Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 517.518.234

ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЛОСКИЕ 3–МНОГООБРАЗИЯ

Р. Р. Исангулов

Аннотация: Существует хорошо известная проблема распознавания римановых многообразий по спектру их оператора Лапласа — Бельтрами, т. е. проблема эквивалентности изоспектральности и изометричности многообразий. В данной работе эта проблема решена для компактных плоских трехмерных многообразий.

Ключевые слова: изоспектральность, плоские 3-многообразия, уравнение теплопроводности на многообразии, накрытие, функция следа.

§ 1. Введение

Работа связана со спектром оператора Лапласа — Бельтрами $\Delta = -\operatorname{div}\operatorname{grad}$ на компактном римановом многообразии без края. Будем говорить, что два многообразия M и M' *изоспектральны*, если спектры операторов Лапласа — Бельтрами на многообразиях M и M' совпадают.

Существует хорошо известная проблема распознавания римановых многообразий по спектру их оператора Лапласа — Бельтрами, т. е. проблема эквивалентности изоспектральности и изометричности многообразий: будут ли изоспектральные многообразия изометричными? В работе [1] Кац сформулировал эту проблему в вопросе: «Можно ли услышать форму барабана?» В общем случае ответ отрицательный (см. [2]).

В 1964 г. Милнор [3] привел пример 16-мерных изоспектральных неизометричных плоских торов. В 1972 г. МакКин [4] показал, что мощность множества изоспектральных неизометричных компактных римановых поверхностей всегда конечна и зависит только от рода поверхности g ($g \geq 2$). В 1985 г. Сунада [5] открыл общий путь в конструировании пар изоспектральных неизометричных римановых многообразий. Используя новый метод, в 1988 г. Брукс [6] независимо от [7] доказал, что два 2-мерных плоских тора изоспектральны тогда и только тогда, когда они изометричны. В 1990 г. Шиман [8] построил пример 4-мерных изоспектральных неизометричных плоских торов. В 1992 г. Конвэй и Слоан [9] построили семейство пар изоспектральных 4-мерных решеток. Затем в 1997 г. Шиман [10] доказал, что два 3-мерных плоских тора изоспектральны тогда и только тогда, когда они изометричны. Недавно автор [11] независимо от Берже, Годюшон и Мазе [7] доказал, что две плоские бутылки Клейна изоспектральны тогда и только тогда, когда они изометричны. Основные факты

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00104), Государственной программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ–311.2003.1) и INTAS (грант 03–51–3663).

и определения из спектральной теории оператора Лапласа — Бельтрами, определенного на римановом многообразии, можно найти, например, в монографии [12, гл. 7].

В данной работе эта проблема решена для компактных плоских трехмерных многообразий. Известно [13], что существуют 10 классов попарно гомеоморфных компактных связных плоских 3-многообразий (6 ориентируемых и 4 неориентируемых). Пусть $M_1, \dots, M_6$ являются представителями шести классов ориентируемых, а $N_1, \dots, N_4$ — представителями четырех классов неориентируемых компактных плоских 3-многообразий в порядке, приведенном в [13]. Для описания спектра многообразия M мы используем функцию следа многообразия M

$$\operatorname{tr}(H_M) = \int\limits_M H_M(x, x, t)\, dM,$$

где $H_M(x, y, t)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности на многообразии M, dM — элемент объема. С помощью метода, разработанного в [11], получены следующие теоремы.

Теорема А. *Функция следа каждого компактного плоского 3-многообразия $M_1, \dots, M_6$, $N_1, \dots, N_4$ может быть вычислена в явном виде: $\operatorname{tr}(H_{M_i}) = F_i$ для каждого многообразия M_i, $i = 1, \dots, 6$, и $\operatorname{tr}(H_{N_j}) = P_j$ для каждого многообразия N_j, $j = 1, \dots, 4$, где функции F_i и P_j приведены в приложении.*

Теорема Б. *Любые два гомеоморфных компактных плоских 3-многообразия изоспектральны тогда и только тогда, когда они изометричны.*

Теорема В. *Существует единственное семейство пар изоспектральных, но негомеоморфных компактных плоских 3-многообразий, которое состоит из многообразий M_4 и M_6.*

Замечание. Для доказательства теоремы А в случае многообразия M_1 (3-мерный плоский тор) мы используем явный вид функции следа $\operatorname{tr}(H_{M_1})$, полученный в [6]. При доказательстве теоремы Б в случае многообразия M_1 мы применяем результат, полученный в [10]. Все остальные случаи доказаны нами с помощью совершенно иных методов.

Для доказательства теоремы А мы используем связь между фундаментальными решениями уравнения теплопроводности на многообразии M и его регулярном накрытии (лемма 2).

Теорема В вытекает из теоремы А, а доказательство теоремы Б получается из теоремы А и следующих утверждений.

(i) *Спектр многообразия M однозначно определяет функцию следа $\operatorname{tr}(H_M)$, и, обратно, по функции следа $\operatorname{tr}(H_M)$ можно однозначно определить спектр многообразия M (предложения 3 и 4).*

(ii) *Функция следа $\operatorname{tr}(H_M)$ определяет с точностью до изометрии компактное плоское 3-многообразие M (лемма 3).*

В данной работе мы используем [12, 13] для стандартных ссылок. В § 2 собраны основные факты о компактных плоских 3-многообразиях и спектральной теории оператора Лапласа — Бельтрами. В § 3–5 содержатся доказательства теорем А–В соответственно.

Результаты данной работы составляют предмет магистерской диссертации «Изоспектральные плоские 3-многообразия», защищенной автором в Новосибирском государственном университете в 2002 г. При подготовке к печати было обнаружено, что аналогичные результаты были независимо получены в недавних препринтах [14, 15].

Автор признателен профессору А. Д. Медных за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

§ 2. Основные факты спектральной теории и теории компактных плоских 3-многообразий

В этом параграфе приведем основные факты о компактных плоских 3-многообразиях (см. [13]) и спектральной теории оператора Лапласа — Бельтрами $\Delta = -\operatorname{div}\operatorname{grad}$, определенного на компактном римановом многообразии без края (см. [12]).

2.1. Компактные плоские 3-многообразия. Обозначим через $E(n)$ группу движений евклидова n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$. Каждое движение состоит из (возможно, несобственного) поворота A и последующего параллельного переноса t_a на вектор a. Запишем это движение как (A, t_a). Очевидно, что A — элемент $O(n)$ и $a \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, евклидова группа $E(n)$ является полупрямым произведением $O(n)$ и $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет следующему правилу:

$$(A, t_a)(B, t_b) = (AB, t_{Ab+a}).$$

Определение 1. *Плоское компактное связное n-многообразие M^n* — это пространство орбит $\mathbb{R}^n$, определенное действием равномерно разрывной дискретной подгруппы без неподвижных точек $\Gamma \in E(n)$, $M^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$. Оно допускает нормальное риманово накрытие n-мерным тором $T^n = \mathbb{R}^n/\Gamma^*$, где Γ^* — нормальная подгруппа конечного индекса ранга n, $\Gamma^* < \Gamma$. Более того, можно выбрать $\Gamma^* = \Gamma \cap \mathbb{R}^n$. Заметим (см. [13, гл. 3]), что Γ не имеет нетривиальных элементов конечного порядка.

Определение 2. Группа скольжений Ψ накрытия $T^n \to M^n$ называется *группой голономии* многообразия M^n, $\Psi = \Gamma/\Gamma^*$.

Следующие результаты могут быть найдены, например, в [13].

Теорема 1. *Существуют ровно шесть классов аффинно диффеоморфных между собой компактных связных ориентируемых плоских 3-мерных римановых многообразий. Представителями этих классов служат многообразия $\mathbb{R}^3/\Gamma$, где Γ — одна из шести перечисленных ниже групп. (Далее Λ — решетка в $\mathbb{R}^3$ с образующими a_1, a_2, a_3; $t_i = t_{a_i}$ — параллельный перенос на вектор a_i; $\Psi = \Gamma/\Gamma^*$ — группа голономии.)*

M_1. *$\Psi = \{1\}$, а Γ порождена сдвигами $\{t_1, t_2, t_3\}$, где $\{a_i\}$ линейно независимы.*

M_2. *$\Psi = \mathbb{Z}_2$, а Γ порождена множеством $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$, где $\alpha^2 = t_1$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_2^{-1}$, $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_3^{-1}$, причем a_1 ортогонален к a_2 и a_3, $\alpha = (A, t_{a_1/2})$ и $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = -a_2$, $A(a_3) = -a_3$.*

M_3. *$\Psi = \mathbb{Z}_3$, а Γ порождена множеством $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$, где $\alpha^3 = t_1$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_3$, $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_2^{-1} t_3^{-1}$; a_1 ортогонален к a_2 и a_3, $\|a_2\| = \|a_3\|$ и $\{a_2, a_3\}$ — гексагональная плоская решетка, причем $\alpha = (A, t_{a_1/3})$, $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = a_3$, $A(a_3) = -a_2 - a_3$.*

M_4. $\Psi = \mathbb{Z}_4$, а Γ *порождена множеством* $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$, *где* $\alpha^4 = t_1$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_3$ *и* $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_2^{-1}$; a_i *попарно ортогональны*, $\|a_2\| = \|a_3\|$, *причем* $\alpha = (A, t_{a_1/4})$, $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = a_3$, $A(a_3) = -a_2$.

M_5. $\Psi = \mathbb{Z}_6$, а Γ *порождена множеством* $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$, *где* $\alpha^6 = t_1$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_3$ *и* $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_2^{-1} t_3$; a_1 *ортогонален к* a_2 *и* a_3, $\|a_2\| = \|a_3\|$ *и* $\{a_2, a_3\}$ — *плоская решетка, причем угол между* a_2 *и* a_3 *равен* $\pi/3$; $\alpha = (A, t_{a_1/6})$, *где* $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = a_3$, $A(a_3) = -a_3 - a_2$.

M_6. $\Psi = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, а Γ *порождена множеством* $\{\alpha, \beta, \gamma, t_1, t_2, t_3\}$, *где* $\gamma\beta\alpha = t_1 t_3$ *и* $\alpha^2 = t_1$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_2^{-1}$, $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_3^{-1}$; $\beta t_1 \beta^{-1} = t_1^{-1}$, $\beta^2 = t_2$, $\beta t_3 \beta^{-1} = t_3^{-1}$; $\gamma t_1 \gamma^{-1} = t_1^{-1}$, $\gamma t_2 \gamma^{-1} = t_2^{-1}$, $\gamma^2 = t_3$; *векторы* a_i *попарно ортогональны и* $\alpha = (A, t_{a_1/2})$, *где* $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = -a_2$, $A(a_3) = -a_3$; $\beta = (B, t_{(a_2+a_3)/2})$, *где* $B(a_1) = -a_1$, $B(a_2) = a_2$, $B(a_3) = -a_3$; $\gamma = (C, t_{(a_1+a_2+a_3)/2})$, *где* $C(a_1) = -a_1$, $C(a_2) = -a_2$, $C(a_3) = a_3$.

