^* а также в $A \setminus U_0$ и U_1^* попарно совпали, получив тем самым новое открыто-замкнутое множество U_0'. Положим $U = U_0'$. Проверка оставшейся части условия эквивалентности очевидна. $\square$

Теперь можно построить гомеоморфизм g из X на X^* следующим образом. Пусть $(U_i)_{i<\omega}$ — счетная база из открыто-замкнутых множеств для пространства X, и пусть $(U_i^*)_{i<\omega}$ — счетная база из открыто-замкнутых множеств для пространства X^*.

Определим семейства $(A_\varepsilon)_{\varepsilon\in 2^{<\omega}}$ и $(B_\varepsilon)_{\varepsilon\in 2^{<\omega}}$, состоящие из открыто-замкнутых множеств, по шагам следующим образом.

Шаг 0. $A_\varnothing = X$, $B_\varnothing = X^*$. Заметим, что $A_\varnothing$ и $B_\varnothing$ эквивалентны, поскольку оба содержат бесконечно много изолированных точек, и $h(A_\varnothing) = B_\varnothing$.

Шаг $n > 0$. Предположим, что A_ε и B_ε уже определены для всех ε таких, что $|\varepsilon| < n$, и каждое A_ε эквивалентно B_ε для всех ε таких, что $\mathrm{length}(\varepsilon) < n$.

Чтобы определить $A_{\varepsilon 0}$, $A_{\varepsilon 1}$, $B_{\varepsilon 0}$, $B_{\varepsilon 1}$, где $\mathrm{length}(\varepsilon) = n$, рассмотрим два случая.

Случай 1. $n = 2t+1$. Положим $A_{\varepsilon 0} = A_\varepsilon \cap U_t$, $A_{\varepsilon 1} = A_\varepsilon \setminus U_t$ для всех $\varepsilon \in 2^n$. По лемме 5.3 находим открыто-замкнутое множество $S \subseteq B_\varepsilon$ в $\mathfrak{X}^*$ такое, что $A_{\varepsilon 0}$ эквивалентно S и $A_{\varepsilon 1}$ эквивалентно $B_\varepsilon \setminus S$. Положим $B_{\varepsilon 0} = S$ и $B_{\varepsilon 1} = B_\varepsilon \setminus S$.

Случай 2. $n = 2t+2$. Положим $B_{\varepsilon 0} = B_\varepsilon \cap U_t^*$, $B_{\varepsilon 1} = B_\varepsilon \setminus U_t^*$ для всех $\varepsilon \in 2^n$. По лемме 5.3 находим открыто-замкнутое множество $S \subseteq A_\varepsilon$ в $\mathfrak{X}$ такое, что $B_{\varepsilon 0}$ эквивалентно S и $B_{\varepsilon 1}$ эквивалентно $A_\varepsilon \setminus S$. Положим $A_{\varepsilon 0} = S$ и $A_{\varepsilon 1} = A_\varepsilon \setminus S$.

Заметим, что для каждого $x \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$ найдется U_i такое, что $U_i = \{x\}$, и для каждого $x \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X}^*)$ найдется U_i^* такое, что $U_i^* = \{x\}$. Следовательно, для каждого $x \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X})$ существует A_ε такое, что $A_\varepsilon = \{x\}$, и для каждой точки $x \in \mathrm{Is}(\mathfrak{X}^*)$ существует B_ε такое, что $B_\varepsilon = \{x\}$. Более того, для каждого $x \in \mathrm{Lim}(\mathfrak{X})$

$$x \in A_\varepsilon \text{ тогда и только тогда, когда } x \in B_\varepsilon \text{ для всех } \varepsilon \in 2^{<\omega}.$$

Заметим, что каждое A_ε, $\varepsilon \in 2^{<\omega}$, содержит только один элемент тогда и только тогда, когда B_ε содержит только один элемент.

Определим отображение g из X на X^* следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \notin \mathrm{Is}(X); \\ \text{единственное } y \in B_\varepsilon, \text{ если } A_\varepsilon = \{x\}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что это отображение взаимно-однозначно. Докажем, что g и g^{-1} непрерывны. Это следует из следующих свойств:

(1) для всех $x \in X$ и всех $A \Subset \mathfrak{X}$ таких, что $x \in A$, существует элемент $\varepsilon \in 2^{<\omega}$ такой, что $x \in A_\varepsilon \subseteq A$;

(2) для всех $x \in X^*$ и всех $A \Subset X^*$ таких, что $x \in A$, существует $\varepsilon \in 2^{<\omega}$ такой, что $x \in B_\varepsilon^* \subseteq A$;

(3) $g(A_\varepsilon) = B_\varepsilon^*$.

Таким образом, g является гомеоморфизмом. Предложение доказано.

