Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 517.9

КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ОТРАЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ С ВЫДЕЛЕННОЙ ТРЕТЬЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Ю. В. Засорин

Аннотация: Предлагается метод построения функций Грина краевых задач в областях типа «полупространство» для некоторых классов уравнений в частных производных с выделенной третьей производной по первой пространственной переменной и приводятся формулы точных решений, доказываются теоремы единственности в пространствах Шварца.

Ключевые слова: вязкое трансзвуковое уравнение, фундаментальное решение, функция Грина, распределение умеренного роста.

Еще к середине 70-х гг. появился целый ряд задач математической физики, описываемых уравнениями в частных производных с выделенным оператором D_x^3. К их числу относятся, например, хорошо известные уравнения Кортевега — де-Фриза и стационарное вязкое трансзвуковое уравнение (см. [1]). Изучение этих уравнений началось с краевых задач в областях типа $\{-\infty < x < \infty\}$, $\{a < x < b\}$, причем кроме установления корректной разрешимости этих задач, были построены также и функции Грина (см., например, [2–4]); чуть позже была установлена корректная разрешимость соответствующих задач и в областях $\{x > 0\}$ и $\{x < 0\}$ (см., например, [5] и ссылки). Однако изучение качественной структуры решений краевых задач в областях последнего типа встретило ряд затруднений из-за отсутствия формул точных решений и соответствующих функций Грина (см., например, [6] и ссылки). Предлагаемый ниже так называемый «комплексный метод отражения» призван восполнить этот пробел.

§ 1. Обозначения и предварительные результаты

Пусть $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n\}$, $\Omega_{(\pm)} = \{(x,y) : \pm x > 0\}$, $D = \{D_x, D_y\}$, $D_x = \partial/\partial x$, $D_y = \{D_1, \dots, D_n\}$, $D_j = -i\partial/\partial y_j$, $j = 1, \dots, n$, $i = \sqrt{-1}$, $D_y^\alpha = D^{\alpha_1} \dots D^{\alpha_n}$, $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\alpha_j = 0, 1, 2, \dots$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Введем линейные формы

$$\langle f; g\rangle_{(n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx, \quad \langle f; g\rangle_{(n+1)} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x,y)g(x,y)\,dxdy, \qquad \langle f; g\rangle_{(n+1),(\pm)} = \langle \theta(\pm x)f; g\rangle_{(n+1)}. \tag{1.1}$$

Здесь и далее $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда.

Пусть $S'(\mathbb{R}^m)$, $m = n, n+1$, означает, как всегда, пространство Шварца распределений умеренного роста с линейной формой $\langle ; \rangle_{(m)}$, далее (см. [7]) $\overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(\pm)})$

— пространство распределений $T(x,y) \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ таких, что $\operatorname{supp}(T) \subset \overline{\Omega}_{(\pm)}$, с линейной формой $\langle ; \rangle_{(n+1),(\pm)}$ (см. формулу (1.1)). Пусть $P(D_y)$ — линейный симметрический положительный оператор с постоянными коэффициентами:

$$P(D) = \sum_{\alpha} a_\alpha D^\alpha, \quad P(\eta) = P(-\eta) > 0, \ \eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{1.2}$$

и пусть

$$L(D) = D_x^3 - P(D_y), \quad L^*(D) = L(-D). \tag{1.3}$$

Лемма 1. *Пусть $E(x,y) \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ — фундаментальное решение уравнения:*

$$L(D)E(x,y) = \delta(x) \otimes \delta(y), \tag{1.4}$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака. Тогда

1) *справедливо включение*

$$E(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{(0;0)\}); \tag{1.5}$$

2) *при каждом фиксированном $y \in \mathbb{R}^n$ функция $T(z) = E(z,y)$, $z \in \mathbb{C}$, имеет умеренный рост в секторах K_1 и K_2:*

$$K_1 = \{|\arg(z)| \le \pi/6\}, \quad K_2 = \{\operatorname{Re} z \le 0\}. \tag{1.6}$$

3) *имеет место тождество*

$$E(z,y) + e^{i2\pi/3}E(e^{i2\pi/3}z, y) + e^{-i2\pi/3}E(e^{-i2\pi/3}z, y) \equiv 0, \quad z \in \mathbb{C}, \ y \ne 0. \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть $L(i\xi,\eta) = -(i\xi^3 + P(\eta))$ — символ оператора $L(D)$. Положим

$$N_L = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1} : L(i\xi,\eta) = 0\}. \tag{1.8}$$

В силу ограничения (1.2) множество N_L либо пусто, либо совпадает с единственной точкой $\{\xi = 0, \eta = 0\}$ (если $P(0) = 0$). Следовательно (см. [7]), оператор $L(D)$ гипоэллиптический, и утверждение 1 леммы верно.

Докажем утверждение 2. Для этого получим интегральное представление функции (распределения) $E(x,y)$. Воспользуемся стандартным приемом: применим к уравнению (1.4) прямое преобразование Фурье $\mathscr{F}^+$ по переменным $y \in \mathbb{R}^n$. Получим задачу

$$\big(D_x^3 - P(\eta)\big)(\mathscr{F}^+E)(x,\eta) = 0, \quad x \ne 0, \ \eta \in \mathbb{R}^n, \tag{1.9}$$

$$\begin{gathered}(\mathscr{F}^+E)(-0,\eta) = (\mathscr{F}^+E)(+0,\eta), \quad (D_x\mathscr{F}^+E)(-0,\eta) = (D_x\mathscr{F}^+E)(+0,\eta);\\ \big(D_x^2\mathscr{F}^+E\big)(+0,\eta) - (D^2\mathscr{F}^+E)(-0,\eta) = 1, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Решая задачу (1.9), (1.10) в классе $S'(\mathbb{R})$, получаем, что

$$E(x,y) = -\frac{1}{3}\mathscr{F}^- \begin{cases} r^{-2}\exp(xr), & x \le 0, \\ 2\operatorname{Re}\{e^{i\pi/3}r^{-2}\exp(-e^{i\pi/3}xr)\}, & x \ge 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Здесь и далее

$$r = r(\eta) = (P(\eta))^{1/3}; \quad r^{-m} = (1/P(\eta))^{m/3}, \ m = 1,2,$$

а $(\mathscr{F}^-f)(y) = (2\pi)^{-n}(F^+f)(-y)$ означает обратное преобразование Фурье по переменным $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Теперь из (1.11) нетрудно получить интегральное представление для $T(z) = E(z,y)$ в секторах K_1 и K_2:

$$E(z,y) = -\frac{1}{3}\mathscr{F}^{-}\begin{cases} r^{-2}\exp(zr), & z \in K_2, \\ e^{i\pi/3}r^{-2}\exp(-e^{i\pi/3}zr) + e^{-i\pi/3}r^{-2}\exp(-e^{-i\pi/3}zr), & z \in K_1, \end{cases} \tag{1.12}$$

откуда (см. [7]) следует утверждение 2 леммы, а также тождество (1.7). Лемма доказана.