Теорема 2. *Существуют ровно четыре класса аффинно диффеоморфных компактных связных неориентируемых плоских 3-мерных римановых многообразий. Представителями этих классов служат многообразия* $\mathbb{R}^3/\Gamma$, *где* Γ — *одна из четырех перечисленных ниже групп. В дальнейшем* Λ — *порожденная сдвигами решетка с образующими* a_1, a_2, a_3; $t_i = t_{a_i}$ — *параллельный перенос на вектор* a_i; $\Psi = \Gamma/\Gamma^*$ — *группа голономии, а* $\Gamma_0 = \Gamma \cap \mathrm{SO}(3) \cdot \mathbb{R}^3$, *так что* $\mathbb{R}^3/\Gamma_0 \to \mathbb{R}^3/\Gamma$ — *2-листное ориентируемое накрытие.*

N_1. $\Psi = \mathbb{Z}_2$, а Γ *порождена множеством* $\{\varepsilon, t_1, t_2, t_3\}$, *где* $\varepsilon^2 = t_1$, $\varepsilon t_2 \varepsilon^{-1} = t_2$, $\varepsilon t_3 \varepsilon^{-1} = t_3^{-1}$, *причем* a_1 *и* a_2 *ортогональны к* a_3 *и* $\varepsilon = (E, t_{a_1/2})$, $E(a_1) = a_1$, $E(a_2) = a_2$, $E(a_3) = -a_3$. Γ_0 *порождена множеством* $\{t_1, t_2, t_3\}$.

N_2. $\Psi = \mathbb{Z}_2$, а Γ *порождена множеством* $\{\varepsilon, t_1, t_2, t_3\}$, *где* $\varepsilon^2 = t_1$, $\varepsilon t_2 \varepsilon^{-1} = t_2$, $\varepsilon t_3 \varepsilon^{-1} = t_1 t_2 t_3^{-1}$; *ортогональная проекция* a_3 *на плоскость* (a_1, a_2) *равна* $(a_1 + a_2)/2$, *причем* $\varepsilon = (E, t_{a_1/2})$, $E(a_1) = a_1$, $E(a_2) = a_2$, $E(a_3) = a_1 + a_2 - a_3$. Γ_0 *порождена множеством* $\{t_1, t_2, t_3\}$.

N_3. $\Psi = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, а Γ *порождена множеством* $\{\varepsilon, \alpha, t_1, t_2, t_3\}$, *где* $\alpha^2 = t_1$, $\varepsilon^2 = t_2$, $\varepsilon\alpha\varepsilon^{-1} = t_2\alpha$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_2^{-1}$, $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_3^{-1}$, $\varepsilon t_1 \varepsilon^{-1} = t_1$ *и* $\varepsilon t_3 \varepsilon^{-1} = t_3^{-1}$, *причем* a_i *попарно ортогональны и* $\alpha = (A, t_{a_1/2})$, *где* $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = -a_2$, $A(a_3) = -a_3$; $\varepsilon = (E, t_{a_2/2})$, *где* $E(a_1) = a_1$, $E(a_2) = a_2$, $E(a_3) = -a_3$. Γ_0 *порождена множеством* $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$.

N_4. $\Psi = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, а Γ *порождена множеством* $\{\varepsilon, \alpha, t_1, t_2, t_3\}$, *где* $\alpha^2 = t_1$, $\varepsilon^2 = t_2$, $\varepsilon\alpha\varepsilon^{-1} = t_2 t_3 \alpha$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_2^{-1}$, $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_3^{-1}$, $\varepsilon t_1 \varepsilon^{-1} = t_1$ *и* $\varepsilon t_3 \varepsilon^{-1} = t_3^{-1}$, *причем* a_i *попарно ортогональны и* $\alpha = (A, t_{a_1/2})$, *где* $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = -a_2$, $A(a_3) = -a_3$; $\varepsilon = (E, t_{(a_2+a_3)/2})$, *где* $E(a_1) = a_1$, $E(a_2) = a_2$, $E(a_3) = -a_3$. Γ_0 *порождена множеством* $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$.

Теорема 3 (изометрическая классификация компактных 3-многообразий). *Пусть* M — *компактное плоское 3-многообразие,* $M = \mathbb{R}^3/\Gamma$.

(i) *Если* M — *тор (тип* M_1*), то элементами из* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{GL}^+(3,\mathbb{R}) / \mathrm{SO}(3)$ *параметризуются все возможные классы изометрии.*

(ii) *Если* M *принадлежит типу* M_2, *то классы изометрии можно параметризовать с помощью* $\|a_1\|$ *и двумерной решетки* $\{a_2, a_3\}$, *порожденной векторами* a_2 *и* a_3.

(iii) *Если* M *принадлежит одному из типов* M_3, M_4, M_5, *то классы изометрии можно параметризовать с помощью* $\|a_1\|$ *и* $\|a_3\|$.

$$\begin{tikzcd}
M_3 & M_1 \arrow[l, "3"'] \arrow[r, "2"] \arrow[dl, "4"'] \arrow[dr, "2"] \arrow[dd, "2"] \arrow[dddl, "6"'] & N_1 \\
M_4 & & N_2 \\
& M_2 \arrow[r, "2"] \arrow[dr, "2"] \arrow[dd, "2"] & N_3 \\
M_5 & & N_4 \\
& M_6 &
\end{tikzcd}$$

Рис. 1. Иерархия (топологических) накрытий

(iv) *Если M имеет тип M_6, то решетка является прямоугольной, и все возможные случаи параметризуются неупорядоченными тройками* $\{\|a_1\|, \|a_2\|, \|a_3\|\}$.

(v) *Если M — многообразие типа N_1 или N_2, то классы изометрии параметризуются парами $(p, \|a_3\|)$, где p — элемент, соответствующий двумерной решетке $\{a_1, a_2\}$, порожденной векторами a_1 и a_2.*

(vi) *Если M имеет тип N_3 или N_4, то решетка $\Lambda = \{a_1, a_2, a_3\}$ прямоугольная, и все возможные случаи параметризуются упорядоченными тройками* $(\|a_1\|, \|a_2\|, \|a_3\|)$.

В работе [16] Люфт и Сьерве показали, что компактное плоское 3-многообразие допускает следующую иерархию (топологических) накрытий (см. рис. 1), где число, стоящее рядом со стрелкой, обозначает количество листов в соответствующем регулярном накрытии. Нам потребуется следующее хорошо известное

Замечание. Пусть $\pi : M' \to M$ — топологическое накрытие и M наделено плоской метрикой. Тогда эта метрика может быть поднята до плоской метрики на M' таким образом, что π становится локальной изометрией. Обратное неверно: плоская метрика на M' не обязательно является поднятием плоской метрики на M посредством π.

2.2. Спектральная теория оператора Лапласа — Бельтрами. Напомним основные факты из спектральной теории оператора Лапласа — Бельтрами, определенного на римановом многообразии. Их можно найти, например, в монографии [12, гл. 7].

Определение 3. *Оператор Лапласа — Бельтрами* (или, для краткости, *лапласиан*) — это оператор

$$\Delta(f) = -\operatorname{div}\operatorname{grad} f.$$

Пусть M — произвольное полное m-мерное риманово многообразие. Тогда лапласиан представляется в виде

$$\Delta u = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^{m} \partial_j (g^{jk} \sqrt{g} \partial_k u), \quad u \in C^\infty(M),$$

где ∂_j — частная производная по j-й координате; $g = \det(g_{ij})$ — определитель метрического тензора, где g_{ij} — компоненты метрического тензора в локальных координатах и g^{ij} — компоненты обратного тензора.

Рассматриваем функциональное пространство — гильбертово пространство $L_2(M)$ интегрируемых с квадратом функций $f : M \to \mathbb{R}$ на компактном связном римановом многообразии M без края со скалярным произведением

$$(f, g) \mapsto \int\limits_M f g \, dM, \quad f, g \in L_2(M),$$

где dM — элемент объема.

Обозначение. Пусть A, B — гладкие многообразия, $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Будем обозначать через $C^{l,k}(A, B; F)$ множество всех непрерывных функций $f : A \times B \to F$ с частными производными порядка l по A и k по B.

Определение 4. Пусть M — любое связное риманово многообразие без края. Непрерывная функция $H = H(x, y, t) : M \times M \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением уравнения теплопроводности на многообразии* M, если $H \in C^{2,1}(M \times M, (0, \infty); \mathbb{R})$ и выполнены следующие условия:

1) $\frac{\partial H}{\partial t} = -\Delta_x H$,
2) $H(x, y, t) = H(y, x, t)$,
3) $\lim\limits_{t \to +0} \int\limits_M H(x, y, t) f(y) \, dM(y) = f(x)$,

здесь сходимость равномерна по x для любых непрерывных функций f с компактным носителем на многообразии M.

Теорема 4. *Пусть M — любое m-мерное компактное связное риманово многообразие без края. Тогда M имеет единственное фундаментальное решение $H = H_M(x, y, t)$ уравнения теплопроводности и*

1) $H_M \in C^\infty(M \times M \times (0, \infty))$,
2) $0 \le H_M(x, y, t) \le c_M t^{-m/2}$, $0 < t < 1$,

где c_M — константа, зависящая от M.

Теорема 5 (спектральная теорема). *Пусть M — компактное связное риманово многообразие без края. Задача на собственные значения*

$$\Delta \varphi = \lambda \varphi$$

имеет полную ортонормированную систему собственных C^∞-функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ в $L_2(M)$ с соответствующими собственными значениями $\lambda_0, \lambda_1, \dots$.

Они имеют следующие свойства:

1) $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$, $\lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$;
2) $H_M(x, y, t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x) \varphi_n(y)$,

где ряд сходится равномерно на $M \times M$ для любого $t > 0$.

Определение 5 (спектр многообразия). Множество собственных значений $\{\lambda_i\}$ оператора Лапласа — Бельтрами $\Delta = -\operatorname{div} \operatorname{grad}$ на многообразии M называют *спектром многообразия* M.

Определение 6 (решение уравнения теплопроводности). Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Непрерывная функция $u = u(x, t) : M \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ называется *решением уравнения теплопроводности* с начальными данными $u(x, 0) = f(x)$, если $u \in C^{2,1}(M, (0, \infty); \mathbb{R})$ и

1) $\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta_x u$;
2) $u(x, 0) = f(x)$, $x \in M$.

Лемма 1. *Пусть $H_M = H_M(x, y, t)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности на M, и пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда функция*

$$u(x,t) := \int\limits_M H_M(x,y,t) f(y)\, dM(y), \quad t > 0,$$

непрерывно продолжается до функции $u(x,t) : M \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, которая является решением уравнения теплопроводности с начальными данными $u(x,0) = f(x)$.

§ 3. Доказательство теоремы А

Пусть $M_1, \dots, M_6$ являются представителями шести классов ориентируемых, а $N_1, \dots, N_4$ являются представителями четырех классов неориентируемых компактных плоских 3-многообразий в порядке, приведенном в § 2. Фундаментальные множества многообразий $M_1, \dots, M_6$, $N_1, \dots, N_4$ приведены на рис. 2–11 соответственно.

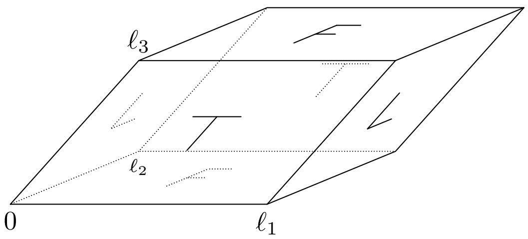

Рис. 2. Фундаментальное множество M_1.