Теперь опишем *представление в виде дерева* эффективных топологических T_0-пространств с эффективными базами из открыто-замкнутых множеств. Пусть $\mathfrak{X}$ — такое пространство с основным множеством X, и пусть $(U_i)_{i<\omega}$ — его вычислимая база из открыто-замкнутых множеств.

Мы будем использовать следующую запись: $U^0 = U$, $U^1 = X \setminus U$.

По пространству $\mathfrak{X}$ построим по шагам бинарное дерево $T(\mathfrak{X}) \subseteq 2^{<\omega}$ и семейство открыто-замкнутых множеств V_ε, $\varepsilon \in T(\mathfrak{X})$, как описано ниже.

Шаг 0. Положим $T_0 = \{\Lambda\}$, $V_\Lambda = X$, a_Λ — наименьший элемент X.

Шаг $n+1$. Предположим, что T_n — конечное дерево, построенное к данному моменту. Для каждой концевой вершины ε этого дерева проделываем следующее: если $A_0 = V_\varepsilon \cap U_n^0 \neq \varnothing$ и $A_1 = V_\varepsilon \cap U_n^1 \neq \varnothing$, то добавим к дереву элементы $\varepsilon 0$ и $\varepsilon 1$, единственное из множеств A_0, A_1, которое содержит a_ε, объявим $V_{\varepsilon 0}$, а оставшееся из этих множеств объявим $V_{\varepsilon 1}$. Положим $a_{\varepsilon 0} = a_\varepsilon$, а элемент $a_{\varepsilon 1}$ определим как минимальный элемент из $V_{\varepsilon 1}$. Переходим к следующему шагу.

Положим $T(\mathfrak{X}) = \bigcup\limits_{n\in\omega} T_n$.

Заметим, что дерево $T(\mathfrak{X})$ перечисляется равномерно по индексам алгоритмов, задающих пространство $\mathfrak{X}$.

Заметим, что элементы a_ε, $\varepsilon \in T(\mathfrak{X})$, находятся в естественном взаимнооднозначном соответствии с элементами дерева $T(\mathfrak{X})$, не оканчивающимися на 0. Кроме того, $X = \{a_\varepsilon \mid \varepsilon \in T(\mathfrak{X})\}$.

Опишем теперь и обратную конструкцию, выдающую по бинарному дереву T эффективное топологическое пространство с эффективной базой из открыто-замкнутых множеств. Пусть задано некоторое перечисление бинарного дерева T. По этому перечислению следующим естественным образом строится эффективное топологическое пространство. Точками его являются элементы дерева, не оканчивающиеся на 0. Множество всех этих точек обозначим через $X(T)$. В ходе построения дерева возникает естественное эффективное перечисление элементов дерева T: $T = \{\alpha_i \mid i \in \omega\}$ такое, что по данному i эффективно выписывается α_i. Теперь определим базовые окрестности как $U_i = \{\varepsilon \in X(T) \mid \exists m\, (\alpha_i \sqsubseteq \varepsilon 0^m)\}$. Тем самым полностью определено эффективное топологическое пространство, которое мы обозначим через $\mathfrak{X}(T)$. Нетрудно убедиться, что если T — перечислимое дерево, рассматриваемое со своим перечислением, построенное, как выше, по топологическому пространству $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X}(T) \cong_s \mathfrak{X}$.

Замечание 3. Если мы возьмем дерево T и последовательно подвесим к некоторым (не обязательно концевым) вершинам из T поддеревья вида  (это эквивалентно последовательному добавлению к дереву для некоторых вершин α элементов $\alpha 0$ и $\alpha 1$) так, что под каждой концевой вершиной окажется лишь конечное число новых элементов, то по предложению 5.1 так полученное дерево T^* будет определять топологическое пространство, гомеоморфное $\mathfrak{X}(T)$, $\mathfrak{X}(T) \cong \mathfrak{X}(T^*)$.

В дальнейшем мы применим это древесное представление и сделанное замечание для получения дерева, для которого соответствующее топологическое пространство будет гомеоморфно, но не сильно изоморфно исходному пространству $\mathfrak{X}$.

Будем говорить, что класс K эффективных топологических пространств является *сильно эффективно бесконечным,* если существует эффективный метод, который по любому алгоритму, задающему вычислимое семейство $(\mathfrak{X}_i)_{i<\omega}$ элементов из K, выдает индексы для некоторого пространства $\mathfrak{X} \in K$ такого, что $\mathfrak{X} \not\cong_s \mathfrak{X}_i$, для каждого $i < \omega$.

Теорема 5.4. *Класс всех эффективных топологических пространств с эффективными базами из открыто-замкнутых множеств и бесконечным числом изолированных точек является эффективно бесконечным.*

Доказательство. Поскольку дерево для таких пространств строится равномерно по индексу пространства, будем считать, что у нас имеется вычислимая последовательность бинарных деревьев $(T_i)_{i\in\omega}$, $T_i \subseteq 2^{<\omega}$, такая, что для всех $i \in \omega$ выполнено $\mathfrak{X}_i \cong_s \mathfrak{X}(T_i)$.