Замечание 1. Вообще говоря, фундаментальное решение $E(x,y)$ уравнения (1.4) определяется с точностью до регулярного решения $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ уравнения

$$L(D)u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

причем (см. [8]) $u(x,y)$ либо полином $Q(x,y)$, если $P(0) = 0$ (т. е. $N_L = \{(0;0)\}$), либо тождественно равно нулю, если $P(0) > 0$ (N_L определено формулой (1.8)). Поэтому во избежание разночтений в дальнейшем под $E(x,y)$ будем понимать только распределение, определенное равенствами (1.11) или (1.12).

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} I_{(+)}(x,\xi,y) &= \theta(x)\theta(\xi)E(-e^{i\pi/3}x - \xi, y), \\ I_{(-)}(x,\xi,y) &= \theta(-x)\theta(-\xi)E(x + e^{i\pi/3}\xi, y). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Полагая

$$z = -\theta(x)\theta(\xi)(e^{i\pi/3}x + \xi) + \theta(-x)\theta(-\xi)(x + e^{i\pi/3}\xi) \tag{1.14}$$

и замечая, что $z \in K_2$ для всех $x, \xi \in \mathbb{R}$, с помощью равенства (1.12) можно получить интегральные представления для функций $I_{(\pm)}$:

$$\begin{aligned} I_{(+)}(x,\xi,y) &= -\frac{\theta(x)\theta(\xi)}{3}\mathscr{F}^{-}\{r^{-2}\exp(-(e^{i\pi/3}x + \xi)r)\}, \\ I_{(-)}(x,\xi,y) &= -\frac{\theta(-x)\theta(-\xi)}{3}\mathscr{F}^{-}\{r^{-2}\exp((x + e^{i\pi/3}\xi)r)\}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

которые будут справедливы (в силу (1.7)) также и для комплексных x, ξ (при этом нужно лишь следить, чтобы точка z, определенная равенством (1.14), не выходила из сектора K_2).

Наконец, несложно видеть, что

$$I_{(+)}(x,\xi,y) = I_{(-)}(-\xi,-x,y). \tag{1.16}$$

Замечание 2. Отметим, что если интегральное представление (1.11) носит формальный характер (поскольку множитель $r^{-2}(\eta)$ может иметь несуммируемую особенность в точке $\eta = 0$), то интегральные представления (1.12), (1.15) уже вполне корректны (см. [9]). В то же время для $D_x^m D_y^\alpha E$, $D_x^p D_\xi^q D_y^\alpha I_{(\pm)}$, $m, p+q \geq 2$, $|\alpha| \geq 0$, соответствующие интегралы (1.11), (1.12), (1.15) уже не имеют особенности в точке $\eta = 0$, поэтому для установления функциональных соотношений между производными E и $I_{(\pm)}$ представлением (1.11) можно пользоваться наравне с прочими.

Замечание 3. Отметим также (см. [9]), что если $r^{-2}(\eta) \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, то точки $(x,y) = \infty$ и $(x,\xi,y) = \infty$ будут правильными точками для соответственно функций E и $I_{(\pm)}$ и их производных (если $P(0) > 0$, то на самом деле E и $I_{(\pm)}$ экспоненциально убывают на бесконечности); в противном случае E и $I_{(\pm)}$ (и, возможно, их младшие производные) будут полиномиально ограниченны в окрестностях этих точек.

Следствие 1. *Функции* $I_{(\pm)}(x,\xi,y)$, *определенные равенствами* (1.15), *порождают регулярные распределения умеренного роста*

$$I_{(\pm)} \in \overset{\circ}{S}'\big(\overline{\mathbb{R}}_{\pm,x} \times \overline{\mathbb{R}}_{\pm,\xi} \times \mathbb{R}^n_y\big) \cap C^\infty\big(\overline{\mathbb{R}}_{\pm,x} \times \overline{\mathbb{R}}_{\pm,\xi} \times \mathbb{R}^n_y \setminus \{(0;0;0)\}\big), \tag{1.17}$$

$$I_{(\pm)}(\cdot,\xi,\cdot) \in \overset{\circ}{S}'(\overline{\Omega}_{(\pm),x,y}),\ \pm\xi \geq 0; \quad I_{(\pm)}(x,\cdot,\cdot) \in \overset{\circ}{S}'(\overline{\Omega}_{(\pm),\xi,y}),\ \pm x \geq 0, \tag{1.18}$$

и удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} L(D_x,D_y)I_{(\pm)}(x,\xi,y) = 0, \quad (x,y)\in\Omega_{(\pm)}, \quad \pm\xi\geq 0,\\ L^*(D_\xi,D_y)I_{(\pm)}(x,\xi,y) = 0, \quad (\xi,y)\in\Omega_{(\pm)}, \quad \pm x\geq 0. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Доказательство. Утверждения (1.17) и (1.18) следуют непосредственно из леммы 1, замечания 3 и равенств (1.5), (1.13) и (1.15). Для доказательства равенств (1.19) достаточно заметить, что в силу (1.17)

$$\operatorname{sing\,supp}(I_{(\pm)}(x,\xi,y)) = \{x=\xi=0,\eta=0\},$$

откуда и из (1.3), (1.4), (1.16) следует, что

$$\operatorname{supp}(L(D_x,D_y)I_{(\pm)}) \cap \Omega_{(\pm),x,y} = \varnothing, \quad \pm\xi \geq 0;$$

$$\operatorname{supp}(L^*(D_\xi,D_y)I_{(\pm)}) \cap \Omega_{(\pm),\xi,y} = \varnothing, \quad \pm x \geq 0.$$

Следствие доказано.