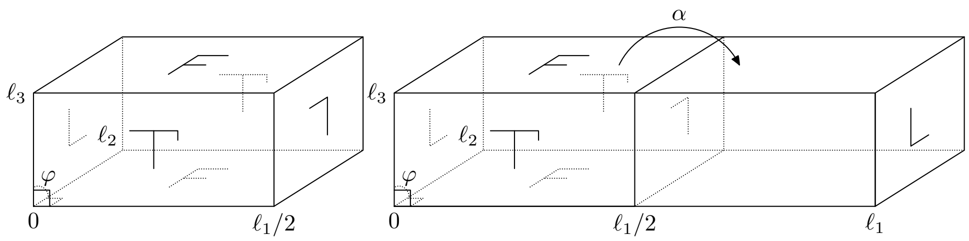

Рис. 3. Фундаментальное множество M_2 и его накрывающий тор M_1, $M_1 \xrightarrow{2} M_2$.

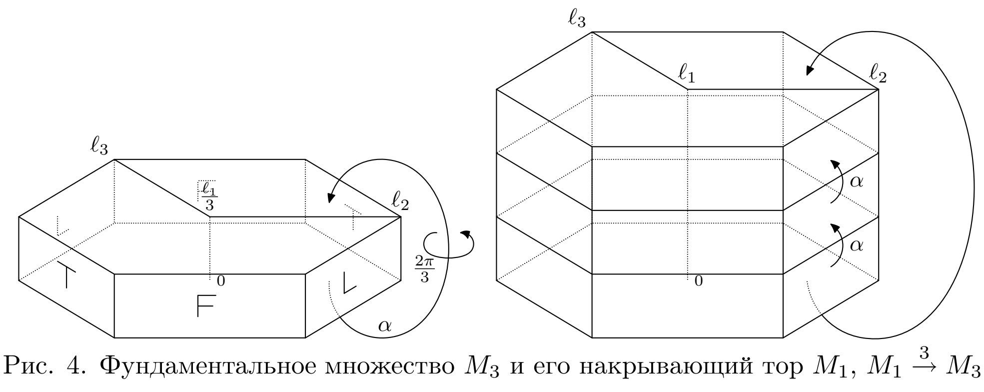

Рис. 4. Фундаментальное множество M_3 и его накрывающий тор M_1, $M_1 \xrightarrow{3} M_3$.

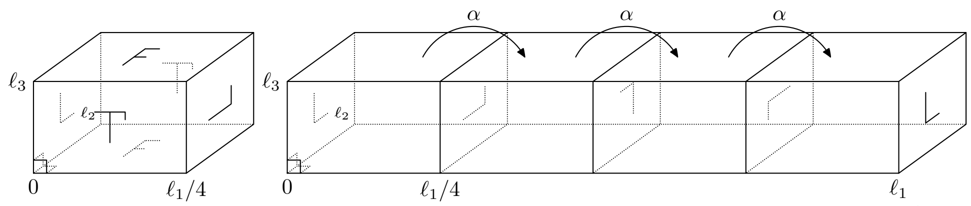

Рис. 5. Фундаментальное множество M_4 и его накрывающий тор M_1, $M_1 \xrightarrow{4} M_4$.

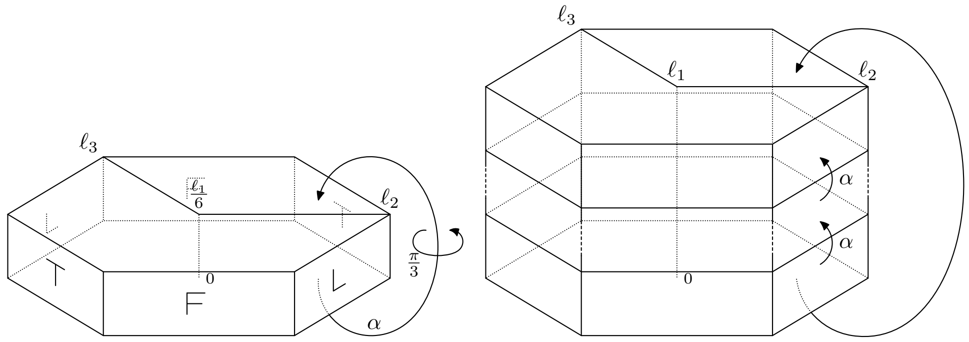

Рис. 6. Фундаментальное множество M_5 и его накрывающий тор M_1, $M_1 \xrightarrow{6} M_5$.

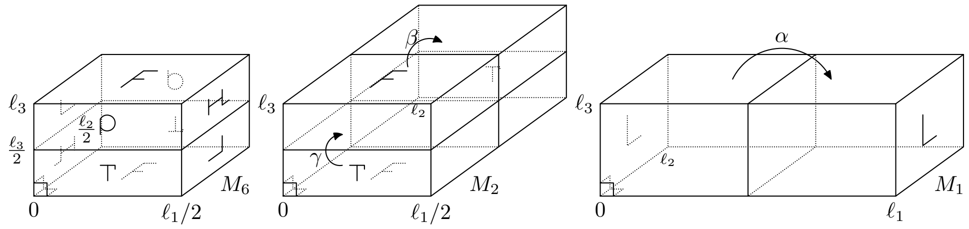

Рис. 7. Фундаментальное множество M_6.
и его накрывающие многообразия $M_1 \xrightarrow{2} M_2 \xrightarrow{2} M_6$,

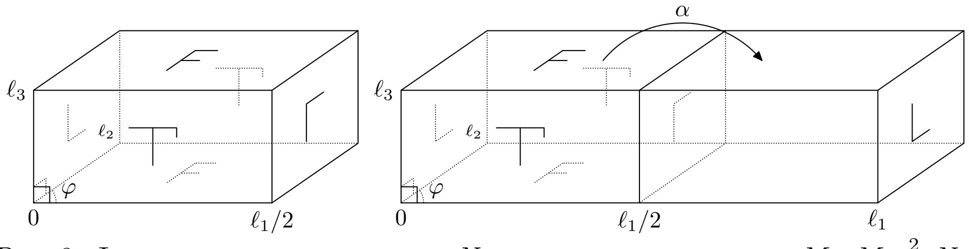

Рис. 8. Фундаментальное множество N_1 и его накрывающий тор M_1, $M_1 \xrightarrow{2} N_1$.

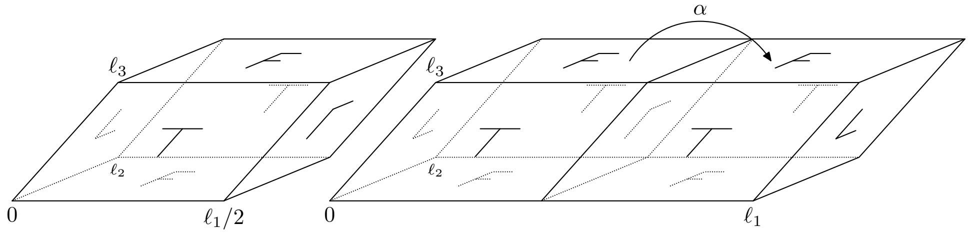

Рис. 9. Фундаментальное множество N_2 и его накрывающий тор M_1, $M_1 \xrightarrow{2} N_2$.

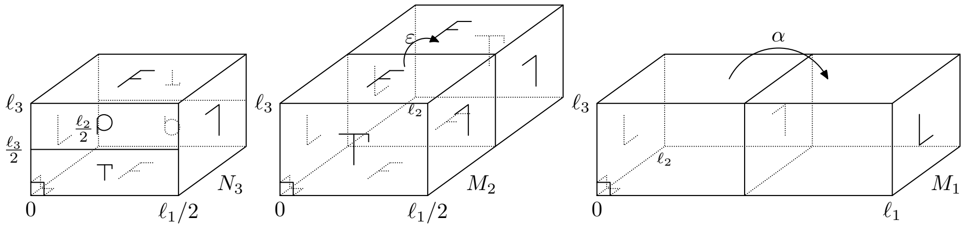

Рис. 10. Фундаментальное множество N_3
и его накрывающие многообразия $M_1 \xrightarrow{2} M_2 \xrightarrow{2} N_3$.

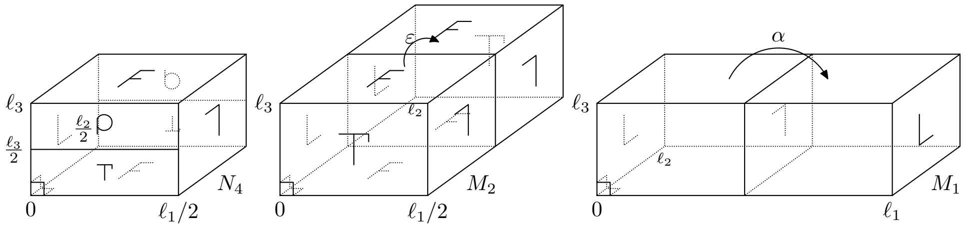

Рис. 11. Фундаментальное множество N_4
и его накрывающие многообразия $M_1 \xrightarrow{2} M_2 \xrightarrow{2} N_4$.

Предположим, что $f : M' \to M$ — накрытие. Многообразие M' определяется подгруппой $\pi_1(M')$ фундаментальной группы $\pi_1(M)$. Когда $\pi_1(M')$ — нормальная подгруппа в $\pi_1(M)$, то говорят, что $f : M' \to M$ — *регулярное накрытие*, при этом фактор-группа $G = \pi_1(M)/\pi_1(M')$, т. е. группа преобразований наложения, действует на M' как группа изометрий M'. Группа G называется *группой накрытия*. Для доказательства теоремы А нам понадобится следующая

Лемма 2 [6, с. 826]. *Пусть $f : M' \to M$ — регулярное накрытие и $G = \pi_1(M)/\pi_1(M')$ — группа накрытия. Тогда*

$$H_M(x, y, t) = \sum_{g \in G} H_{M'}(\tilde{x}, g\tilde{y}, t),$$

где $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ — любые прообразы на M' x и y соответственно при накрытии $f : M' \to M$.

Доказательство. Очевидно, что правая часть удовлетворяет всем условиям определения фундаментального решения уравнения теплопроводности. Утверждение леммы следует из условия единственности (теорема 4). Лемма 2 доказана.

Далее $\Lambda = \{\boldsymbol{\ell} = m_1\boldsymbol{\ell}_1 + m_2\boldsymbol{\ell}_2 + m_3\boldsymbol{\ell}_3,\ m_i \in \mathbb{Z},\ \boldsymbol{\ell}_i \in \mathbb{R}^3,\ i = 1, 2, 3\}$ всегда будет обозначать решетку для 3-мерного плоского тора $M_1 = \mathbb{R}^3/\Lambda$, $\mathrm{vol}(M)$ — объем многообразия M в римановой метрике и M^* — фундаментальное множество многообразия M.

Схема доказательства теоремы А. Предполагаем, что фундаментальное множество многообразия M образовано такими векторами, что фундаментальное множество плоского тора M_1, регулярно накрывающего многообразие M, образовано векторами $\boldsymbol{\ell}_1$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$. Используя взаимосвязь между фундаментальными решениями уравнения теплопроводности на многообразии M и его регулярном накрытии (лемма 2), а также свойства интеграла Эйлера —

Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, получаем в явном виде функцию следа $\mathrm{tr}(H_M)$ многообразия M.

Докажем теорему A в случаях многообразий M_1 и M_2. В остальных случаях она доказывается совершенно аналогично.

3.1. Многообразие M_1 (плоский тор).