Зафиксируем одновременное перечисление деревьев T_i:

$$T_i^0 \subseteq T_i^1 \subseteq \cdots \subseteq T_i^k \subseteq \cdots \subseteq \bigcup_{i\in\omega} T_i^t = T_i$$

такое, что по данным i и k эффективно вычисляется индекс конечного множества T_i^k.

Для доказательства теоремы достаточно по шагам построить новое дерево T_* так, чтобы $\mathfrak{X}(T_*) \cong \mathfrak{X}(T_0)$ и чтобы одновременно удовлетворялись следующие требования.

$\mathbf{R}_{i,n}$ $(i, n \in \omega)$: функция $\varkappa_n$ не может играть роль функции h_0 в определении сильного гомеоморфизма из пространства $\mathfrak{X}(T_i)$ на $\mathfrak{X}(T_*)$.

В конце каждого шага t мы будем иметь некоторое семейство элементов, перечисленных к этому моменту, образующих конечное дерево $T_*^t \supseteq T_0^t$. Назовем *t-рангом* элемента $\varepsilon \in T_*^t$ максимальное натуральное m такое, что $\varepsilon \restriction m \in T_0^t$. Очевидно, что функция t-ранга нестрого возрастает по t.

Определим $\varepsilon \in 2^{<\omega}$ множества $V_\varepsilon = \{\gamma \mid \exists m\, (\varepsilon \sqsubseteq \gamma 0^m)\}$.

Опишем построение. Зафиксируем некоторое вычислимое отображение $p : \omega \to \omega \times \omega$, удовлетворяющее следующему свойству: для любых $i, n \in \omega$ существует бесконечно много j таких, что $p(j) = \langle i, n\rangle$.

Шаг 0. Положим $T_*^0 = T_0^0$.

Шаг $t > 0$. На этом шаге мы будем пытаться удовлетворить требование $\mathbf{R}_{i,n}$, где $p(t) = \langle i, n\rangle$.

Сначала снимем все метки, стоящие на вершинах дерева T_i^{t-1}, не являющихся концевыми.

Если метка $\langle i, n\rangle$ в настоящий момент где-нибудь поставлена, то перейдем к следующему шагу. В противном случае ищем концевую вершину α дерева T_i^t с наименьшим номером такую, что выполнены следующие условия:

(1) для всех ε, лексикографически не превосходящих α, значения $\varkappa_n^t(\varepsilon)$ определены и $W^t_{\varkappa_n(\varepsilon)} \neq \varnothing$;

(2) существуют $\gamma \in W^t_{\varkappa^t(\alpha)}$ и элемент $\beta \sqsupseteq \gamma$ такой, что t-ранг β больше, чем $c(i, n)$;

(3) $\Big(\bigcup\limits_{\gamma\in W^t_{\varkappa_n(\varepsilon)}} V_\gamma\Big) \cap \Big(\bigcup\limits_{\gamma\in W^t_{\varkappa_n(\varepsilon')}} V_\gamma\Big) = \varnothing$ для всех пар $\varepsilon, \varepsilon' \in T_i^t$ элементов, несравнимых относительно отношения $\sqsubseteq$.

Берем наименьшее такое β и в качестве T_*^t наименьшее бинарное дерево, содержащее T_0^t и элементы $\beta 0$ и $\beta 1$. Поставим на элемент α метку $\langle i, n\rangle$.

Описание построения закончено.

Докажем следующие свойства этого построения.

Лемма 5.5. *Каждая метка ставится конечное число раз. Все требования $R_{i,n}$ удовлетворяются.*

Доказательство леммы. Заметим, что каждая метка может быть поставлена на некоторый элемент дерева T_i не более одного раза, и если однажды эта метка ставится на концевую вершину дерева T_i, то она уже никогда не снимается.

Зафиксируем натуральные числа i и n и покажем, что метка $\langle i, n\rangle$ ставится лишь конечное число раз. Возможны следующие случаи.

Случай 1. Для некоторого $\alpha \in T_i$ значение $\varkappa_n(\alpha)$ не определено. Тогда лемма следует из описания построения и замечания, сделанного в начале доказательства.

Следующие два случая рассматриваются аналогично.

Случай 2. Для некоторого $\alpha \in T_i$ выполнено $W_{\varkappa_n(\alpha)} = \varnothing$.

Случай 3. Для некоторых $\varepsilon, \varepsilon' \in T_i$, несравнимых по отношению $\sqsubseteq$, выполнено $\big(\bigcup_{\gamma\in W^t_{\varkappa_n(\varepsilon)}} V_\gamma\big) \cap \big(\bigcup_{W^t_{\varkappa_n(\varepsilon')}} V_\gamma\big) \neq \varnothing$.