Из неравенств (1.10), (1.11), (1.13), (1.15), (1.16) и замечаний 2 и 3 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Для всех* α, $|\alpha|\geq 0$, *справедливы следующие равенства:*

$$\big(D_x^m D_y^\alpha E\big)\big|_{x=\pm 0} = \big(D_x^m D_y^\alpha E\big)(0,y), \quad m=0,1,$$

$$\big(D_x^2 D_y^\alpha E\big)\big|_{x=\pm 0} = \left(\frac{1}{6} \mp \frac{1}{2}\right) D_y^\alpha \delta(y),$$

$$\big(D_x^p D_\xi^q I_{(\pm)}\big)\big|_{x=\xi=\pm 0} = \frac{1}{3}\left\{ \begin{matrix} (-1)^{p+q}e^{ip\pi/3} \\ e^{iq\pi/3} \end{matrix} \right\} \big(D_x^{p+q} D_y^\alpha E\big)(0,y), \quad p+q\leq 1,$$

$$\big(D_x^m D_\xi^{2-m} I_{(\pm)}\big)\big|_{x=\xi=\pm 0} = \frac{1}{3}\exp\left(\frac{i\pi}{3}(1\mp 2-m)\right) D_y^\alpha \delta(y), \tag{1.20}$$

а также

$$\begin{gathered} D_x^m D_y^\alpha E(x,y) = o(1), \quad x\to\infty,\ y\to\infty,\\ D_x^p D_\xi^q D_y^\alpha I_{(\pm)}(x,\xi,y) = o(1), \quad x,\xi\to\pm\infty,\ y\to\infty,\\ m,p+q \geq \begin{cases} 0, & r^{-2}\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),\\ 1, & r^{-1}\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),\\ 2, & r^{-1}\notin L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n). \end{cases} \end{gathered} \tag{1.21}$$

§ 2. Постановка задач и теоремы единственности

Фиксируя пару индексов (j,k), $0 \le j < k \le 2$, рассмотрим в области $\Omega_{(+)}$ следующую задачу:

$$L(D)u_{(+)}(x,y) = f_{(+)}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega_{(+)}; \tag{2.1}$$

$$\big(D_x^m u_{(+)}\big)\big|_{x=+0} = h_m(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad m = j,k, \tag{2.2}$$

где $u_{(+)}, f_{(+)} \in \overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(+)})$, $h_m \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Теперь, фиксируя индекс l, $0 \le l \le 2$, рассмотрим уже в области $\Omega_{(-)}$ задачу

$$L(D)u_{(-)}(x,y) = f_{(-)}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega_{(-)}; \tag{2.3}$$

$$\big(D_x^l u_{(-)}\big)\big|_{x=-0} = h_l(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4}$$

где $u_{(-)}, f_{(-)} \in \overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(-)})$, $H_l \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Если $P(0) > 0$, то добавим одно из следующих условий регулярности решения на бесконечности:

$$u_{(\pm)}(x,y) = o(1), \quad (x,y) \to \infty,\ r^{-2} \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \tag{2.5}$$

$$D_x u_{(\pm)}(x,y) = o(1), \quad (x,y) \to \infty,\ r^{-1} \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \tag{2.6}$$

$$D_x^2 u_{(\pm)}(x,y) = o(1), \quad (x,y) \to \infty,\ r^{-1} \notin L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n). \tag{2.7}$$

Для простоты будем считать, что

$$\operatorname{sing\,supp}(f_{(\pm)}) \subset \Omega_{(\pm)}; \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered} f_{(\pm)}(x,y) = O(|x|^{-\infty})O(|y|^{-\infty}), \quad (x,y) \to \infty, \\ h_m(y) = O(|y|^{-\infty}), \quad y \to \infty,\ m = j,k. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Замечание 4. В тех случаях, когда не требуется детализации, идет ли речь о задаче (2.1), (2.2) без условий (2.5)–(2.7) или же о задаче (2.1), (2.2) с одним из условий (2.5)–(2.7), будем писать просто «задача $(j,k,(+))$». Точно так же для задач (2.3), (2.4), ... будем использовать обобщающее обозначение «задача $(l,(-))$».

Замечание 5. Обратим внимание на «асимметрию» задач $(j,k,(+))$ и $(l,(-))$: в первом случае ставятся **два** краевых условия, а во втором — лишь **одно**. Тем не менее, как мы убедимся в дальнейшем, именно такая постановка краевых условий обеспечивает корректную разрешимость задач $(j,k,(+))$ и $(l,(-))$.

Теорема 1. *Решение* $u_{(+)} \in \overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(+)})$

1) *задачи* (2.1), (2.2) *или* (2.1), (2.2), (2.5) *единственно;*

2) *задачи* (2.1), (2.2), (2.6) *или* (2.1), (2.2), (2.7) *единственно с точностью до полинома* $Q(x,y)$, *причем* $\deg Q(\cdot,y) \le 0$ *или* 1 *соответственно.*

Доказательство. Будем считать, что распределения $f_{(+)}$, h_m из равенств (2.1), (2.2) равны нулю. Обозначим через $\hat{u}(x,\eta) = (\mathscr{F}^+ u_{(+)})(x,\eta)$ преобразование Фурье по переменным $y \in \mathbb{R}^n$ распределения $u_{(+)}(x,y)$. Тогда задача (2.1), (2.2) редуцируется к задаче

$$\big(D_x^3 - r^3(\eta)\big)\hat{u}(x,\eta) = 0, \quad x > 0,\ r(\eta) \ge 0,\ \eta \in \mathbb{R}^n, \tag{2.10}$$

$$\left(D_x^j \hat{u}\right)\big|_{x=+0} = \left(D_x^k \hat{u}\right)\big|_{x=+0}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{2.11}$$

Пусть сначала $r > 0$. В этом случае решение $\hat{u}$ уравнения (2.10) есть линейная комбинация трех частных решений: $C_0(\eta)\exp(xr)$ и $C_\pm(\eta)\exp(-e^{\pm i\pi/3}xr)$. Поскольку $\hat{u}$, как и $u_{(+)}$, есть распределение класса $\overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(+)})$ (и, значит, имеет умеренный рост на бесконечности), то $C_0(t) = 0$ при $t > 0$. Но тогда в силу условий (2.11) также и $C_+(t) = C_-(t) = 0$ при $t > 0$. Следовательно, $\hat{u} = 0$ вне многообразия $\{x \geq 0, \eta = 0\}$. Теперь если $P(0) > 0$, то в силу ограничения (1.2) $\operatorname{supp}(\hat{u}) = \varnothing$, а значит, $\hat{u}$ и $u_{(+)}$ равны нулю в $\overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(+)})$.