Предложение 1. *Фундаментальное решение уравнения теплопроводности на многообразии M_1, где $y = x$, имеет следующий вид:*

$$H_{M_1}(x,x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t}, \quad x \in M_1.$$

Доказательство. Рассмотрим универсальное накрытие плоского тора $\mathbb{R}^3 \overset{\infty}{\to} M_1$. Известно, что

$$H_{\mathbb{R}^3}(x,y,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-|x-y|^2/4t}, \quad x,y \in \mathbb{R}^3.$$

По лемме 2

$$H_{M_1}(x,x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\gamma\in\pi_1(M_1)} e^{-|\tilde{x}-\gamma\tilde{x}|^2/4t} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t},$$

здесь $\tilde{x} \in \mathbb{R}^3$ — любой прообраз $x \in M_1$ при накрытии $\mathbb{R}^3 \overset{\infty}{\to} M_1$. Предложение доказано.

Используя предложение 1, имеем

$$\mathrm{tr}(H_{M_1}) = \int\limits_{M_1} H_{M_1}(x,x,t)\,dx = \frac{\mathrm{vol}(M_1)}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t}.$$

Теорема A в случае многообразия M_1 доказана.

Замечание. Теорема A в случае 3-мерного плоского тора M_1 доказана Бруксом [6].

3.2. Многообразие M_2. Предполагаем, что фундаментальное множество многообразия M_2 образовано линейно независимыми векторами $\boldsymbol{\ell}_1/2$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ (см. рис. 6). В случае M_2 по теореме 1 $\boldsymbol{\ell}_1$ ортогонален к $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$. Обозначим через φ угол между $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$, где $0 < \varphi < \pi$.

Предложение 2. *Фундаментальное решение уравнения теплопроводности на многообразии M_2, где $y = x$, имеет вид*

$$H_{M_2}(x,x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \Big[\sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} + \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|z-\beta z+\boldsymbol{\ell}|^2/4t} \Big],$$

где $x \in M_2$, $z \in \mathbb{R}^3$ — любой прообраз x при накрытии $\mathbb{R}^3 \overset{\infty}{\to} M_1 \overset{2}{\to} M_2$ и β действует на $\mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$\beta z = Az + \boldsymbol{\ell}_1/2, \quad z \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\ell}_1/2 = \begin{pmatrix} \ell_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица A записана в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ и $\boldsymbol{\ell}_1/|\boldsymbol{\ell}_1| = \boldsymbol{e}_1$.

Доказательство. Рассмотрим двулистное накрытие $M_1 \xrightarrow{2} M_2$ и группу накрытия $G = \pi_1(M_2)/\pi_1(M_1)$. Заметим, что

$$\pi_1(M_2) = \pi_1(M_1) \cup \alpha\pi_1(M_1),$$

где α действует на M_1 следующим образом (см. теорему 1 в случае M_2):

$$\alpha\tilde{x} = A\tilde{x} + \xi, \quad \tilde{x} \in M_1,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \ell_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица A записана в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$ и $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$. С точки зрения геометрии, α отождествляет левую и правую грани фундаментального многогранника многообразия M_2 с поворотом на угол π (см. рис. 6).

По лемме 2 имеем

$$H_{M_2}(x,x,t) = \sum_{g\in G} H_{M_1}(\tilde{x}, g\tilde{x}, t) = H_{M_1}(\tilde{x},\tilde{x},t) + H_{M_1}(\tilde{x},\alpha\tilde{x},t),$$

где $\tilde{x} \in M_1$ — любой прообраз $x \in M_2$ при накрытии $M_1 \xrightarrow{2} M_2$.

Теперь рассмотрим универсальное накрытие плоского тора $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\infty} M_1$. По лемме 2 и предложению 1 получим

$$H_{M_1}(\tilde{x},\tilde{x},t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t},$$

$$\begin{aligned} H_{M_1}(\tilde{x},\alpha\tilde{x},t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\gamma\in\pi_1(M_1)} e^{-|\widetilde{(\tilde{x})} - \gamma\widetilde{(\alpha\tilde{x})}|^2/4t} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\gamma\in\pi_1(M_1)} e^{-|\widetilde{(\tilde{x})} - \widetilde{(\alpha\tilde{x})} + \widetilde{(\alpha\tilde{x})} - \gamma\widetilde{(\alpha\tilde{x})}|^2/4t} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\widetilde{(\tilde{x})} - \widetilde{(\alpha\tilde{x})} + \boldsymbol{\ell}|^2/4t}, \end{aligned}$$

где $\tilde{x} \in M_1$ и $\widetilde{(\tilde{x})} \in \mathbb{R}^3$ — любой прообраз $\tilde{x}$ при накрытии $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\infty} \mathbb{R}^3/\Lambda = M_1$.

Заметим, что $\widetilde{\alpha\tilde{x}} = \tilde{\alpha}\tilde{\tilde{x}}$, где $\tilde{\alpha}$ действует на $\mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$\tilde{\alpha}\tilde{\tilde{x}} = A\tilde{\tilde{x}} + \xi, \quad \tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{R}^3.$$

Для завершения доказательства предложения 2 положим $z = \tilde{\tilde{x}}$ и $\beta = \tilde{\alpha}$.

По предложению 2 имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(H_{M_2}) &= \int\limits_{M_2} H_{M_2}(x,x,t)\,dx \\ &= \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_{M_2^*} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} dx + \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_{M_2^*} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|x-\alpha x+\boldsymbol{\ell}|^2/4t}\,dx. \quad (1) \end{aligned}$$

Далее мы работаем в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$. Положим $x = (x_1, x_2, x_3)$. Нетрудно получить, что

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\ell} = (\ell_1 m, \ell_2 n + \ell_3 k\cos\varphi, k\ell_3\sin\varphi)_{e_1,e_2,e_3}; \quad \alpha x = (x_1 + \ell_1/2, -x_2, -x_3);\\ |x - \alpha x + \boldsymbol{\ell}|^2 = (m+1/2)^2\ell_1^2 + (2x_2 + n\ell_2 + k\ell_3\cos\varphi)^2 + (2x_3 + k\ell_3\sin\varphi)^2.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь предполагаем, что $\boldsymbol{\ell}_1/|\boldsymbol{\ell}_1| = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{\ell}_2/|\boldsymbol{\ell}_2| = \boldsymbol{e}_2$ и φ — угол между $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$.

Определим объем многообразия M_2 как

$$\mathrm{vol}(M_2) = \int\limits_{M_2^*} dx,$$

где $dx = dx_1dx_2dx_3$. Заметим, что $\mathrm{vol}(M_2) = \mathrm{vol}(M_2^*)$ в силу того, что M_2^* — фундаментальное множество M_2. Из (1) и (2) имеем

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}(H_{M_2}) = \frac{\mathrm{vol}(M_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t}\\ &+\frac{\ell_1/2}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2\ell_1^2/4t} \underbrace{\sum_{n,k\in\mathbb{Z}} \iint\limits_K e^{-[(2x_2+n\ell_2+k\ell_3\cos\varphi)^2+(2x_3+k\ell_3\sin\varphi)^2]/4t} dx_2dx_3}_{I_1},\end{aligned}$$

где K — параллелограмм, образованный векторами $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$.

Заметим, что интегрирование в интеграле I_1 по множеству K можно заменить интегрированием по прямоугольнику R, длины сторон которого равны ℓ_2 и $\ell_3\sin\varphi$, и интеграл I_1 может быть представлен по теореме Фубини как произведение интегралов. Используя свойства интеграла Эйлера — Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, получим

$$\begin{aligned}I_1 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\int\limits_0^{\ell_3\sin\varphi} e^{-(2x_3+k\ell_3\sin\varphi)^2/4t}\,dx_3 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^{\ell_2} e^{-(2x_2+n\ell_2+k\ell_3\cos\varphi)^2/4t}\,dx_2\right]\\ &= 2\sqrt{\pi t}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^{\ell_3\sin\varphi} e^{-(2x_3+k\ell_3\sin\varphi)^2/4t}\,dx_3 = 4\pi t.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathrm{tr}(H_{M_2}) = \frac{\mathrm{vol}(M_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} + \frac{\ell_1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2\ell_1^2/4t}.$$

Теорема А в случае многообразия M_2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы Б

Для доказательства теоремы Б нам потребуются следующие предложения и лемма 3.

Для описания спектра многообразия M используем функцию следа $\mathrm{tr}(H_M)$ многообразия M.

Предложение 3. *Пусть M — компактное связное риманово многообразие без края. Тогда функция следа $\mathrm{tr}(H_M)$ однозначно определяется спектром многообразия M.*

Доказательство. По спектральной теореме имеем

$$\mathrm{tr}(H_M) = \int\limits_M \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x)\varphi_n(x)\, dM = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \int\limits_M \varphi_n(x)\varphi_n(x)\, dM = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t},$$

так как $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ — ортонормированная система в $L_2(M)$. Здесь $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная последовательность собственных функций оператора Лапласа — Бельтрами на компактном римановом многообразии M без края и $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ — соответствующая последовательность собственных значений. Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть M — компактное связное риманово многообразие без края. Тогда функция следа $\mathrm{tr}(H_M)$ однозначно определяет спектр многообразия M.*

Доказательство. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность собственных значений оператора Лапласа — Бельтрами на M. По спектральной теореме имеем $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Таким образом, $\lambda_0 = 0$ с кратностью 1. Предположим, что $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ найдены с учетом их кратностей. Согласно предложению 3 λ_{k+1} — наибольшее значение λ такое, что

$$F(\lambda) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{tr}(H_M) - \sum\limits_{n=0}^{k} e^{-\lambda_n t}}{e^{-\lambda t}} < \infty,$$

где $F(\lambda)$ — кратность λ_{k+1}. Предложение доказано.

Замечание. Заметим, что процедура последовательного нахождения λ_k в предложении 4 аналогична процедуре нахождения коэффициентов в ряде Тейлора. В данном случае мы вычисляем коэффициенты при экспонентах и в отличие от ряда Тейлора степени самих экспонент. Также можно заметить, что доказательство предложения 4 аналогично доказательству теоремы Хубера, где используется та же процедура (см. [12, гл. 9, § 2]).

Лемма 3. *Пусть M — компактное плоское 3-многообразие. Тогда функция следа $\mathrm{tr}(H_M)$ определяет с точностью до изометрии соответствующее многообразие M.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Предположим, что функция следа компактного плоского 3-многообразия $\mathrm{tr}(H_M)$ задана. Многообразие M определяется с точностью до изометрии своим фундаментальным множеством. По изометрической классификации компактных плоских 3-многообразий (теорема 3) мы знаем, какие параметры определяют фундаментальное множество соответствующего многообразия M. Затем, используя процедуру, аналогичную примененной в предложении 4, находим все эти параметры по функции следа $\mathrm{tr}(H_M)$. Учитывая теорему А, сразу можно заметить, что функция следа $\mathrm{tr}(H_M)$ определяет объем соответствующего многообразия M, а именно $\mathrm{Vol}(M) = (4\pi)^{\frac{3}{2}} \lim\limits_{t \to +0} t^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{tr}(H_M)$.

Таким образом, по функции $\mathrm{tr}(H_M)$ мы определяем фундаментальное множество соответствующего многообразия M и, следовательно, с точностью до изометрии многообразие M.

4.1. Многообразие M_2. Предполагаем аналогично § 3, что фундаментальное множество многообразия M_2 натянуто на линейно независимые векторы $\boldsymbol{\ell}_1/2$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ (см. рис. 3). Заметим, что классы изометрий M_2 параметризованы с помощью $\mathrm{vol}(M_2)$, $|\boldsymbol{\ell}_1| = \ell_1$ и двумерной решетки $\Lambda_2 = \{\boldsymbol{\ell}_2, \boldsymbol{\ell}_3\}$, порожденной векторами $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ (теорема 3). Найдем все эти параметры по функции следа $\mathrm{tr}(H_{M_2})$.