Очевидно, что в любом из этих трех случаев требование $R_{i,n}$ выполняется.

Случай 4. Не выполнен ни один из предыдущих случаев.

Нетрудно убедиться, что в этом случае метка $\langle i, n\rangle$ будет в итоге поставлена на некоторую концевую вершину α дерева T_i и поэтому никогда уже не будет снята. Тогда множество V_α будет содержать один элемент, а множество $\bigcup_{W^t_{\varkappa_n(\alpha)}} V_\gamma$ — как минимум два элемента, т. е. требование $R_{i,n}$ выполняется.

Лемма 5.6. $\mathfrak{X}(T_0) \cong \mathfrak{X}(T_*)$.

Доказательство леммы. Сначала отметим, что при построении дерева T_* под каждую концевую вершину α дерева T_0 будет добавлено лишь конечное семейство новых элементов. Действительно, начиная с некоторого шага t, t-ранг концевой вершины α уже не будет изменяться. Обозначим его через m. Все элементы, добавленные под α, будут иметь ранг m. Новые элементы под α будут добавляться только при постановке меток $\langle i, n\rangle$, для которых $c(i, n) < m$, что произойдет лишь конечное число раз.

Лемма теперь следует из предложения 5.1 и замечания 3. $\square$

Замечание 4. Требование существования вычислимого отображения φ в определении сильного гомеоморфизма нигде не использовано в доказательстве.

Теорема 5.7. *Любые два эффективные топологические T_0-пространства без изолированных точек, обладающие эффективными базами открыто-замкнутых множеств, сильно вычислимо гомеоморфны.*

Доказательство следует из того, что каждое такое пространство имеет древесное представление, в котором это дерево является полным бинарным деревом. $\square$

Теорема 5.8. *Пусть $\mathfrak{X}$ — эффективное топологическое T_0-пространство с эффективной базой из открыто-замкнутых множеств. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{X}$ допускает как минимум два не сильно вычислимо изоморфных вычислимых представления с эффективными базами из открыто-замкнутых множеств;*

(2) *$\mathfrak{X}$ допускает бесконечно много попарно не сильно вычислимо изоморфных вычислимых представлений с эффективными базами из открыто-замкнутых множеств;*

(3) *класс всех эффективных представлений $\mathfrak{X}$ с эффективными базами из открыто-замкнутых множеств эффективно бесконечен;*

(4) $\mathfrak{X}$ *содержит бесконечно много изолированных точек.*

Доказательство следует из вышеприведенных результатов.

Результаты настоящей работы получены во время визита автора в Университет г. Зигена (Германия). Автор благодарит профессора Дитера Шпреена за приглашение, знакомство с эффективной топологией и полезные обсуждения. Автор также благодарит анонимного рецензента за исправление некоторых неточностей в изложении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl, 1975.

2. *Ногина Е. Ю.* Соотношения между некоторыми классами эффективных топологических пространств // Мат. заметки. 1969. Т. 5, № 4. С. 483–495.

3. *Ногина Е. Ю., Вайнберг Ю. Р.* Исследования по формализованным языкам и классическим логикам // Категории эффективных топологических пространств. М.: Наука, 1974. С. 253–273.

4. *Ногина Е. Ю.* Об эффективных топологических пространствах // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169, № 1. С. 28–31.

5. *Nogina E. Yu.* Enumerable topological spaces // Z. Math. Logik und Grundlagen der Math. 1978. Bd 24, N 2. S. 141–176.

6. *Spreen D.* A characterization of effective topological spaces // Recursion theory week (Oberwolfach, 1989). Berlin etc.: Springer-Verl., 1990. P. 363–387. (Lecture Notes in Math.; 1432).

7. *Spreen D.* On effective topological spaces // J. Symbolic Logic. 1998. V. 63, N 1. P. 185–221.

8. *Kalantari I.* A bibliography of recursive algebra and recursive model theory // Handbook of Recursive Mathematics. V. 1. Recursive Model Theory. Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo: Elsevier, 1998. P. 515–581. (Studies in Logic and Foundations of Mathematics).

9. *Морозов А. С.* Функциональные деревья и автоморфизмы моделей // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 1. С. 19–39.

10. *Morozov A. S.* Hyperarithmetical functions and algebraicity // Recursion Theory and Complexity. Proc. Kazan-97. Workshop, july 14–19. Berlin; New York: Walter de Gruyter publ., 1999. P. 115–130. (de Gruyter Series in Logic and its Applications).

11. *Морозов А. С.* О группах автоморфизмов разрешимых моделей // Алгебра и логика. 1995. Т. 34, № 4. С. 437–447.

12. *Гончаров С. С.* О проблеме числа конструктивизаций // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 6. С. 621–639.

Статья поступила 25 апреля 2003 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru