Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 512.554

ПРОСТЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЙОРДАНОВЫ СУПЕРАЛГЕБРЫ С АССОЦИАТИВНОЙ ЧЕТНОЙ ЧАСТЬЮ

В. Н. Желябин, И. П. Шестаков

Аннотация: Описываются унитальные простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью, нечетная часть M которых является ассоциативным модулем над четной частью A. Доказано, что каждая такая супералгебра, неизоморфная супералгебре невырожденной билинейной суперформы, изоморфно вложима в йорданову скрученную супералгебру векторного типа. Построен пример новой простой специальной йордановой супералгебры. Также описаны супералгебры, для которых $M \cap [A, M] \neq 0$.

Ключевые слова: йорданова супералгебра, $(-1, 1)$-супералгебра, скрученная супералгебра векторного типа, дифференциально простая алгебра, проективный модуль, локализация модуля.

В [1] В. Г. Кацем и в [2] И. Л. Кантором были описаны конечномерные простые йордановы супералгебры над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Е. И. Зельманов и М. Расин [3] получили описание конечномерных простых йордановых супералгебр с полупростой четной частью над полями характеристики $p \neq 2$.

Примеры бесконечномерных простых йордановых супералгебр можно получить, используя процесс удвоения Кантора, из ассоциативной суперкоммутативной супералгебры, на которой задана йорданова скобка, например скобка Пуассона (см. [4]). Если йорданова скобка задана на ассоциативно-коммутативной алгебре, то четная часть полученной йордановой супералгебры ассоциативна.

В [5] Е. И. Зельманов и К. Мартинес описали конечномерные простые унитальные йордановы супералгебры, четная часть которых имеет ненулевой нильпотентный идеал. Как оказалось, всякая такая супералгебра, не изоморфная супералгебре Чанга — Каца, может быть получена процессом удвоения Кантора из ассоциативной суперкоммутативной супералгебры. При этом четная часть рассматриваемой супералгебры либо ассоциативная коммутативная алгебра, либо по модулю некоторого ненулевого нильпотентного идеала йорданова алгебра симметрической билинейной формы.

Как и в случае обычных алгебр, йордановы супералгебры тесно связаны с альтернативными и $(-1, 1)$-супералгебрами. В [6] описаны первичные альтернативные супералгебры над полями характеристики $\neq 2, 3$. Затем в [7] классифицированы первичные альтернативные супералгебры без ограничений на

Работа первого автора поддержана Советом по грантам государственной поддержки ведущих научных школ (проект № НШ–2069.2003.1), второго — фондом FAPESP (грант 2/12429–7).

характеристику, но при некоторых ограничениях невырожденности на четную часть. В частности, были описаны все простые альтернативные супералгебры. Оказалось, что они либо конечномерны, либо являются скрученными супералгебрами векторного типа, т. е. получаются подобно процессу удвоения Кантора из ассоциативно-коммутативных алгебр с дифференцированием. В работе [8] описаны простые $(-1,1)$-супералгебры характеристики $\neq 2,3$. Оказалось, что четная часть A такой супералгебры является ассоциативно-коммутативной алгеброй, а нечетная часть M — конечнопорожденным ассоциативным и коммутативным A-модулем. Умножение в M задается с помощью фиксированных конечных множеств дифференцирований и элементов алгебры A. При некоторых ограничениях на алгебру A нечетная часть M является однопорожденным A-модулем, а исходная $(-1,1)$-супералгебра — скрученной супералгеброй векторного типа. Следует отметить, что присоединенная йорданова супералгебра для простой $(-1,1)$-супералгебры является унитальной простой специальной супералгеброй с ассоциативной четной частью.

В [9] описаны унитальные простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой четной частью A, нечетная часть M которых либо ассоциативный и коммутативный A-модуль, либо $M \cap [A,M] \neq 0$, где $[A,M]$ — линейное подпространство, порожденное в ассоциативной обертывающей исходной йордановой супералгебры коммутаторами четных и нечетных элементов.

В первом случае если супералгебра не является супералгеброй невырожденной билинейной суперформы, то ее четная часть A — дифференциально простая алгебра, а нечетная часть M — конечнопорожденный проективный A-модуль ранга 1. Здесь, как и для $(-1,1)$-супералгебр, умножение в M задается с помощью фиксированных конечных множеств дифференцирований и элементов алгебры A. Отметим, что и в этом случае, и в случае $(-1,1)$-супералгебр оставался открытым вопрос: существуют ли простые супералгебры такого типа, в которых M не являлся бы свободным A-модулем.