Пусть $P(0) = 0$. Тогда $\operatorname{supp}(\hat{u}) = \{x \geq 0, \eta = 0\}$, следовательно (см. [7]),

$$\hat{u}(x, \eta) = \sum_\alpha a_\alpha(x) \otimes D_\eta^\alpha \delta(\eta),$$

где $a_\alpha(\cdot)$ — некоторое распределение из $S'(\mathbb{R})$, а сумма конечна. Отсюда

$$u_{(+)}(x, y) = (2\pi)^{-n} \sum_\alpha a_\alpha(x) \otimes (-iy)^\alpha,$$

т. е. $u_{(+)}(x, y)$ является полиномом относительно переменных $y \in \mathbb{R}^n$, который при наличии ограничения (2.5) может быть лишь тождественно равен нулю. В случае ограничений (2.6) или (2.7) распределения $a_\alpha(x)$ могут быть либо константами, либо полиномами степени не выше чем 1 соответственно.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Решение* $u_{(-)} \in \overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(-)})$

1) *задачи* (2.3), (2.4) *или* (2.3)–(2.5) *единственно;*

2) *задачи* (2.3), (2.4), (2.6) *или* (2.3), (2.4), (2.7) *единственно с точностью до полинома* $Q(x, y)$, *причем* $\deg Q(\cdot, y) \leq 0$ *или* 1 *соответственно.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущего утверждения.

§ 3. Функции Грина задач $(j, k, (+))$ и $(l, (-))$

Перейдем к конструированию функций Грина задач $(j, k, (+))$ и $(l, (-))$.

Определение 1. *Функцией Грина* $G_{(j,k,(+))}(x, \xi, y)$ *задачи* $(j, k, (+))$ будем называть распределение класса $\overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(+),x,y}) \times \overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(+),\xi,y})$, удовлетворяющее в области $\Omega_{(+),x,y} \times \Omega_{(+),\xi,y}$ следующему уравнению:

$$L(D_x, D_y)G_{(j,k,(+))} = L^*(D_\xi, D_y)G_{(j,k,(+))} = \delta(x - \xi) \times \delta(y), \tag{3.1}$$

а также условиям

$$\left(D_x^m G_{(j,k,(+))}\right)\big|_{x=+0} = 0, \quad (\xi, y) \in \Omega_{(+)},\ m = j, k; \tag{3.2}$$

$$\left(D^{j+k+1} G_{(j,k,(+))}\right)\big|_{\xi=+0} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{(+)}. \tag{3.3}$$

Определение 2. *Функцией Грина* $G_{(l,(-))}$ *задачи* $(l, (-))$ будем называть распределение класса $\overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(-),x,y}) \times \overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(-),\xi,y})$, удовлетворяющее в области $\Omega_{(-),x,y} \times \Omega_{(-),\xi,y}$ уравнению

$$L(D_x, D_y)G_{(l,(-))} = L^*(D_\xi, D_y)G_{(l,(-))} = \delta(x - \xi) \otimes \delta(y), \tag{3.4}$$

а также условиям

$$\left(D_x^l G_{(l,(-))}\right)\big|_{x=-0} = 0, \quad (\xi, y) \in \Omega_{(-)}, \tag{3.5}$$

$$\left(D_\xi^m G_{(l,(-))}\right)\big|_{\xi=-0} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{(-)},\ 0 \le m \le 2,\ m \ne 2 - l. \tag{3.6}$$

Если $P(0) > 0$, то дополнительных условий на бесконечности ставить не будем. Если $P(0) = 0$, то добавляем условие

$$D_x^m G_{(\dots,(\pm))}(x, \xi, y) = o(1), \quad x \to \pm\infty,\ \xi \to \pm\infty,\ y \to \infty,$$

$$m = \begin{cases} 0, & r^{-2} \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \\ 1, & r^{-1} \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \\ 2, & r^{-1} \notin L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{3.7}$$

Теорема 3. *Функции Грина $G_{(j,k,(+))}$ и $G_{(l,(-))}$ задач $(j, k, (+))$ и $(l, (-))$ могут быть представлены в следующем виде:*

$$G_{(j,k,(+))}(x, \xi, y) = \theta(x)\theta(\xi)E(x - \xi, y) - 2\,\mathrm{Re}\left\{\exp\left(-\frac{i2\pi}{3}(j + k)\right) I_{(+)}(x, \xi, y)\right\},$$
$$G_{(l,(-))}(x, \xi, y) = \theta(-x)\theta(-\xi)E(x - \xi, y) + 2\,\mathrm{Re}\left\{\exp\left(-\frac{i2\pi}{3}(l + 1)\right) I_{(-)}(x, \xi, y)\right\}, \tag{3.8}$$

где функции (*распределения*) $I_{(\pm)}$ *определяются равенствами* (1.13).

Доказательство осуществляется обычной проверкой равенств (3.1)–(3.7). Равенства (3.1), (3.4) следуют непосредственно из формул (1.4), (1.19), (3.8); равенства (3.2) и (3.6) — из формул (1.13), (3.8). Справедливость равенств (3.3), (3.5) может быть выведена непосредственно из формул (1.11)–(1.13), однако еще легче она устанавливается на основании тождеств (1.7) и

$$G_{(j,k,(+))}(x, \xi, y) = G_{(j+k-1,(-))}(-\xi, -x, y). \tag{3.9}$$

Далее, справедливость (3.7) вытекает из формулы (1.21). Наконец, умеренный рост на бесконечности распределений $G_{(\dots,(\pm))}$ по совокупности переменных следует непосредственно из (1.18). Теорема доказана.