(1) Используя теорему А, покажем, что $\mathrm{tr}(H_{M_2})$ в точности определяет ℓ_1. Пусть

$$F(\lambda) = \lim_{t\to+0} \frac{(4\pi t)^{3/2}\,\mathrm{tr}(H_{M_2}) - \mathrm{vol}(M_2)}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$F(\lambda) = \lim_{t\to+0}\Big(\mathrm{vol}(M_2)(2e^{(\lambda^2-\ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_2^2)/4t} + \cdots) + 2\pi t\ell_1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m+\frac{1}{2})^2\ell_1^2)/4t}\Big).$$

Ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$. Если $F(\lambda_{\max}) \neq 0$, то

$$\mathrm{tr}(H_{M_2}) := \mathrm{tr}(H_{M_2}) - 2\frac{\mathrm{vol}(M_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\lambda_{\max}^2/4t},$$

опять ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$. Если $\lambda_{\max}$ такое, что $F(\lambda_{\max}) = 0$, тогда $\lambda_{\max} = \ell_1/2$.

(2) Покажем, что $\mathrm{tr}(H_{M_2})$ определяет двумерную решетку $\{\boldsymbol{\ell}_2, \boldsymbol{\ell}_3\}$. Пусть

$$F_1(\lambda) = \lim_{t\to+0} \frac{1}{e^{-\lambda^2/4t}}\Big((4\pi t)^{3/2}\,\mathrm{tr}(H_{M_2}) - \mathrm{vol}(M_2)\Big(1 + \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-m^2\ell_1^2/4t}\Big) - 2\pi t\ell_1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2\ell_1^2/4t}\Big).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}F_1(\lambda) = \lim_{t\to+0}(\mathrm{vol}(M_2)(&2e^{(\lambda^2-\ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_3^2)/4t} + 4e^{(\lambda^2-(\ell_1^2+\ell_2^2))/4t} \\ &+ 4e^{(\lambda^2-(\ell_1^2+\ell_3^2))/4t} + 2e^{(\lambda^2-(\ell_2^2+\ell_3^2+2\ell_2\ell_3\cos\varphi))/4t} \\ &+ 2e^{(\lambda^2-(\ell_2^2+\ell_3^2-2\ell_2\ell_3\cos\varphi))/4t} + 4e^{(\lambda^2-(\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2+2\ell_2\ell_3\cos\varphi))/4t} + \cdots)),\end{aligned}$$

где φ — угол между $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$, $0 < \varphi < \pi$.

Ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F_1(\lambda_{\max}) < \infty$. Зная $\lambda_{\max}$, переопределим функцию следа

$$\mathrm{tr}(H_{M_2}) := \mathrm{tr}(H_{M_2}) - 2\frac{\mathrm{vol}(M_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\lambda_{\max}^2/4t},$$

опять ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F_1(\lambda) < \infty$. Используя эту процедуру, мы определим, что $\{\lambda \mid F_1(\lambda) = 2\,\mathrm{vol}(M_2)\} = \{|\boldsymbol{\ell}|, \boldsymbol{\ell} \in \Lambda_2\}$, где $\Lambda_2 = \{\boldsymbol{\ell}_2, \boldsymbol{\ell}_3\}$.

Известно [6], что плоская решетка $\Lambda_2 = \{\boldsymbol{\ell}_2, \boldsymbol{\ell}_3\}$ определяется с точностью до изометрии своими кратчайшими длинами линейно независимых векторов и площадью параллелограмма, натянутого на эти векторы. Поскольку площадь S параллелограмма, натянутого на векторы $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$, можно определить как $S = \mathrm{vol}(M_2)/(\ell_1/2)$, то $\mathrm{tr}(H_{M_2})$ определяет двумерную решетку $\Lambda_2 = \{\boldsymbol{\ell}_2, \boldsymbol{\ell}_3\}$. Лемма в случае M_2 доказана.

4.2. Многообразие M_4. Предполагаем, что фундаментальное множество многообразия M_4 натянуто на линейно независимые векторы $\boldsymbol{\ell}_1/4$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ (см. рис. 5). Заметим, что классы изометрий M_4 параметризованы с помощью $\mathrm{vol}(M_4)$ и $\ell_1 = |\boldsymbol{\ell}_1|$ (теорема 3). Покажем, что функция следа $\mathrm{tr}(H_{M_4})$ определяет все эти параметры.

Используя теорему A, покажем, что $\mathrm{tr}(H_{M_4})$ в точности определяет ℓ_1. Пусть

$$F(\lambda) = \lim_{t\to+0} \frac{(4\pi t)^{3/2}\,\mathrm{tr}(H_{M_4}) - \mathrm{vol}(M_4)}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$F(\lambda) = \lim_{t\to+0} \Big(\mathrm{vol}(M_4)(2e^{(\lambda^2-\ell_1^2)/4t} + 4e^{(\lambda^2-\ell^2)/4t} + \cdots) + 2\pi t\ell_1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m+\frac14)^2\ell_1^2)/4t} + \pi t\ell_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(n+\frac12)^2\ell_1^2)/4t}\Big).$$

Ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$.

Если $F(\lambda_{\max}) \neq 0$, то

$$\mathrm{tr}(H_{M_4}) := \mathrm{tr}(H_{M_4}) - 2\frac{\mathrm{vol}(M_4)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\lambda_{\max}^2/4t},$$

опять ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$. Если $F(\lambda_{\max}) = 0$, то определим ℓ_1 по функции $\mathrm{tr}(H_{M_4})$, более того, заметим, что $\lambda_{\max} = \ell_1/4$.

Таким образом, функция следа $\mathrm{tr}(H_{M_4})$ определяет фундаментальное множество M_4 и, следовательно, с точностью до изометрии многообразие M_4. Лемма 3 в случае M_4 доказана.

4.3. Многообразие M_6. Предполагаем, что фундаментальное множество многообразия M_6 натянуто на линейно независимые векторы $\boldsymbol{\ell}_1/2$, $\boldsymbol{\ell}_2/2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ (см. рис. 7). По теореме 1 в случае M_6 заметим, что $\boldsymbol{\ell}_i$, $i = 1, 2, 3$, попарно ортогональны, и пусть $\boldsymbol{\ell}_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\ell}_2 = (0, \ell_2, 0)$, $\boldsymbol{\ell}_3 = (0, 0, \ell_3)$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Фундаментальное множество 3-мерного плоского тора M_1, накрывающего многообразие M_6, натянуто на векторы $\boldsymbol{\ell}_1$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ (см. рис. 7) и классы изометрий M_6 параметризованы неупорядоченными тройками $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$ (теорема 3). Теперь мы найдем все эти параметры по функции следа $\mathrm{tr}(H_{M_6})$.

Используя теорему A, покажем, что $\mathrm{tr}(H_{M_6})$ определяет ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3. Пусть

$$F(\lambda) = \lim_{t\to+0} \frac{(4\pi t)^{3/2}\,\mathrm{tr}(H_{M_6}) - \mathrm{vol}(M_6)}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$F(\lambda) = \lim_{t\to+0} \Big(\mathrm{vol}(M_6)(2e^{(\lambda^2-\ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_3^2)/4t} + \cdots) + \pi t\Big(\ell_1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m+\frac12)^2\ell_1^2)/4t} + \ell_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(n+\frac12)^2\ell_2^2)/4t} + \ell_3 \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(k+\frac12)^2\ell_3^2)/4t}\Big)\Big).$$

Ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$.

Если $F(\lambda_{\max}) \neq 0$, то

$$\operatorname{tr}(H_{M_6}) := \operatorname{tr}(H_{M_6}) - 2\frac{\operatorname{vol}(M_6)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\lambda_{\max}^2/4t},$$

опять ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$.

Если $F(\lambda_{\max}) = 0$, то $\lambda_{\max} = \min\{\ell_1/2, \ell_2/2, \ell_3/2\}$. Напомним, что мы ищем ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 в любом порядке (см. теорему 3). Зная $\lambda_{\max}$, переопределим функцию следа

$$\operatorname{tr}(H_{M_6}) := \operatorname{tr}(H_{M_6}) - \frac{1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2 4\lambda_{\max}^2/4t}$$

и затем, применяя эту процедуру, определяем второе наименьшее значение из множества $\{\ell_1/2, \ell_2/2, \ell_3/2\}$ и т. д. Таким образом, мы определим неупорядоченную тройку $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$.

Итак, функция следа $\operatorname{tr}(H_{M_6})$ определяет фундаментальное множество M_6 и тем самым с точностью до изометрии многообразие M_6. Лемма 3 в случае M_6 доказана.

4.4. Многообразие $\boldsymbol{N_2}$. Предполагаем, что фундаментальное множество многообразия N_2 натянуто на линейно независимые векторы $\boldsymbol{\ell}_1/2$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ (см. рис. 9). По теореме 2 в случае N_2 заметим, что ортогональная проекция $\boldsymbol{\ell}_3$ на плоскость $(\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2)$ равна $(\boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2)/2$. Пусть

$$\boldsymbol{\ell}_1 = (\ell_1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\ell}_2 = (\ell_2\cos\varphi, \ell_2\sin\varphi, 0), \quad \boldsymbol{\ell}_3 = \left(\frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2\cos\varphi), \frac{1}{2}\ell_2\sin\varphi, h\right)$$

в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, где φ — угол между $\boldsymbol{\ell}_1$ и $\boldsymbol{\ell}_2$, $0 < \varphi < \pi$, h — проекция вектора $\boldsymbol{\ell}_3$ на $\boldsymbol{e}_3$.

Заметим, что фундаментальное множество 3-мерного плоского тора M_1, накрывающего многообразие N_2, натянуто на векторы $\boldsymbol{\ell}_1$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ (см. рис. 9) и классы изометрий N_2 параметризованы с помощью h и двумерной решетки $\{\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2\}$, порожденной векторами $\boldsymbol{\ell}_1$ и $\boldsymbol{\ell}_2$ (теорема 3).

Теперь найдем, как и в предыдущих случаях, все эти параметры по функции следа $\operatorname{tr}(H_{N_2})$. Покажем, что $\operatorname{tr}(H_{N_2})$ определяет $h = 2\operatorname{vol}(N_2)/S$, где $S = \ell_1\ell_2\sin\varphi$, и решетку $\{\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2\}$.

Определим $S = \ell_1\ell_2\sin\varphi$ — площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\boldsymbol{\ell}_1$ и $\boldsymbol{\ell}_2$, следовательно, $h = 2\operatorname{vol}(N_2)/S$. Затем определим двумерную решетку $\{\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2\}$.

1. Определим $S = \ell_1\ell_2\sin\varphi$ с помощью следующего предела:

$$F(\lambda) = \lim_{t\to+0} \frac{(4\pi t)^{3/2}\operatorname{tr}(H_{N_2}) - \operatorname{vol}(N_2)}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(\lambda) = \lim_{t\to+0} \Big(&\operatorname{vol}(N_2)(2e^{(\lambda^2-\ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_3^2)/4t} + \cdots) \\ &+ \frac{\sqrt{\pi t}\ell_1\ell_2\sin\varphi}{2} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-((\ell_1(m+\frac{1}{2})+n\ell_2\cos\varphi)^2+(n\ell_2\sin\varphi)^2))/4t} \\ &+ \frac{\sqrt{\pi t}\ell_1\ell_2\sin\varphi}{2} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-((\ell_1 m+(n+\frac{1}{2})\ell_2\cos\varphi)^2+((n+\frac{1}{2})\ell_2\sin\varphi)^2))/4t}\Big). \end{aligned}$$

Ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$.