Если $J = A + M$ — бесконечномерная супералгебра второго типа, то она содержит подсупералгебру $J_0 = A_0 + M_0$ первого типа, при этом A — прямая сумма двух экземпляров алгебры A_0, а $M = M_0 + [A_0, M_0]$.

В настоящей работе изучаются унитальные простые специальные *йордановы супералгебры* с произвольной ассоциативной четной частью. В каждой такой супералгебре $J = A + M$ либо M — ассоциативный и коммутативный A-модуль, либо ассоциаторное пространство (A,A,M) равно M. В первом случае для супералгебр, которые не являются супералгебрами невырожденной билинейной суперформы, показано, что все они изоморфно вкладываются в супералгебру векторного типа. Для таких супералгебр также решен вопрос о свободе A-модуля M, а именно построен пример унитальной простой специальной йордановой супералгебры с ассоциативной четной частью, у которой нечетная часть не является свободным модулем. Во втором случае описаны супералгебры, для которых $M \cap [A,M] \neq 0$.

§ 1. Определения и предварительные результаты

Пусть Φ — поле характеристики, не равной 2. Супералгебра $J = J_0 + J_1$ — это Z_2-градуированная Φ-алгебра, т. е. $J_0^2 \subseteq J_0$, $J_1^2 \subseteq J_0$, $J_1 J_0 \subseteq J_1$, $J_0 J_1 \subseteq J_1$. Положим $A = J_0$ и $M = J_1$. Пространство A (M) называется *четной* (*нечетной*) *частью супералгебры* J. Элементы множества $A \cup M$ называются *однород-*

ными. Выражение $p(x)$, где $x \in A \cup M$, означает индекс четности однородного элемента x:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in A \ (x \text{ четный}), \\ 1, & \text{если } x \in M \ (x \text{ нечетный}). \end{cases}$$

Для элемента x из J через R_x обозначим оператор правого умножения на элемент x. Супералгебра J называется *йордановой*, если для однородных элементов выполнимы следующие операторные тождества:

$$aR_b = (-1)^{p(a)p(b)} bR_a, \tag{1}$$

$$R_aR_bR_c + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)+p(b)p(c)} R_cR_bR_a + (-1)^{p(b)p(c)} R_{(ac)b}$$
$$= R_aR_{bc} + (-1)^{p(a)p(b)} R_bR_{ac} + (-1)^{p(a)p(c)+p(b)p(c)} R_cR_{ab}. \tag{2}$$

Супералгебра $J = A + M$ называется *простой*, если $J^2 \neq 0$ и в ней нет собственных ненулевых Z_2-градуированных идеалов. Как показано в [10], йорданова супералгебра J проста как супералгебра тогда и только тогда, когда J проста как алгебра.

Приведем некоторые примеры йордановых супералгебр.

1. Супералгебра билинейной формы. Пусть $V = V_0 \oplus V_1$ — линейное Z_2-градуированное Ф-пространство с суперсимметрической билинейной формой $f(x,y)$ (т. е. форма f симметрична на V_0, кососимметрична на V_1 и $f(V_0, V_1) = 0$). Рассмотрим прямую сумму линейных пространств $J = \Phi \cdot 1 + V$. Определим умножение на J, полагая $1 \cdot v = v \cdot 1$, $v_1 \cdot v_2 = f(v_1, v_2) \cdot 1$. Тогда J — йорданова супералгебра с четной частью $A = \Phi \cdot 1 + V_0$ и нечетной частью $M = V_1$. Если форма f невырожденна, то J — простая супералгебра, за исключением случая $V_1 = 0$, $\dim V_0 = 1$.

2. Супералгебра D_t. Пусть $A = \Phi e_1 + \Phi e_2$, $e_i^2 = e_i$, $e_1e_2 = 0$, $M = \Phi x + \Phi y$, $e_ix = \frac{1}{2}x$, $e_iy = \frac{1}{2}y$, $xy = e_1 + te_2$, $t \in \Phi$. Супералгебра D_t проста тогда и только тогда, когда $t \neq 0$.