Замечание 6. Отметим, что пока еще мы не можем переходить к непосредственному конструированию решений $u_{(\pm)}$ задач $(j, k, (+))$ и $(l, (-))$ путем «естественной» их редукции к задачам с однородными краевыми условиями, представляя решения исходных задач в виде

$$u_{(+)} = \frac{x^j}{j!} \otimes h_j(y) + \frac{x^k}{k!} \otimes h_k(y) + v_{(+)}, \quad u_{(-)} = \frac{x^l}{l!} \otimes h_l(y) + v_{(-)},$$

так как редукция сразу же заводит в тупик, поскольку в общем случае приводит к нарушению условий (2.5)–(2.7), (2.9). Поэтому необходима технически трудоемкая, но «честная» проверка функций Грина $G_{(\dots,(\pm))}$ на «дельтаобразность» в соответствующих краевых условиях.

Приведем ряд простых, но важных свойств функций Грина. В частности, непосредственно из равенств (1.3), (1.4), (1.13), (3.8) следует

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} &D_xG_{(0,1,(+))} = -D_\xi G_{(0,2,(+))}, \quad D_xG_{(0,(-))} = -D_\xi G_{(2,(-))},\\ &D_xG_{(0,2,(+))} = -D_\xi G_{(1,2,(+))}, \quad D_xG_{(1,(-))} = -D_\xi G_{(0,(-))},\\ &D_xG_{(1,2,(+))} = -D_\xi G_{(0,1,(+))}, \quad D_xG_{(2,(-))} = -D_\xi G_{(1,(-))}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

а также

$$\begin{aligned} D_x^3G_{(j,k,(+))} = -D_\xi^3 G_{(j,k,(+))} = P(D_y)G_{(j,k,(+))}, \quad x > \xi \geq 0,\\ D_x^3G_{(l,(-))} = -D_\xi^3 G_{(l,(-))} = P(D_y)G_{(l,(-))}, \quad x < \xi \leq 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Наконец, из равенств (1.20), (3.8) получим, что для младших производных D_x^mG, D_ξ^mG, $m \leq 1$, можно менять местами повторные пределы при $x \to \pm\infty$, $\xi \to \pm\infty$, однако уже для вторых производных это не так. Используя формулы (3.9), (3.10), дадим точный ответ на вопрос о повторных пределах.

Лемма 3. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \bigl(\bigl(D_x^pD_\xi^qG_{(j,k,(+))}\bigr)\big|_{x=+0}\bigr)\big|_{\xi=+0} &= \bigl(\bigl(D_x^pD_\xi^qG_{(j,k,(+))}\bigr)\big|_{\xi=+0}\bigr)\big|_{x=+0}\\ &= \begin{cases} 0, & j+k+p \neq 3,\\ (-1)^q3(D_x^{p+q}E)(0,y), & j+k+p = 3, \end{cases} \quad p+q \leq 1; \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \bigl(\bigl(D_x^pD_\xi^qG_{(l,(-))}\bigr)\big|_{x=-0}\bigr)\big|_{\xi=-0} &= \bigl(\bigl(D_x^pD_\xi^qG_{(l,(-))}\bigr)\big|_{\xi=-0}\bigr)\big|_{x=-0}\\ &= \begin{cases} 0, & l+q \neq 2,\\ (-1)^p3(D_x^{p+q}E)(0,y), & l+q = 2, \end{cases} \quad p+q \leq 1; \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\bigl(\bigl(D_x^mD_\xi^{2-m}G_{(j,k,(+))}\bigr)\big|_{\xi=+0}\bigr)\big|_{x=+0} = \begin{cases} 0, & m \neq j,k,\\ (-1)^m\delta(y), & m = j,k; \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\bigl(\bigl(D_x^mD_\xi^{2-m}G_{(j,k,(+))}\bigr)\big|_{x=+0}\bigr)\big|_{\xi=+0} = \begin{cases} 0, & m = j,k,\\ (-1)^{m+1}\delta(y), & m \neq j,k; \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\bigl(\bigl(D_x^mD_\xi^{2-m}G_{(l,(-))}\bigr)\big|_{\xi=-0}\bigr)\big|_{x=-0} = \begin{cases} 0, & m \neq l,\\ (-1)^{l+1}\delta(y), & m = l; \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\bigl(\bigl(D_x^mD_\xi^{2-m}G_{(l,(-))}\bigr)\big|_{x=-0}\bigr)\big|_{\xi=-0} = \begin{cases} 0, & m = l,\\ (-1)^m\delta(y), & m \neq l. \end{cases} \tag{3.17}$$

§ 4. Решения задач $(j,k,(+))$ и $(l,(-))$

Перейдем к построению точных решений задач $(j,k,(+))$ и $(l,(-))$. Следующее утверждение дает необходимую подсказку о том, в какой именно форме эти решения следует строить.

Лемма 4 (интегральное представление функции класса $S(\overline{\Omega}_{(\pm)})$). *Для любой функции $\varphi_\pm \in S(\overline{\Omega}_{(\pm)})$ и любой точки $(x,y) \in \Omega_{(\pm)}$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \varphi_\pm(x,y) &= \langle F_{(\pm)}(x,\xi,y-\eta); (L(D)\varphi_\pm)(\xi,\eta)\rangle_{(n+1),(\pm)}\\ &\pm \sum_{m=0}^{2}(-1)^m\bigl\langle\bigl(D_\xi^{2-m}F_{(\pm)}\bigr)(x,\pm0,y-\eta); \bigl(D_x^m\varphi_\pm\bigr)(0,\eta)\bigr\rangle_{(n)}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где в качестве $F_{(+)}$ можно брать любое из распределений $E(x-\xi,y-\eta)$ или $G_{(j,k,(+))}(x,\xi,y-\eta)$, в качестве $F_{(-)}$ — любое из распределений $E(x-\xi,y-\eta)$ или $G_{(l,(-))}(x,\xi,y-\eta)$, определенных равенствами (1.11), (3.8)*; линейные формы $\langle\,;\rangle_{(n)}$, $\langle\,;\rangle_{(n+1),(\pm)}$ определены равенствами* (1.1), *а выражение $\bigl(D_z^p\Psi\bigr)(t)$ следует понимать как $\bigl(D_z^p\Psi(z)\bigr)\big|_{z=t}$.*

Теперь на основании теорем 2.1, 2.2 и равенств (3.3), (3.6), (4.1) сформулируем и докажем следующее утверждение.