Если $F(\lambda_{\max}) \neq 0$, то

$$\operatorname{tr}(H_{N_2}) := \operatorname{tr}(H_{N_2}) - 2\frac{\operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\lambda_{\max}^2/4t},$$

опять ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$.

Если $F(\lambda_{\max}) = 0$, то зафиксируем это значение как λ_0. Определим $S = \ell_1\ell_2 \sin\varphi$, учитывая, что

$$2\lim_{t\to+0} \frac{(4\pi t)^{3/2} \operatorname{tr}(H_{N_2})|_{\lambda=\lambda_0} - \operatorname{vol}(N_2)}{\sqrt{\pi t}e^{-\lambda_0^2/4t}} = S.$$

Следовательно, $h = 2\operatorname{vol}(N_2)/S$.

2. Определим двумерную решетку $\{\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2\}$, порожденную векторами $\boldsymbol{\ell}_1$ и $\boldsymbol{\ell}_2$. Используя теорему 2 в случае N_2, заметим, что $\boldsymbol{\ell}_3 = \boldsymbol{h} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2)$, где $\boldsymbol{h}$ ортогонален к $\boldsymbol{\ell}_1$ и $\boldsymbol{\ell}_2$, $\boldsymbol{h} = (0,0,h)$. Следовательно,

$$S_1 = \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} = \sum_{m,k,n\in\mathbb{Z}} e^{-|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2+n\boldsymbol{\ell}_3|^2/4t}$$
$$= \sum_{m,k,n\in\mathbb{Z}} e^{-|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2+\frac{n}{2}(\boldsymbol{\ell}_1+\boldsymbol{\ell}_2)+n\boldsymbol{h}|^2/4t} = \sum_{m,k,n\in\mathbb{Z}} e^{-(|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2+\frac{n}{2}(\boldsymbol{\ell}_1+\boldsymbol{\ell}_2)|^2+n^2h^2)/4t}.$$

Запишем S_1 как две суммы S_{11} и S_{12}, соответствующие $n = 2j$ и $n = 2j+1$:

$$S_{11} = \sum_{m,k,n\in\mathbb{Z}} e^{-(|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2+\frac{n}{2}(\boldsymbol{\ell}_1+\boldsymbol{\ell}_2)|^2+n^2h^2)/4t}\big|_{n=2j}$$
$$= \sum_{m,k,j\in\mathbb{Z}} e^{-(|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2+\frac{2j}{2}(\boldsymbol{\ell}_1+\boldsymbol{\ell}_2)|^2+(2j)^2h^2)/4t}$$
$$= \sum_{m,k,j\in\mathbb{Z}} e^{-(|(k+j)\boldsymbol{\ell}_1+(m+j)\boldsymbol{\ell}_2|^2+(2j)^2h^2)/4t}$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-j^2h^2/t}\Big(\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{-|(k+j)\boldsymbol{\ell}_1+(m+j)\boldsymbol{\ell}_2|^2/4t}\Big)$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-j^2h^2/t}\Big(\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{-|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2|^2/4t}\Big)$$
$$= \sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{-|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2|^2/4t} + 2\sum_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2h^2/t}\Big(\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{-|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2|^2/4t}\Big),$$

$$S_{12} = \sum_{m,k,n\in\mathbb{Z}} e^{-(|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2+\frac{n}{2}(\boldsymbol{\ell}_1+\boldsymbol{\ell}_2)|^2+n^2h^2)/4t}\big|_{n=2j+1}$$
$$= \sum_{m,k,j\in\mathbb{Z}} e^{-(|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2+\frac{2j+1}{2}(\boldsymbol{\ell}_1+\boldsymbol{\ell}_2)|^2+(2j+1)^2h^2)/4t}$$
$$= \sum_{m,k,j\in\mathbb{Z}} e^{-(|(k+j)\boldsymbol{\ell}_1+(m+j)\boldsymbol{\ell}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\ell}_1+\boldsymbol{\ell}_2)|^2+(2j+1)^2h^2)/4t}$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-(2j+1)^2h^2/4t}\Big(\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{-|(k+j)\boldsymbol{\ell}_1+(m+j)\boldsymbol{\ell}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\ell}_1+\boldsymbol{\ell}_2)|^2/4t}\Big)$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-(2j+1)^2h^2/t}\Big(\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{-|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\ell}_1+\boldsymbol{\ell}_2)|^2/4t}\Big)$$

$$= 2\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(2j+1)^2h^2/t}\Big(\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{-|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\ell}_1+\boldsymbol{\ell}_2)|^2/4t}\Big).$$

Таким образом,

$$\operatorname{tr}(H_{N_2}) = \frac{\operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}}\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{-|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2|^2/4t}$$

$$+ \frac{2\operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}}\sum_{j=1}^{+\infty} e^{-j^2h^2/t}\Big(\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{-|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2|^2/4t}\Big)$$

$$+ \frac{2\operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}}\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(2j+1)^2h^2/t}\Big(\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{-|k\boldsymbol{\ell}_1+m\boldsymbol{\ell}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\ell}_1+\boldsymbol{\ell}_2)|^2/4t}\Big)$$

$$+ \frac{\ell_1\ell_2\sin\varphi}{8\sqrt{\pi t}}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{-((\ell_1(m+\frac{1}{2})+n\ell_2\cos\varphi)^2+(n\ell_2\sin\varphi)^2)/4t}$$

$$+ \frac{\ell_1\ell_2\sin\varphi}{8\sqrt{\pi t}}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{-((\ell_1 m+(n+\frac{1}{2})\ell_2\cos\varphi)^2+((n+\frac{1}{2})\ell_2\sin\varphi)^2)/4t}.$$

Для того чтобы определить решетку $\{\boldsymbol{\ell}_1,\boldsymbol{\ell}_2\}$, рассмотрим предел

$$F(\lambda) = \lim_{t\to+0}\frac{(4\pi t)^{3/2}\operatorname{tr}^*(H_{N_2})}{e^{-\lambda^2/4t}},$$

где

$$\operatorname{tr}^*(H_{N_2}) = \operatorname{tr}(H_{N_2}) - \frac{\operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} - \frac{2\operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}}\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2h^2/t}.$$

Ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$.

Рассмотрим случай $F(\lambda_{\max}) \neq 0$. Если

$$F(\lambda_{\max}) = \frac{2\operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}}\sum_{j=0}^{\infty} e^{-(2j+1)^2h^2/t},$$

то $\lambda_{\max} = \min\limits_{m,n\in\mathbb{Z}}\{m\boldsymbol{\ell}_1+n\boldsymbol{\ell}_2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\ell}_1+\boldsymbol{\ell}_2)\}$, в противном случае $\lambda_{\max} = \min\limits_{m,n\in\mathbb{Z}}\{m\boldsymbol{\ell}_1+n\boldsymbol{\ell}_2\}$. Зная $\lambda_{\max}$, переопределим функцию следа $\operatorname{tr}(H_{N_2})$: в первом случае

$$\operatorname{tr}^*(H_{N_2}) := \operatorname{tr}^*(H_{N_2}) - \frac{2\operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}}\sum_{j=0}^{\infty} e^{-(2j+1)^2h^2/t}e^{-\lambda_{\max}^2/4t},$$

во втором случае

$$\operatorname{tr}^*(H_{N_2}) := \operatorname{tr}^*(H_{N_2}) - \frac{\operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}}e^{-\lambda_{\max}^2/4t} + \frac{2\operatorname{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}}\sum_{j=1}^{\infty} e^{-j^2h^2/t}e^{-\lambda_{\max}^2/4t},$$

затем определяем следующее значение $\lambda_{\max}$.

Если $F(\lambda_{\max}) = 0$, то переопределим функцию следа

$$\operatorname{tr}^*(H_{N_2}) := \operatorname{tr}^*(H_{N_2}) - \frac{\ell_1\ell_2\sin\varphi}{8\sqrt{\pi t}}\sum_{m,n,k\in\mathbb{Z}} e^{-\lambda_{\max}^2/4t},$$

затем определяем следующее значение $\lambda_{\max}$.

Таким образом, мы определим двумерную решетку $\{\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2\} = \{m\boldsymbol{\ell}_1 + n\boldsymbol{\ell}_2, m, n \in \mathbb{Z}\}$. Для завершения доказательства леммы 3 в случае N_2 заметим, что решетка $\{\boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2\}$ в $\mathbb{R}^2$ определяется с точностью до изометрии кратчайшими длинами своих линейно независимых векторов и площадью параллелограмма, натянутого на них. Поскольку все эти параметры определяются по функции $\operatorname{tr}(H_{N_2})$, лемма 3 в случае N_2 доказана.

4.5. Многообразие $\boldsymbol{N_3}$. Предполагаем, что фундаментальное множество многообразия N_3 натянуто на линейно независимые векторы $\boldsymbol{\ell}_1/2$, $\boldsymbol{\ell}_2/2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ (см. рис. 10). Из теоремы 2 в случае N_3 следует, что $\boldsymbol{\ell}_1$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ попарно ортогональны. Пусть $\boldsymbol{\ell}_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\ell}_2 = (0, \ell_2, 0)$ и $\boldsymbol{\ell}_3 = (0, 0, \ell_3)$ в ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Заметим, что классы изометрий N_3 параметризованы с помощью $\operatorname{vol}(N_3)$, ℓ_1, ℓ_2 или ℓ_3 (теорема 3).

Теперь мы покажем, как и в предыдущих случаях, что все эти параметры определяются по функции следа $\operatorname{tr}(H_{N_3})$, а именно покажем, что $\operatorname{tr}(H_{N_3})$ определяет ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3.

1. Пусть
$$F(\lambda) = \lim_{t\to+0} \frac{(4\pi t)^{3/2}\operatorname{tr}(H_{N_3}) - \operatorname{vol}(N_3)}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда
$$\begin{aligned}F(\lambda) = \lim_{t\to+0}\Big(&\operatorname{vol}(N_3)(2e^{(\lambda^2-\ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_3^2)/4t} + \cdots) \\ &+ \ell_1\pi t\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m+\frac12)^2\ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1\ell_2\sqrt{\pi t}}{2}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m^2\ell_1^2+(n+\frac12)^2\ell_2^2))/4t} \\ &+ \frac{\ell_1\ell_3\sqrt{\pi t}}{2}\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-((m+\frac12)^2\ell_1^2+k^2\ell_3^2))/4t}\Big).\end{aligned}$$

Ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$. Имеем два случая: (i) $F(\lambda_{\max}) \neq 0$ и (ii) $F(\lambda_{\max}) = 0$.