3. Супералгебра векторного типа $J(\Gamma, D)$. Пусть Γ — ассоциативная коммутативная Ф-алгебра с ненулевым дифференцированием D. Изоморфную копию пространства Γ с отображением изоморфизма $a \mapsto \bar{a}$ обозначим через $\overline{\Gamma}$. Рассмотрим прямую сумму пространств $J(\Gamma, D) = \Gamma + \overline{\Gamma}$ и определим на $J(\Gamma, D)$ умножение $\cdot$ по правилам

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot \bar{b} = \overline{ab}, \quad \bar{a} \cdot b = \overline{ab}, \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = a^D b - ab^D,$$

где $a, b \in \Gamma$ и ab — произведение в Γ. Тогда $J(\Gamma, D)$ — йорданова супералгебра с четной частью $A = \Gamma$ и нечетной $M = \overline{\Gamma}$. Супералгебра $J(\Gamma, D)$ проста тогда и только тогда, когда алгебра Γ D-проста (т. е. Γ не содержит собственных ненулевых D-инвариантных идеалов).

4. Дубль Кантора $J(\Gamma, \{\,,\})$. Пусть $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$ — ассоциативная суперкоммутативная супералгебра с единицей 1 и $\{\,,\} : \Gamma \mapsto \Gamma$ — суперкососимметрическое билинейное отображение, которое мы будем называть *скобкой*. По супералгебре Γ и скобке $\{\,,\}$ можно построить супералгебру $J(\Gamma, \{\,,\})$. Рассмотрим $J(\Gamma, \{\,,\}) = \Gamma \oplus \Gamma x$ — прямую сумму пространств, где Γx — изоморфная копия пространства Γ. Пусть a, b — однородные элементы из Γ. Тогда операция умножения $\cdot$ на $J(\Gamma, \{\,,\})$ определяется формулами

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot bx = (ab)x, \quad ax \cdot b = (-1)^{p(b)}(ab)x, \quad ax \cdot bx = (-1)^{p(b)}\{a, b\}.$$

Положим $A = \Gamma_0 + \Gamma_1 x$ и $M = \Gamma_1 + \Gamma_0 x$. Тогда $J(\Gamma, \{\,,\})= A + M$ является Z_2-градуированной алгеброй.

Скобка $\{\,,\}$ называется *йордановой*, если супералгебра $J(\Gamma,\{\,,\})$ является йордановой супералгеброй. Как известно (см. [11]), $\{\,,\}$ — йорданова скобка тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + (-1)^{p(a)p(b)}b\{a, c\} - \{a, 1\}bc, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\{a, \{b, c\}\} = \{\{a, b\}, c\} + (-1)^{p(a)p(b)}\{b, \{a, c\}\} + \{a, 1\}\{b, c\}\\ + (-1)^{p(a)(p(b)+p(c))}\{b, 1\}\{c, a\} + (-1)^{p(c)(p(a)+p(b))}\{c, 1\}\{a, b\},\end{aligned} \tag{4}$$

$$\{d, \{d, d\}\} = \{d, d\}\{d, 1\}, \tag{5}$$

где $a, b, c \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $d \in \Gamma_1$.

Пусть K — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей 1 и дифференцированием D. Рассмотрим пространство $\Gamma = K \oplus Kn$, где Kn — изоморфная копия пространства K. Положим $\Gamma_0 = K$, а $\Gamma_1 = Kn$. Определим на $\Gamma = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1$ операцию умножения и скобку $\{\,,\}$, полагая

$$(a + bn)(c + dn) = ac + (ad + cb)n,$$

$$\{a, b\} = a^D b - b^D a, \quad \{a, bn\} = -\{bn, a\} = -(b^D a)n, \quad \{an, bn\} = -ab,$$

где $a, b \in K$ и ab — произведение в K. В [9] показано, что $\{\,,\}$ — йорданова скобка. Поэтому супералгебра $J(\Gamma,\{\,,\})$ является йордановой супералгеброй. Более того, ввиду [4] супералгебра $J(\Gamma,\{\,,\})$ проста тогда и только тогда, когда алгебра K D-проста. Полученную таким образом супералгебру будем обозначать через $J(K[n], D)$.

Приведем еще одно представление супералгебры $J(K[n], D)$.