Теорема 4. *Задачи* $(j,k,(+))$ *и* $(l,(-))$ *корректно разрешимы в соответствующих классах* $\overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(+)})$ *и* $\overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(-)})$, *а их решения* $u_{(\pm)} \in \overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(\pm)})$ *могут быть представлены в следующем виде:*

$$u_{(+)}(x,y) = u_{(j,(+))}(x,y) + u_{(k,(+))}(x,y) + v_{(+)}(x,y), \tag{4.2}$$

$$u_{(-)}(x,y) = u_{(l,(-))}(x,y) + v_{(-)}(x,y), \tag{4.3}$$

$$u_{(m,(+))}(x,y) = (-1)^m \big\langle \big(D_\xi^{2-m} G_{(j,k,(+))}\big)(x,+0,y-\eta); h_m(\eta)\big\rangle_{(n)}, \quad m = j,k, \tag{4.4}$$

$$u_{(l,(-))}(x,y) = (-1)^{l+1} \big\langle \big(D_\xi^{2-l} G_{(l,(-))}\big)(x,-0,y-\eta); h_l(\eta)\big\rangle_{(n)}, \tag{4.5}$$

$$v_{(+)}(x,y) = \langle G_{(j,k,(+))}(x,\xi,y-\eta); f_{(+)}(\xi,\eta)\rangle_{(n+1),(+)}, \tag{4.6}$$

$$v_{(-)}(x,y) = \langle G_{(l,(-))}(x,\xi,y-\eta); f_{(-)}(\xi,\eta)\rangle_{(n+1),(-)}, \tag{4.7}$$

где $G_{(j,k,(+))}$, $G_{(l,(-))}$ — *функции Грина задач* $(j,k,(+))$ *и* $(l,(-))$, *определенные равенствами* (3.8), *а линейные формы* $\langle\,;\rangle_{(n)}$, $\langle\,;\rangle_{(n+1),(\pm)}$ *определены равенствами* (1.1).

Доказательство. Заметим, что в силу ограничений (2.8), (2.9) свертки (4.4)–(4.7) корректно определены; отсюда и из (3.7) следует выполнение условий (2.5)–(2.7). Поэтому доказательство теоремы фактически сводится к проверке равенств (2.1), (2.3) и следующих соотношений:

$$\big(D_x^m v_{(+)}\big)\big|_{x=+0} = 0,\ m = j,k, \quad \big(D_x^l v_{(-)}\big)\big|_{x=-0} = 0, \tag{4.8}$$

$$\big(D_x^m u_{(m,(+))}\big)\big|_{x=+0} = h_m(y),\ m = j,k, \qquad \big(D_x^l u_{(l,(-))}\big)\big|_{x=-0} = h_l(y), \tag{4.9}$$

и, кроме того, для задачи $(j,k,(+))$ необходимо дополнительно проверить, что

$$\big(D_x^k u_{(j,(+))}\big)\big|_{x=+0} = \big(D_x^j u_{(k,(+))}\big)\big|_{x=+0} = 0. \tag{4.10}$$

Равенства (2.1), (2.3) вытекают непосредственно из равенств (3.1), (3.4) и (4.2)–(4.7); равенства (4.8) — из равенств (3.2), (3.5), (4.6), (4.7); равенства (4.9) — из равенств (3.14), (3.16), (4.4), (4.5).

Наиболее трудоемка проверка равенства (4.10), поэтому для простоты ограничимся случаем $j = 0$, $k = 2$. В силу (3.12), (4.4) $u_{(2,(+))}|_{x=+0} = 0$. Далее, из формул (3.10), (3.11), (4.4) следует, что

$$\begin{aligned} D_x^2 u_{(0,(+))}(x,y) &= \big\langle \big(D_x^2 D_\xi^2 G_{(0,2,(+))}\big)(x,+0,y-\eta); h_0(y)\big\rangle_{(n)} \\ &= \big\langle \big(D_x^4 G_{(1,2,(+))}\big)(x,+0,y-\eta); h_0(\eta)\big\rangle_{(n)} \\ &= \langle (D_x G_{(1,2,(+))}(x,+0,y-\eta); (P(D)h_0)(\eta)\rangle_{(n)}, \end{aligned}$$

откуда с учетом (3.12) $\big(D_x^2 u_{(0,(+))}\big)\big|_{x=+0} = 0$.

Объединяя равенства (4.8)–(4.10) и (4.2), (4.3), мы и устанавливаем справедливость нашего утверждения. Теорема доказана.

Замечание 7. Из равенств (3.12)–(3.17), (4.6)–(4.8) и [8] следует, что ограничение (2.8) можно ослабить, потребовав лишь, чтобы распределения $f_{(\pm)} \in \overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(\pm)})$ однозначно определялись своим сужением на $\Omega_{(\pm)}$, т. е. (см. [8])

$$f_{(\pm)}\big|_{\Omega_{(\pm)}} = f_{(\pm)}. \tag{4.11}$$

Замечание 8. Нетрудно заметить, что простая замена x на $-x$ для решений $u_{(+)}(x,y)$, $u_{(-)}(x,y)$ задач $(j,k,(+))$ и $(l,(-))$, определенных равенствами

(4.2)–(4.7), дает нам формулы для решений $u^*_{(+)}(x,y)$, $u^*_{(-)}(x,y)$ сопряженных задач $(l,(+),*)$ и $(j,k,(-),*)$ (с оператором $L^*(D)=-D_x^3-P(D_y)$) в областях $\Omega_{(+)}$ и $\Omega_{(-)}$ соответственно:

$$u^*_{(+)}(x,y)=u_{(-)}(-x,y),\quad u^*_{(-)}(x,y)=u_{(+)}(-x,y),\quad j+k=l+1.$$

Соответствующие функции Грина $G^*_{(l,(+))}$ и $G^*_{(j,k,(-))}$ могут быть получены из равенств (3.8) и

$$G^*_{(l,(+))}(x,\xi,y)=G_{(l,(-))}(-\xi,-x,y),\quad G^*_{(j,k,(-))}(x,\xi,y)=G_{(j,k,(+))}(-\xi,-x,y), \tag{4.12}$$

а их свойства — из формул (3.9)–(3.17), (4.12).