Рассмотрим случай (i). В этом случае $\lambda_{\max} = \ell_3$. Следовательно, $\ell_1\ell_2 = 4\operatorname{vol}(N_3)/\ell_3$. Пусть
$$F_1(\lambda) = \lim_{t\to+0} \frac{\pi t\operatorname{tr}(H_{N_3}) - \frac{\operatorname{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}}\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} e^{-m^2\ell_3^2/4t}}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда
$$\begin{aligned}F_1(\lambda) = \lim_{t\to+0}\Big(&\frac{\operatorname{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}}(2e^{(\lambda^2-\ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_2^2)/4t} + 4e^{(\lambda^2-(\ell_1^2+\ell_3^2))/4t} + \cdots) \\ &+ \frac{\ell_1\sqrt{\pi t}}{8}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m+\frac12)^2\ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1\ell_2}{16}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m^2\ell_1^2+(n+\frac12)^2\ell_2^2))/4t} \\ &+ \frac{\ell_1\ell_3}{16}\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-((m+\frac12)^2\ell_1^2+k^2\ell_3^2))/4t}\Big).\end{aligned}$$

Ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F_1(\lambda) < \infty$. Заметим, что $\lambda_{\max} = \min\{\ell_1/2, \ell_2/2\}$. Если $F_1(\lambda_{\max}) = \frac{\ell_1\ell_2}{16}$, то $\lambda_{\max} = \ell_2/2$, иначе

$\lambda_{\max} = \ell_1/2$. Таким образом, в случае (i) функция следа $\operatorname{tr}(H_{N_3})$ определяет все параметры фундаментального множества многообразия N_3.

Рассмотрим случай (ii). В этом случае $\lambda_{\max} = \min\{\ell_1/2, \ell_2/2\}$. Пусть

$$F(\lambda) = \lim_{t\to+0} \frac{\pi t \operatorname{tr}(H_{N_3}) - \frac{\operatorname{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}}}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(\lambda) = \lim_{t\to+0}\biggl(&\frac{\operatorname{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}}(2e^{(\lambda^2-\ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_3^2)/4t} + \cdots) \\ &+ \frac{\ell_1\sqrt{\pi t}}{8}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m+\frac12)^2\ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1\ell_2}{16}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m^2\ell_1^2+(n+\frac12)^2\ell_2^2))/4t} \\ &+ \frac{\ell_1\ell_3}{16}\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-((m+\frac12)^2\ell_1^2+k^2\ell_3^2))/4t}\biggr). \end{aligned}$$

Ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$. Зафиксируем значения $\lambda_{\max}$ как λ_0 и $F(\lambda_{\max})$ как f_0. Имеем два случая: 1) $\lambda_0 = \ell_1/2$ и $f_0 = \frac{\ell_1\ell_3}{16}$; 2) $\lambda_0 = \ell_2/2$ и $f_0 = \frac{\ell_1\ell_2}{16}$. Пусть

$$F_1(\lambda) = \lim_{t\to+0} \frac{(4\pi t)^{3/2}\operatorname{tr}(H_{N_3}) - \operatorname{vol}(N_3) - A}{e^{-\lambda^2/4t}},$$

где

$$A = f_0 \sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{-(m^2B^2+(2\lambda)^2(k+\frac12)^2)/4t}, \quad B = \frac{16 f_0}{2\lambda}.$$

В случае 1 имеем

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) = \lim_{t\to+0}\biggl(&\operatorname{vol}(N_3)(2e^{(\lambda^2-\ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_3^2)/4t} + \cdots) \\ &+ \ell_1\pi t\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m+\frac12)^2\ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1\ell_2\sqrt{\pi t}}{2}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m^2\ell_1^2+(n+\frac12)^2\ell_2^2))/4t}\biggr), \end{aligned}$$

в случае 2 —

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) = \lim_{t\to+0}\biggl(&\operatorname{vol}(N_3)(2e^{(\lambda^2-\ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_3^2)/4t} + \cdots) \\ &+ \ell_1\pi t\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m+\frac12)^2\ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1\ell_3\sqrt{\pi t}}{2}\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-((m+\frac12)^2\ell_1^2+k^2\ell_3^2))/4t}\biggr). \end{aligned}$$

Ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F_1(\lambda) < \infty$. Если $F_1(\lambda_{\max}) \neq 0$, то

$$\operatorname{tr}(H_{N_3}) := \operatorname{tr}(H_{N_3}) - \frac{2\operatorname{vol}(N_3)}{(4\pi t)^{3/2}}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2\lambda_{\max}^2/4t},$$

опять ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F_1(\lambda) < \infty$. Если $F_1(\lambda_{\max}) = 0$, то рассмотрим

$$F_2(\lambda) = \lim_{t\to+0} \frac{\pi t \operatorname{tr}(H_{N_3}) - \frac{\operatorname{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}}}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Следовательно, в случае 1 имеем

$$F_2(\lambda) = \lim_{t\to+0}\biggl(\frac{\mathrm{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}}(2e^{(\lambda^2-\ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_3^2)/4t} + \cdots) + \frac{\ell_1\sqrt{\pi t}}{8}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m+\frac12)^2\ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1\ell_2}{16}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m^2\ell_1^2+(n+\frac12)^2\ell_2^2))/4t}\biggr),$$

в случае 2 —

$$F_2(\lambda) = \lim_{t\to+0}\biggl(\frac{\mathrm{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}}(2e^{(\lambda^2-\ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_3^2)/4t} + \cdots) + \frac{\ell_1\sqrt{\pi t}}{8}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m+\frac12)^2\ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1\ell_3}{16}\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-((m+\frac12)^2\ell_1^2+k^2\ell_3^2))/4t}\biggr).$$

Ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F_2(\lambda) < \infty$. Заметим, что $\lambda_{\max} = \ell_1/2$. Здесь мы воспользовались тем, что в первом случае $\ell_1 = \min\{\ell_1, \ell_2\}$, во втором $\ell_2 = \min\{\ell_1, \ell_2\}$.

Теперь опять рассмотрим

$$F(\lambda) = \lim_{t\to+0}\frac{\pi t\,\mathrm{tr}(H_{N_3}) - \frac{\mathrm{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}}}{e^{-\lambda^2/4t}}.$$

Тогда

$$F(\lambda) = \lim_{t\to+0}\biggl(\frac{\mathrm{vol}(N_3)}{8\sqrt{\pi t}}(2e^{(\lambda^2-\ell_1^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_2^2)/4t} + 2e^{(\lambda^2-\ell_3^2)/4t} + \cdots) + \frac{\ell_1\sqrt{\pi t}}{8}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m+\frac12)^2\ell_1^2)/4t} + \frac{\ell_1\ell_2}{16}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-(m^2\ell_1^2+(n+\frac12)^2\ell_2^2))/4t} + \frac{\ell_1\ell_3}{16}\sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{(\lambda^2-((m+\frac12)^2\ell_1^2+k^2\ell_3^2))/4t}\biggr).$$

Ищем $\lambda_{\max}$ — наибольшее положительное значение λ такое, что $F(\lambda) < \infty$. Заметим, что $\lambda_{\max} = \min\{\ell_1/2, \ell_2/2\}$. Поскольку мы знаем значение ℓ_1, если $\lambda_{\max} = \ell_1/2$, то $\ell_3 = \frac{16F(\lambda_{\max})}{\ell_1}$, если $\lambda_{\max} \neq \ell_1/2$, то $\lambda_{\max} = \ell_2/2$.

Таким образом, в случае (ii) функция следа $\mathrm{tr}(H_{N_3})$ определяет все параметры фундаментального множества многообразия N_3. Лемма 3 в случае многообразия N_3 доказана.

Замечание. Доказательство леммы 3 в случаях M_3, M_5, N_1 и N_4 аналогично доказательствам в случаях M_2, M_4, N_2 и N_3 соответственно.

Лемма 3 доказана.

Для завершения доказательства теоремы Б заметим, что функции следа изоспектральных компактных римановых многообразий совпадают (предложение 3) и функция следа $\mathrm{tr}(H_M)$ определяет все параметры фундаментального множества соответствующего многообразию M, следовательно, определяет с точностью до изометрии многообразие M (лемма 3).

Теорема Б доказана.

§ 5. Доказательство теоремы B

Для доказательства теоремы B достаточно проверить совпадение функций следа $\mathrm{tr}(H_{M_4})$ и $\mathrm{tr}(H_{M_6})$ при некоторых значениях параметров многообразий M_4 и M_6 в силу того, что спектр многообразия M в точности определяется по функции следа $\mathrm{tr}(H_M)$ (предложение 4).

Используя теорему A в случае M_4 и M_6, имеем

$$\mathrm{tr}(H_{M_4}) = \frac{\mathrm{vol}(M_4)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} + \frac{\ell_1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{4})^2\ell_1^2/4t} + \frac{\ell_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{2})^2\ell_1^2/4t}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(H_{M_6}) = \frac{\mathrm{vol}(M_6)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{b}\in\Lambda_1} e^{-|\boldsymbol{b}|^2/4t} + \frac{b_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2 b_1^2/4t} \\ + \frac{b_2}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{2})^2 b_2^2/4t} + \frac{b_3}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-(k+\frac{1}{2})^2 b_3^2/4t}.\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\Lambda = \{\boldsymbol{\ell} = m_1\boldsymbol{\ell}_1 + m_2\boldsymbol{\ell}_2 + m_3\boldsymbol{\ell}_3,\ m_i \in \mathbb{Z},\ \boldsymbol{\ell}_i \in \mathbb{R}^3,\ i = 1,2,3\}$ — решетка тора, 4-листно накрывающего многообразие M_4, где попарно ортогональные векторы $\boldsymbol{\ell}_1/4$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ образуют фундаментальное множество многообразия M_4, $\boldsymbol{\ell}_1 = (\ell_1, 0, 0)$. Аналогично $\Lambda_1 = \{\boldsymbol{b} = m_1\boldsymbol{b}_1 + m_2\boldsymbol{b}_2 + m_3\boldsymbol{b}_3,\ m_i \in \mathbb{Z},\ \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^3,\ i = 1,2,3\}$ — решетка тора, 2-листно накрывающего многообразие M_2, которое, в свою очередь, 2-листно накрывает многообразие M_6. Векторы $\boldsymbol{b}_1/2$, $\boldsymbol{b}_2/2$ и $\boldsymbol{b}_3$ образуют фундаментальное множество многообразия M_6, $\boldsymbol{b}_1 = (b_1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, b_2, 0)$ и $\boldsymbol{b}_3 = (0, 0, b_3)$.

Заметим, что при $b_2 = \ell_1$ суммы

$$\frac{\ell_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{2})^2\ell_1^2/4t} \quad \text{и} \quad \frac{b_2}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{2})^2 b_2^2/4t} \tag{5}$$

совпадут.

Также заметим, что

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{4})^2\ell_1^2/4t} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(2m+\frac{1}{2})^2(\ell_1/2)^2/4t} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(-2m+\frac{1}{2})^2(\ell_1/2)^2/4t} \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(2m-\frac{1}{2})^2(\ell_1/2)^2/4t} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-((2m-1)+\frac{1}{2})^2(\ell_1/2)^2/4t} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-(k+\frac{1}{2})^2(\ell_1/2)^2/4t}.\end{aligned} \tag{6}$$

Теперь нетрудно получить, что при $b_1 = b_3 = \ell_1/2$ имеет место равенство

$$\frac{\ell_1/2}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-(k+\frac{1}{2})^2(\ell_1/2)^2/4t} = \frac{b_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2 b_1^2/4t} + \frac{b_3}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-(k+\frac{1}{2})^2 b_3^2/4t}. \tag{7}$$

Остается проверить совпадение следующих сумм:

$$\frac{\mathrm{vol}(M_4)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} \quad \text{и} \quad \frac{\mathrm{vol}(M_6)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{b}\in\Lambda_1} e^{-|\boldsymbol{b}|^2/4t}. \tag{8}$$

В силу необходимого равенства объемов многообразий M_4 и M_6 имеем $b_1 = \ell$, где $\ell = |\boldsymbol{\ell}_2| = |\boldsymbol{\ell}_3|$ (теорема 1 в случае M_4). Здесь мы воспользовались тем, что $\mathrm{vol}(M_4) = \ell_1\ell^2/4$, $\mathrm{vol}(M_6) = b_1b_2b_3/4$. Следовательно, получим $\ell_1 = 2\ell$. В силу этого соотношения решетки Λ и Λ_1 совпадают.