Предложение 1. *В супералгебре $J(K[n], D)$ четная часть A равна $K+Ks$, нечетная часть M равна $Kn+Km$. Умножение в $J(K[n], D)$ относительно этого представления определяется формулами*

$$(a + bs)(c + ds) = ac + bd + (ad + cb)s, \quad (a + bs)(dn + cm) = (b^D c + ad)n + (ac)m,$$

$$am \cdot bm = a^D b - b^D a, \quad an \cdot bm = (ab)s, \quad an \cdot bn = 0$$

где $a, b, c, d \in K$.

Доказательство. По построению $J(K[n], D) = \Gamma \oplus \Gamma x$, где $\Gamma = K + Kn$. Поэтому положим $s = nx$, $m = x$. Тогда $A = K + Ks$ и $M = Kn + Km$. Если $a, b, c, d \in K$, то

$$\begin{aligned}(a + bs)(c + ds) &= (a + (bn)x)(c + (dn)x)\\ &= ac + (-1)^{p(dn)}\{bn, dn\} + ((ad + cb)n)x = ac + bd + (ad + cb)s,\end{aligned}$$

$$am \cdot bm = (ax)(bx) = (-1)^{p(b)}\{a, b\} = a^D b - b^D a,$$

$$an \cdot bm = (an)(bx) = (ab)(nx) = (ab)s.$$

Ясно, что $an \cdot bn = 0$.

Пусть $B = B_0 + B_1$ — ассоциативная Z_2-градуированная алгебра с операцией умножения $*$. Определив на пространстве B суперсимметрическое произведение

$$a \circ_s b = \frac{1}{2}(a * b + (-1)^{p(a)p(b)} b * a), \quad a, b \in B_0 \cup B_1,$$

мы получим йорданову супералгебру B^+. Йорданова супералгебра $J = A + M$ называется *специальной*, если она изоморфно вложима (как Z_2-градуированная алгебра) в супералгебру B^+ для подходящей ассоциативной Z_2-градуированной алгебры B.

Предложение 2. *Супералгебра $J(K[n],D)$ специальна.*

Доказательство. Пусть $A=K+Ks$ и $M=Kn+Km$ — представление супералгебры $J(K[n],D)$ из предложения 1. Положим $e_1=\frac{1}{2}(1+s)$, $e_2=\frac{1}{2}(1-s)$ и $l=\frac{1}{2}n$. Тогда для любых $a,b\in K$ получаем

$$ae_1\cdot bm=\frac{1}{2}(1+s)a\cdot bm=\frac{1}{2}(ab)m+(a^Db)l,$$

$$ae_2\cdot bm=\frac{1}{2}(1-s)a\cdot bm=\frac{1}{2}(ab)m-(a^Db)l,$$

$$ae_1\cdot bl=\frac{1}{4}(1+s)a\cdot bn=\frac{1}{2}(ab)l,\quad ae_2\cdot bl=\frac{1}{4}(1-s)a\cdot bn=\frac{1}{2}(ab)l,$$

$$am\cdot bm=a^Db-b^Da,\quad al\cdot bl=0,$$

$$am\cdot bl=-bl\cdot am=\frac{1}{2}ab(-e_1+e_2).$$

Определим вложение $J(K[n],D)\mapsto M_2(\mathrm{End}(K))^+$, полагая

$$ae_1+be_2+cm+dl\mapsto\begin{pmatrix}R_a & 4DR_c+2R_{c^D}+R_d\\ R_c & R_b\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что указанное отображение является изоморфным вложением супералгебр.

В дальнейшем символ дифференцирования, если он имеет индексы, будем записывать справа от аргумента.

Пусть A — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, M — конечнопорожденный ассоциативный и коммутативный A-модуль с порождающими $x_1,\dots,x_n$, D_{ij} — дифференцирования алгебры A и γ_{ij} — элементы из A, где $i,j=1,\dots,n$. Предположим, что на пространстве $J=A+M$ задана структура Z_2-градуированной алгебры и относительно этой структуры произведение однородных элементов удовлетворяет условиям

$$a\cdot b=ab,\quad a\cdot bx_i=bx_i\cdot a=(ab)x_i,$$

$$ax_i\cdot bx_j=\gamma_{ij}\cdot ab+aD_{ij}b-bD_{ji}a=\Gamma_{ij}(a,b),$$

где $a,b\in A$ и ab — произведение элементов в алгебре A. Справедливо следующее

Предложение 3. *Пространство J является йордановой супералгеброй тогда и только тогда, когда элементы γ_{ij} и дифференцирования D_{ij} удовлетворяют условиям*

$$\gamma_{ij}=-\gamma_{ji}, \tag{6}$$

$$\Gamma_{ij}(a,b)D_{kl}d-\Gamma_{il}(a,d)D_{kj}b+\Gamma_{jl}(b,d)D_{ki}a=0, \tag{7}$$

$$aD_{ik}x_j=aD_{jk}x_i \tag{8}$$

для любых $i,j,k=1,\dots,n$ и $a,b,d\in A$.