§ 5. Некоторые приложения к нестационарным задачам

Рассмотрим операторы

$$L^{(0)}=\frac{\partial}{\partial t}-L(D),\quad L^{(1)}=\frac{\partial}{\partial t}-D_x^3,\quad L^{(2)}=\frac{\partial}{\partial t}+P(D_y), \tag{5.1}$$

где операторы $P(D_y)$, $L(D)$ определены равенствами (1.2), (1.3) соответственно, причем условие положительности оператора $P(D)$ может быть ослаблено: теперь мы предполагаем его лишь неотрицательным (в частности, допускается случай и $P(D)\equiv 0$). При этом для удобства производную по переменной t будем понимать как производную по параметру, а производные D_x, D_y — в смысле теории распределений.

Фиксируя пару индексов (j,k), $0\le j<k\le 2$, и индекс l, $0\le l\le 2$, рассмотрим в областях $\Omega_{(+)}$ и $\Omega_{(-)}$ следующие задачи:

$$\begin{gathered}L^{(0)}u_{(+)}(t,x,y)=-f_{(+)}(t,x,y),\quad t>0,\ (x,y)\in\Omega_{(+)},\\ u_{(+)}|_{t=+0}=g_{(+)}(x,y),\quad (x,y)\in\overline{\Omega}_{(+)},\\ \left(D_x^m u_{(+)}\right)\big|_{x=+0}=-h_m(t,y),\quad t\ge 0,\ y\in\mathbb{R}^n,\ m=j,k,\\ u_{(+)}(t,x,y)=o(1),\quad x\to+\infty,\end{gathered} \tag{5.2}$$

и

$$\begin{gathered}L^{(0)}u_{(-)}(t,x,y)=-f_{(-)}(t,x,y),\quad t>0,\ (x,y)\in\Omega_{(-)},\\ u_{(-)}|_{t=+0}=g_{(-)}(x,y),\quad (x,y)\in\overline{\Omega}_{(-)},\\ \left(D_x^l u_{(-)}\right)\big|_{x=-0}=-h_l(t,y),\quad t\ge 0,\ y\in\mathbb{R}^n,\\ u_{(-)}(t,x,y)=o(1),\quad x\to-\infty,\end{gathered} \tag{5.3}$$

где $u_{(\pm)}(t,\cdot,\cdot)$, $f_{(\pm)}(t,\cdot,\cdot)$, $g_{(\pm)}(\cdot,\cdot)\in\mathring{S}'(\overline{\Omega}_{(\pm)})$, $h_m(t,\cdot)\in S'(\mathbb{R}^n)$, $m=j,k,l$. Кроме того, будем считать, что распределения $f_{(\pm)}$, $g_{(\pm)}$ удовлетворяют ограничениям, аналогичным (2.8), (2.9) или (4.11), (2.9).

Теорема 5. *Решения $u_{(\pm)}\in\mathring{S}'(\overline{\Omega}_{(\pm)})$ задач* (5.2) *и* (5.3) *единственны в соответствующих классах.*

Доказательство аналогично доказательству теорем 1 и 2 (с той лишь разницей, что по переменным $y\in\mathbb{R}^n$ применяется преобразование Фурье, а по переменной t — преобразование Лапласа).

Прежде чем рассматривать вопросы построения решения задач (5.2), (5.3), сформулируем следующий простой, но важный результат.

Лемма 5. *Пусть $E^{(0)}(t,\cdot,\cdot) \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ — фундаментальное решение Коши задачи*

$$L^{(0)}E^{(0)}(t,x,y) = 0,\ t > 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}; \quad E^{(0)}\big|_{t=+0} = \delta(x) \otimes \delta(y). \tag{5.4}$$

Тогда

$$E^{(0)}(t,x,y) = E^{(1)}(t,x) \otimes E^{(2)}(t,y), \tag{5.5}$$

где

$$E^{(1)}(t,x) = \theta(t)(3t)^{-1/3}Ai(-x(3t)^{-1/3}), \quad E^{(2)}(t,y) = \theta(t)\mathscr{F}^{-}\exp(-tP(\eta)) \tag{5.6}$$

— фундаментальные решения Коши задач

$$L^{(1)}E^{(1)}(t,x) = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}; \quad E^{(1)}|_{t=+0} = \delta(x), \tag{5.7}$$

$$L^{(2)}E^{(2)}(t,y) = 0,\ t > 0,\ y \in \mathbb{R}^n; \quad E^{(2)}|_{t=+0} = \delta(y), \tag{5.8}$$

$Ai(z)$ — функция Эйри 1*-го рода (см.* [10]*).*

Доказательство осуществляется применением преобразования Фурье по переменным $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$ к задачам (5.4), (5.7), (5.8).

Остановимся на некоторых свойствах распределения $E^{(1)}(t,x)$, определенного равенством (5.6). Несмотря на то, что для него отсутствует удобное интегральное представление типа (1.11) или (1.12), для него справедливы (см. [10]) следующие соотношения:

1) функция $F(z) = E^{(1)}(t,z)$, $z \in \mathbb{C}$, имеет в секторе $K_2 = \{\operatorname{Re} z < 0\}$ степенное, а в секторе $K_1 = \{|\arg z| < \pi/6\}$ — экспоненциальное убывание на бесконечности;

2) справедливо тождество

$$Ai(z) + e^{i2\pi/3}Ai(e^{i2\pi/3}z) + e^{-i2\pi/3}Ai(e^{-i2\pi/3}z) \equiv 0. \tag{5.9}$$

Наконец, непосредственной проверкой можно установить, что

$$\begin{gathered} \left(D_x^m E^{(1)}\right)\big|_{x=\pm 0} = (D^m E^{(1)})(t,0), \quad m = 0,1, \\ \left(D_x^2 E^{(1)}\right)\big|_{x=\pm 0} = \left(-\frac{1}{6} \mp \frac{1}{2}\right)\delta(t). \end{gathered} \tag{5.10}$$

Таким образом, распределение $E^{(1)}(t,x)$ удовлетворяет соотношениям, аналогичным (1.20) и лемме 2.