Однопараметрическое семейство пар изоспектральных, но негомеоморфных компактных плоских 3-многообразий, которое состоит из многообразий M_4 и M_6, построено. Здесь фундаментальное множество многообразия M_4 образовано векторами $\boldsymbol{\ell}_1/4$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$, где $|\boldsymbol{\ell}_1/4| = \ell/2$, $|\boldsymbol{\ell}_2| = |\boldsymbol{\ell}_3| = \ell$, а фундаментальное множество многообразия M_6 образовано векторами $\boldsymbol{b}_1/2$, $\boldsymbol{b}_2/2$ и $\boldsymbol{b}_3$, где $|\boldsymbol{b}_1/2| = \ell/2$, $|\boldsymbol{b}_2/2| = |\boldsymbol{b}_3| = \ell$.

Используя явный вид функций следа $\mathrm{tr}(H_M)$ компактных плоских 3-многообразий M (теорема A), нетрудно понять, что других примеров не существует. Действительно, достаточно заметить, что функции следа неориентируемых многообразий содержат слагаемые с коэффициентом $\frac{1}{t}$, в отличие от функций следа ориентируемых многообразий, наибольшая степень по t которых есть $\frac{1}{\sqrt{t}}$, а необходимое равенство объемов многообразий и решеток накрывающих торов дают нам дополнительные условия.

Теорема B доказана.

§ 6. Приложение. Функции следа компактных плоских 3-многообразий

Многообразие M_1.

Функция следа:

$$F_1 = \frac{\mathrm{vol}(M_1)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t};$$

Λ — решетка для плоского тора $M_1 = \mathbb{R}^3/\Lambda$.

Многообразие M_2.

Функция следа:

$$F_2 = \frac{\mathrm{vol}(M_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} + \frac{\ell_1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2\ell_1^2/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1, двулистно накрывающего многообразие M_2. Здесь векторы $\boldsymbol{\ell}_1/2$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ образуют фундаментальное множество многообразия M_2, $\boldsymbol{\ell}_1 = (\ell_1, 0, 0)$.

Многообразие M_3 .

Функция следа:

$$F_3 = \frac{\mathrm{vol}(M_3)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} + \frac{\ell_1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{3})^2\ell_1^2/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1, 3-листно накрывающего многообразие M_3. Здесь векторы $\boldsymbol{\ell}_1/3$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ образуют фундаментальное множество многообразия M_3, $\boldsymbol{\ell}_1 = (\ell_1, 0, 0)$.

Многообразие M_4.

Функция следа:

$$F_4 = \frac{\mathrm{vol}(M_4)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} + \frac{\ell_1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{4})^2\ell_1^2/4t} + \frac{\ell_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{2})^2\ell_1^2/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1, 4-листно накрывающего многообразие M_4. Здесь векторы $\boldsymbol{\ell}_1/4$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ образуют фундаментальное множество многообразия M_4, $\boldsymbol{\ell}_1 = (\ell_1, 0, 0)$.

Многообразие M_5.

Функция следа:

$$F_5 = \frac{\mathrm{vol}(M_5)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} + \frac{\ell_1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{6})^2\ell_1^2/4t} + \frac{\ell_1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{3})^2\ell_1^2/4t} + \frac{\ell_1}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-(k+\frac{1}{2})^2\ell_1^2/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1, 6-листно накрывающего многообразие M_5. Здесь векторы $\boldsymbol{\ell}_1/6$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ образуют фундаментальное множество многообразия M_5, $\boldsymbol{\ell}_1 = (\ell_1, 0, 0)$.

Многообразие M_6.

Функция следа:

$$F_6 = \frac{\mathrm{vol}(M_6)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} + \frac{\ell_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-(m+\frac{1}{2})^2\ell_1^2/4t} + \frac{\ell_2}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(n+\frac{1}{2})^2\ell_2^2/4t} + \frac{\ell_3}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-(k+\frac{1}{2})^2\ell_3^2/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1, 2-листно накрывающего многообразие M_2, которое, в свою очередь, 2-листно накрывает многообразие M_6. Здесь векторы $\boldsymbol{\ell}_1/2$, $\boldsymbol{\ell}_2/2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ образуют фундаментальное множество многообразия M_6, $\boldsymbol{\ell}_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\ell}_2 = (0, \ell_2, 0)$ и $\boldsymbol{\ell}_3 = (0, 0, \ell_3)$.

Многообразие N_1.

Функция следа:

$$P_1 = \frac{\mathrm{vol}(N_1)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} + \frac{\ell_1\ell_2\sin\varphi}{8\pi t} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{-[(\ell_1(m+\frac{1}{2})+\ell_2 n\cos\varphi)^2+(n\ell_2\sin\varphi)^2]/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1, 2-листно накрывающего многообразие N_1. Здесь векторы $\boldsymbol{\ell}_1/2$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ образуют фундаментальное множество многообразия N_1, $\boldsymbol{\ell}_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\ell}_2 = (\ell_2\cos\varphi, \ell_2\sin\varphi, 0)$ и $\boldsymbol{\ell}_3 = (0, 0, \ell_3)$, где φ — угол между $\boldsymbol{\ell}_1$ и $\boldsymbol{\ell}_2$, $0 < \varphi < \pi$.

Многообразие N_2.

Функция следа:

$$P_2 = \frac{\mathrm{vol}(N_2)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} + \frac{\ell_1\ell_2\sin\varphi}{16\pi t} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{-[(\ell_1(m+\frac{1}{2})+n\ell_2\cos\varphi)^2+(n\ell_2\sin\varphi)^2/4t]} + \frac{\ell_1\ell_2\sin\varphi}{16\pi t} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{-[\ell_1 m+(n+\frac{1}{2})\ell_2\cos\varphi)^2+((n+\frac{1}{2})\ell_2\sin\varphi)^2/4t]}$$

где Λ — решетка для плоского тора M_1, 2-листно накрывающего многообразие N_2. Здесь векторы $\boldsymbol{\ell}_1/2$, $\boldsymbol{\ell}_2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ образуют фундаментальное множество многообразия N_2, $\boldsymbol{\ell}_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\ell}_2 = (\ell_2\cos\varphi, \ell_2\sin\varphi, 0)$, $\boldsymbol{\ell}_3 = (\frac{1}{2}(\ell_1+\ell_2\cos\varphi), \frac{1}{2}\ell_2\sin\varphi, h)$, где φ — угол между $\boldsymbol{\ell}_1$ и $\boldsymbol{\ell}_2$, $0 < \varphi < \pi$, h — проекция вектора $\boldsymbol{\ell}_3$ на $\boldsymbol{e}_3$.

Многообразие N_3.

Функция следа:

$$P_3 = \frac{\mathrm{vol}(N_3)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} + \frac{\ell_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-[(m+\frac{1}{2})^2\ell_1^2]/4t} + \frac{\ell_1\ell_2}{16\pi t} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{-[\ell_1^2 m^2+\ell_2^2(n+\frac{1}{2})^2]/4t} + \frac{\ell_1\ell_3}{16\pi t} \sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{-[\ell_1^2(m+\frac{1}{2})^2+\ell_3^2 k^2]/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1, 2-листно накрывающего многообразие M_2, которое, в свою очередь, 2-листно накрывает многообразие N_3. Здесь векторы $\boldsymbol{\ell}_1/2$, $\boldsymbol{\ell}_2/2$ и $\boldsymbol{\ell}_3$ образуют фундаментальное множество многообразия N_3, $\boldsymbol{\ell}_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\ell}_2 = (0, \ell_2, 0)$ и $\boldsymbol{\ell}_3 = (0, 0, \ell_3)$.

Многообразие N_4.

Функция следа:

$$P_4 = \frac{\mathrm{vol}(N_4)}{(4\pi t)^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in\Lambda} e^{-|\boldsymbol{\ell}|^2/4t} + \frac{\ell_1}{8\sqrt{\pi t}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-[(m+\frac{1}{2})^2\ell_1^2]/4t} + \frac{\ell_1\ell_2}{16\pi t} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{-[\ell_1^2 m^2+\ell_2^2(n+\frac{1}{2})^2]/4t} + \frac{\ell_1\ell_3}{16\pi t} \sum_{m,k\in\mathbb{Z}} e^{-[\ell_1^2(m+\frac{1}{2})^2+\ell_3^2(k+\frac{1}{2})^2]/4t},$$

Λ — решетка для плоского тора M_1, 2-листно накрывающего многообразие M_2, которое, в свою очередь, 2-листно накрывает многообразие N_4. Здесь векторы $\boldsymbol{\ell}_1/2$, $\boldsymbol{\ell}_2/2$ и $\boldsymbol{\ell}_3/2$ образуют фундаментальное множество многообразия N_4, $\boldsymbol{\ell}_1 = (\ell_1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\ell}_2 = (0, \ell_2, 0)$ и $\boldsymbol{\ell}_3 = (0, 0, \ell_3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kac M.* Can one hear the shape of a drum? // Amer. Math. Monthly. 1966. V. 73. P. 1–23.
2. *Conway J. H.* The sensual (quadratic) form. Washington DC: The Mathematical Association of America, 1997. (The Carus Mathematical Monographs; 26).
3. *Milnor J.* Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1964. V. 51. P. 542.
4. *McKean H. P.* Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann surface // Comm. Pure Appl. Math. 1972. V. 25. P. 225–246.
5. *Sunada T.* Riemannian coverings and isospectral manifolds // Ann. of Math. (2). 1985. V. 121. P. 169–186.
6. *Brooks R.* Constructing isospectral manifolds // Amer. Math. Monthly. 1988. V. 95. P. 823–839.
7. *Berger M., Gauduchon P., Mazet E.* Le Spectre d'une Variété Riemannienne,. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Springer Lecture Notes; 194).
8. *Schiemann A.* Ein Beispiel positiv definiter quadratischer Formen der Dimension 4 mit gleichen Darstellungszahlen // Arch. Math. 1990. V. 54. P. 372–375.
9. *Conway J. H., Sloane N. J. A.* Four-dimensional lattices with the same theta series // International Mathematics Research Notices. 1992. V. 4. P. 93–96.
10. *Schiemann A.* Ternary positive definite quadratic forms are determined by their theta series // Math. Ann. 1997. V. 308. P. 507–517.
11. *Исангулов Р. Р.* Изоспектральные плоские бутылки Клейна // Мат. заметки ЯГУ. 2000. Т. 7, № 2. С. 39–48.
12. *Buser P.* Geometry and spectra of compact Riemann surfaces. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1992. (Progress in Mathematics; 106).
13. *Wolf J.* Spaces of constant curvature. New York; St. Louis; San Francisco; Toronto; London; Sidney: McGraw-Hill, 1967.
14. *Conway J. H., Rossetti J. P.* Describing the platycosms. (Preprint / arXiv:math.DG/0311476 v1 26 Nov 2003).

15. *Rossetti J. P., Conway J. H.* Hearing the platycosms. (Preprint / arXiv:math.DG/0311470 v1 26 Nov 2003).
16. *Luft E., Sjerve D.* 3-Manifolds with subgroup $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ in their fundamental group // Pacific J. Math. 1984. V. 114, N 1. P. 191–205.

Статья поступила 25 декабря 2003 г.

Исангулов Руслан Рамильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
isan@math.nsc.ru