Доказательство. Докажем равносильность условий данного предложения равенствам (1) и (2). Ясно, что (6) равносильно суперкоммутативности умножения в J. Поэтому достаточно проверить, что (2) равносильно (7) и (8).

Пусть $a,b,c,d\in A$. Тогда равенство

$$((ax_i\cdot bx_j)\cdot c)\cdot d+((ax_i\cdot d)\cdot c)\cdot bx_j+ax_i\cdot((bx_j\cdot d)\cdot c)$$
$$=(ax_i\cdot bx_j)\cdot(c\cdot d)+(ax_i\cdot c)\cdot(bx_j\cdot d)+(ax_i\cdot d)\cdot(bx_j\cdot c)$$

равносильно такому:

$$\gamma_{ij}abcd + (adc)D_{ij}b - bD_{ji}adc + \gamma_{ij}abcd + aD_{ij}bcd - (bdc)D_{ji}a$$
$$= \gamma_{ij}abcd + (ac)D_{ij}bd - (bd)D_{ji}ac + \gamma_{ij}abcd + (ad)D_{ij}bc - (bc)D_{ji}ad.$$

Справедливость последнего равенства получаем прямым вычислением. Поскольку M — ассоциативный и коммутативный A-модуль, отсюда следует справедливость (2) для элементов $c, d \in A$ и $x \in M$.

Докажем (2) для элементов bx_j, cx_k, dx_l. Действие операторного равенства (2) на элементе ax_i эквивалентно

$$[(ax_i \cdot bx_j) \cdot cx_k] \cdot dx_l + bx_j \cdot [(ax_i \cdot dx_l) \cdot cx_k] - ax_i \cdot [(bx_j \cdot dx_l) \cdot cx_k]$$
$$= (ax_i \cdot bx_j)(cx_k \cdot dx_l) - (ax_i \cdot cx_k)(bx_j \cdot dx_l) + (ax_i \cdot dx_l)(bx_j \cdot, cx_k),$$

которое равносильно равенству

$$(\gamma_{kl}\Gamma_{ij}(a,b)cd + (\Gamma_{ij}(a,b)c)D_{kl}d - dD_{lk}\Gamma_{ij}(a,b)c) + (\gamma_{jk}\Gamma_{il}(a,d)bc + bD_{jk}\Gamma_{il}(a,d)c$$
$$- (\Gamma_{il}(a,d)c)D_{kj}b) - (\gamma_{ik}ac\Gamma_{jl}(b,d) + aD_{ik}c\Gamma_{jl}(b,d) - (c\Gamma_{jl}(b,d))D_{ki}a)$$
$$= \Gamma_{ij}(a,b)\Gamma_{kl}(c,d) - \Gamma_{ik}(a,c)\Gamma_{jl}(b,d) + \Gamma_{il}(a,d)\Gamma_{jk}(b,c).$$

Поскольку D_{kl} — дифференцирование, имеем

$$\gamma_{kl}\Gamma_{ij}(a,b)cd + (\Gamma_{ij}(a,b)c)D_{kl}d - dD_{lk}\Gamma_{ij}(a,b)c = \gamma_{kl}\Gamma_{ij}(a,b)cd + (\Gamma_{ij}(a,b))D_{kl}cd$$
$$+ cD_{kl}\Gamma_{ij}(a,b)d - dD_{lk}\Gamma_{ij}(a,b)c = \Gamma_{kl}(c,d)\Gamma_{ij}(a,b) + (\Gamma_{ij}(a,b))D_{kl}cd.$$

Следовательно,

$$\Gamma_{kl}(c,d)\Gamma_{ij}(a,b) + (\Gamma_{ij}(a,b))D_{kl}cd + \Gamma_{jk}(b,c)\Gamma_{il}(a,d)$$
$$- (\Gamma_{il}(a,d))D_{kj}bc - \Gamma_{jl}(b,d)\Gamma_{ik}(a,c) + (\Gamma_{jl}(b,d))D_{ki}ac$$
$$= \Gamma_{ij}(a,b)\Gamma_{kl}(c,d) - \Gamma_{ik}(a,c)\Gamma_{jl}(b,d) + \Gamma_{il}(a,d)\Gamma_{jk}(b,c).$$

Последнее равенство равносильно

$$((\Gamma_{ij}(a,b))D_{kl}d - (\Gamma_{il}(a,d))D_{kj}b + (\Gamma_{jl}(b,d))D_{ki}a)c = 0,$$

что эквивалентно (7).