Теперь, давая определение функций Грина задач (5.2), (5.3), аналогичное определениям 1 и 2, несложно повторить рассуждения двух предыдущих параграфов, получив при этом утверждения, аналогичные теореме 3, леммам 2–4 (и формулы, аналогичные формулам (3.8), (3.10)–(3.17), (4.1)–(4.7)).

Таким образом, установлена

Теорема 6. *Функции Грина $G^{(\pm)} \in \overset{\circ}{S}{}'(\overline{\Omega}_{(\pm),(x,y)})$ могут быть представлены в следующем виде:*

$$\begin{aligned} G^{(+)}(t,\tau,x,\xi,y,\eta) = \theta(x)\theta(\xi)\bigg[&E^{(0)}(t-\tau,x-\xi,y-\eta) \\ &+ 2\operatorname{Re}\bigg\{\exp\left(-\frac{i2\pi}{3}(j+k)\right)E^{(0)}(t-\tau,-e^{i\pi/3}x-\xi,y-\eta)\bigg\}\bigg], \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$G^{(-)}(t,\tau,x,\xi,y,\eta)=\theta(-x)\theta(-\xi)\biggl[E^{(0)}(t-\tau,x-\xi,y-\eta)$$
$$+2\operatorname{Re}\biggl\{\exp\biggl(-\frac{i2\pi}{3}(l+1)\biggr)E^{(0)}(t-\tau,x+e^{i\pi/3}\xi,y-\eta)\biggr\}\biggr],$$

где распределение $E^{(0)}$ *определено равенствами* (5.5), (5.6). *При этом задачи* (5.2), (5.3) *корректно разрешимы в классах* $\mathring{S}'(\overline{\Omega}_{(+)})$ *и* $\mathring{S}'(\overline{\Omega}_{(-)})$ *соответственно, а их решения* $u_{(\pm)}\in\mathring{S}'(\overline{\Omega}_{(\pm)})$ *могут быть представлены в следующем виде:*

$$u_{(+)}(t,x,y)=\int\limits_0^t d\tau\cdot\langle G^{(+)};f_{(+)}(\tau,\xi,\eta)\rangle_{(n+1),(+)}$$
$$+\sum_{m=j,k}(-1)^m\int\limits_0^t d\tau\cdot\bigl\langle\bigl(D_\xi^{2-m}G^{(+)}\bigr)\big|_{\xi=+0};h_m(\tau,\eta)\bigr\rangle_{(n)}$$
$$+\langle G^{(+)}|_{\tau=+0};g_{(+)}(\xi,\eta)\rangle_{(n+1),(+)};$$

$$u_{(-)}(t,x,y)=\int\limits_0^t d\tau\cdot\langle G^{(-)};f_{(-)}(\tau,\xi,\eta)\rangle_{(n+1),(-)}$$
$$+(-1)^{l+1}\int\limits_0^t d\tau\cdot\bigl\langle\bigl(D_\xi^{2-l}G^{(-)}\bigr)\big|_{\xi=-0};h_l(\tau,\eta)\bigr\rangle_{(n)}+\bigl\langle G^{(-)}\big|_{\tau=+0};g_{(-)}(\xi,\eta)\bigr\rangle_{(n+1),(-)}.$$

§ 6. Заключение

Предложенный выше метод комплексного отражения (т. е. построение функций Грина в форме, аналогичной равенствам (3.8), (5.11)) может быть применен к краевым задачам для уравнений, содержащих и другие операторы с выделенной третьей производной D_x^3, например

$$L=\frac{\partial}{\partial t}P_1(D_y)\pm D_x^3P_2(D_y)+P_3(D_y),\tag{6.1}$$

$$L=\frac{\partial}{\partial t}D_x^3P_1(D_y)\pm P_2(D_y),\tag{6.2}$$

где $P_m(D_y)$ — положительные (неотрицательные) операторы с постоянными коэффициентами. В случае $P_1\equiv 0$, $P_2\equiv\pm1$, $P_3\equiv\Delta_{(y)}$ оператор в (6.1) приводит к стационарному вязкому трансзвуковому уравнению (см. [1]), в случае $P_1\equiv 0$, $P_2\equiv\pm1$, $P_3\equiv 0$ — к уравнению Кортевега — де-Фриза, а оператор (6.2) описывает системы не типа Коши — Ковалевской (см. [11]).

Этот метод может быть применен и к уравнениям с переменными коэффициентами, например с операторами

$$L=D_x^3-P(y,D_y).\tag{6.3}$$

(В случае $P(y,D_y)=r^{-1}D_rrD_r$, $r=\sqrt{y^2+z^2}$, оператор (6.3) приводит к хорошо известному осесимметрическому вязкому трансзвуковому уравнению [2].)

При этом требуется лишь, чтобы соответствующие фундаментальные решения имели умеренный рост в секторах K_1 и K_2 (определенных формулой (1.6)) и выполнялись бы соотношения, аналогичные (1.7) и равенствам типа (1.20), (5.10).

Автор выражает глубокую признательность $\boxed{\text{И. А. Киприянову}}$ за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* Асимптотическая картина обтекания тел вращения трансзвуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, № 6. С. 1004–1014.
2. *Диесперов В. Н., Ломакин Л. А.* Об одной краевой задаче для осесимметрического вязкого трансзвукового уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14, № 5. С. 1244–1260.
3. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Наука, 1987.
4. *Джураев Т. Д., Абдиназаров С.* Краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 1, № 1. С. 2178–2187.
5. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной правой частью. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
6. *Хабибуллин И. Т.* Начально-краевая задача для уравнения КдФ на полуоси с однородными краевыми условиями // Теор. и мат. физика. 2002. Т. 130, № 1. С. 31–53.
7. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
8. *Засорин Ю. В.* О поведении на бесконечности решений некоторых классов дифференциальных уравнений и теоремы единственности // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений мат. физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984. С. 74–80.
9. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной плоскости. М.: Наука, 1984.
10. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
11. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

Статья поступила 29 марта 2002 г., окончательный вариант — 20 апреля 2004 г.

Засорин Юрий Валентинович
Воронежский гос. университет,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
zasorin@box.vsi.ru