На элементе d операторное равенство (2) эквивалентно

$$[(d \cdot ax_i) \cdot cx_k]bx_j - [(ax_i \cdot bx_j) \cdot cx_k] \cdot d - ax_i \cdot [(bx_j \cdot d) \cdot cx_k]$$
$$= -(ax_i \cdot bx_j)(cx_k \cdot d) + (ax_i \cdot cx_k)(bx_j \cdot d) - (ax_i \cdot d)(bx_j \cdot cx_k).$$

Это равенство равносильно

$$-[(ad)D_{ik}cb]x_j + [(bd)D_{jk}ac]x_i = -[aD_{ik}cdb]x_j + [bD_{jk}acd]x_i,$$

которое эквивалентно $dD_{ik}x_j = dD_{jk}x_i$.

Следовательно, (2) имеет место для $x, y, z \in M$. Отсюда получаем, что (2) имеет место для $a \in A$ и $x, y \in M$.

Таким образом, предложение доказано.

Если C — произвольная ассоциативная алгебра, то, вводя на пространстве C симметрическое умножение

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba), \quad a, b \in C,$$

мы получим йорданову алгебру $C^{(+)}$.

Пусть a, b, c — произвольные элементы алгебры C. Положим $[a,b] = ab - ba$, $(a,b,c)^+ = (a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c)$. Хорошо известно, что для ассоциативной алгебры справедливы следующие соотношения:

$$[a \circ b, c] = [a,c] \circ b + [b,c] \circ a, \tag{9}$$

$$[a \circ b, c] + [b \circ c, a] + [c \circ a, b] = 0, \tag{10}$$

$$[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0, \tag{11}$$

$$(a,b,c)^+ = \frac{1}{4}[b,[a,c]]. \tag{12}$$

Пусть $J = A + M$ — произвольная йорданова супералгебра. Если $a, b, c \in J$, то положим $(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$. Для любых однородных элементов a, b, c супералгебры J справедливо тождество

$$(a,b,c) + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)}(b,c,a) + (-1)^{p(a)p(c)+p(b)p(c)}(c,a,b) = 0. \tag{13}$$

Лемма 1. *Для супералгебры $J = A + M$ имеет место включение*

$$[((M,A,A) + A(M,A,A))M]M \subseteq (M,A,A) + A(M,A,A).$$

Доказательство. Будем писать $x \equiv y$, если $x - y \in (M,A,A) + A(M,A,A)$. Пусть $a, b, c \in A$ и $m, n, k \in M$.

Хорошо известно, что для любых однородных элементов x, y суперкоммутатор $D_{x,y} = R_x R_y - (-1)^{p(x)p(y)} R_y R_x$ является супердифферецированием в йордановой супералгебре J, что равносильно

$$(x, tz, y) = (-1)^{p(x)p(t)} t(x,z,y) + (-1)^{p(y)p(z)}(x,t,y)z. \tag{14}$$

Значит, для $D = D_{m,b}$ имеем

$$\begin{aligned}((m,a,b)n)k &\equiv ((m,a,b),n,k) = (aD_{m,b},n,k) = (aD,n,k) \\ &= (a,nD,k) - (a,n,kD) + (a,n,k)D \subseteq (A,A,M) + (A,M,A) \subseteq (A,A,M).\end{aligned}$$

Пусть теперь $m' = (m,a,b)$ и $c \in A$. Тогда

$$\begin{aligned}((m'c)n)k &= (m'c)(nk) + (m'c,n,k) \\ &= m'(c(nk)) + (m',c,nk) + (m'c,n,k) \equiv (m'c,n,k).\end{aligned}$$

По суперлинеаризованному основному йорданову тождеству

$$(m'c,n,k) = (m',n,kc) + (c,n,m'k) \equiv ((m,a,b),n,kc) \equiv 0$$

ввиду доказанного выше. Отсюда следует искомый результат.

Пусть йорданова супералгебра J является подалгеброй супералгебры B^+. Тогда $a \circ_s b = a \circ b$ для $a, b \in A$, $m \circ_s n = \frac{1}{2}[m,n]$ для $m, n \in M$ и $a \circ_s m = a \circ m$.

Наша цель — доказать, что справедлива

Теорема 1. *Пусть $J = A + M$ — простая специальная унитальная йорданова супералгебра с ассоциативной четной частью. Тогда у супералгебры J существует такая ассоциативная обертывающая, в которой справедливо $[a,b] = 0$ для любых элементов $a, b \in A$.*

Сначала докажем два вспомогательных утверждения. Пусть J является подалгеброй супералгебры B^+.

Предложение 4. *Пространство $[A,A]B$ не содержит единицы супералгебры J.*

Доказательство. Пусть $1 \in [A,A]B$. Тогда $1 = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i c_i$, где $d_i = [a_i, b_i]$, $a_i, b_i \in A$ и $c_i \in B$. Выберем минимальное число k, для которого $1 = \sum\limits_{i=1}^{k} d_i c_i$. Из последнего равенства получаем $d_1 = \sum\limits_{i=1}^{k} d_1 d_i c_i$. В силу ассоциативности алгебры A, (9) и (11) имеем

$$[a_1, b_1]^2 = [[a_1^2, b_1], b_1] - a_1 \circ [[a_1, b_1], b_1] \in A \circ (A, A, A)^+ = 0,$$

$$[d_1, d_i] = [[d_1, a_i], b_i] + [a_i, [d_1, b_i]] \in [(A, A, A)^+, A] = 0.$$

Поэтому

$$d_1 = \sum_{i=1}^{k} d_1 d_i c_i = d_1 d_1 c_1 + \sum_{i=2}^{k} d_1 d_i c_i = \sum_{i=2}^{k} d_i d_1 c_i.$$

Следовательно,

$$1 = d_1 c_1 + \sum_{i=2}^{k} d_i c_i = \sum_{i=2}^{k} d_i d_1 c_i c_1 + \sum_{i=2}^{k} d_i c_i = \sum_{i=2}^{k} d_i (d_1 c_i c_1 + c_i).$$

Получили противоречие с выбором числа k. Поэтому $k = 1$ и $1 = d_1 c_1$. Тогда $d_1 = d_1^2 c_1 = 0$.

Таким образом, $1 \notin [A,A]B$.

Предложение 5. *Пространство $M[A,A]B$ не содержит единицы супералгебры J.*

Доказательство. Пусть $1 \in M[A,A]B$. Тогда $[A,A] \subseteq [A,A]M[A,A]B$. Поэтому

$$1 \in M[A,A]M[A,A]B.$$

Так как

$$M[A,A] \subseteq [A,A]M + [M,[A,A]] \subseteq [A,A]M + (A,M,A)^+ \subseteq [A,A]M + M,$$

имеем

$$1 \in [A,A]MM[A,A]B + MM[A,A]B.$$

В силу (10)

$$[M \circ M, A] \subseteq [M \circ A, M] \subseteq [M,M] \subseteq A.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} MM[A,A] &\subseteq [A,A]MM + [MM,[A,A]] \\ &\subseteq [A,A]MM + [M \circ M,[A,A]] + [[M,M],[A,A]] \\ &\subseteq [A,A]MM + [A,[M \circ M, A]] + (A,A,A)^+ \subseteq [A,A]MM + [A,A]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$1 \in [A,A]MM[A,A]B + [A,A]MMB + [A,A]B \subseteq [A,A]B,$$

что противоречит предложению 4.

Доказательство теоремы 1. Не теряя общности, можно считать, что ассоциативная алгебра B порождена пространствами A и M.

В алгебре B рассмотрим пространство $I = \sum\limits_{k,l\geq 0} [A,A]A^kM^{2l}$. Очевидно, что $I \subseteq B_0$. Так как

$$[A,[A,A]] = 0, MM[A,A] \subseteq [A,A]MM + [A,A]$$

и

$$AM \subseteq MA + A\circ M \subseteq MA + M, \quad MA \subseteq AM + A\circ M \subseteq AM + M,$$

то $AI \subseteq I$, $MMI \subseteq I$ и $IA \subseteq I$. Ясно, что $IMM \subseteq I$. Следовательно, $K = I + MIM + IM + MI$ — Z_2-градуированный идеал алгебры B. При этом $AMIM, MIMA \subseteq MIM$ и $MMMIM, MIMMM \subseteq MIM$, т. е. MIM — идеал алгебры B_0.

Покажем, что $1 \notin I + MIM$. Пусть $1 \in I + MIM$. Тогда $1 = \sum\limits_{i=1}^{k} d_ic_i + h$, где $d_i = [a_i,b_i], a_i, b_i \in A$, $c_i \in B_0$ и $h \in MIM$. Выберем минимальное число k для такого представления 1. Поскольку $d_1^2 = 0$, $[[A,A],[A,A]] = 0$ и $[A,A]MIM \subseteq MIM$, имеем

$$d_1 = \sum_{i=1}^{k} d_1d_ic_i + d_1h = \sum_{i=2}^{k} d_id_1c_i + h_1,$$

где $h_1 = d_1h \in MIM$. Поэтому

$$1 = \sum_{i=1}^{k} d_ic_i + h = d_1c_1 + \sum_{i=2}^{k} d_ic_i + h = \sum_{i=2}^{k} d_i(d_1c_ic_1 + c_i) + (h_1c_1 + h).$$

Так как $d_1c_ic_1 + c_i \in B_0$, $h_1c_1 + h \in MIM$, в силу выбора числа k получаем, что $1 = d_1c_1 + h$. Следовательно, $d_1 = d_1h \in MIM$. Поэтому $1 \in MIM \subseteq M[A,A]B$. Противоречие с предложением 5. Отсюда следует, что $J \cap K = 0$.

Рассмотрим фактор-алгебру $\overline{B} = B/K$. Тогда супералгебра J изоморфно вкладывается в супералгебру $\overline{B}^+$. Ясно, что в алгебре $\overline{B}^+$ коммутатор образов двух элементов из A равен нулю. Тем самым фактор-алгебра B/K — искомая ассоциативная обертывающая супералгебры J.

В дальнейшем $J = A + M$ — простая специальная унитальная йорданова супералгебра, ее четная часть A — ассоциативная алгебра. Супералгебра J является подалгеброй супералгебры B^+. При этом ассоциативная алгебра B удовлетворяет заключению теоремы 1 и порождена пространствами A, M.

Следствие 1. *Для любых элементов $a, b \in A$ и любого $m \in M$ выполнимо равенство $(a,m,b) = 0$.*

Лемма 2. *Для супералгебры J выполняется одно из равенств*

$$(M,A,A) = 0, \quad M = (M,A,A).$$

Доказательство. Пусть $N = (M,A,A)$ и $I = (NM)A + N$. Покажем, что пространство I — идеал в J. Поскольку для элементов $a,b,c \in A$ и $m \in M$ имеет место

$$(m,a,b)c = -m(a,b,c) + (ma,b,c) + (m,a,bc) - (m,ab,c) \in (M,A,A),$$

то $AN \subseteq N$. Поэтому $AI \subseteq I$. Ясно, что $NM \subseteq I$. По лемме 1 получаем

$$[(NM)A]M \subseteq (NM,A,M) + (NM)M \subseteq N.$$

Следовательно, I — идеал в J. Ввиду простоты супералгебры J имеем две возможности, а именно либо $(M,A,A) = 0$, либо $M = (M,A,A)$.

§ 2. Супералгебры с условием $(M, A, A) = 0$

В этом параграфе будем предполагать, что $J = A+M$ — простая специальная унитальная йорданова супералгебра, ее четная часть A — ассоциативная алгебра, а нечетная часть M — ассоциативный A-модуль, т. е. $(M, A, A) = 0$.

Но сначала докажем следующее техническое

Предложение 6. *Пусть супералгебра J удовлетворяет условиям теоремы 1 и a, b — четные, а n, m — нечетные элементы супералгебры J. Тогда имеет место равенство*

$$[a \circ m, b \circ n] = (a \circ [m, n]) \circ b + (m \circ [a, n]) \circ b + a \circ ([m, b]) \circ n) + (a, [m, b], n)^+$$

и справедливо включение

$$([[A, M], [A, M]], M, M) \subseteq [[A, M], [A, M]] + [(A, A, M), M] + [A, M] \circ (A, A, M).$$

Доказательство. В силу (9) и теоремы 1

$$[a \circ m, b \circ n] = (a \circ [m, n]) \circ b + (m \circ [a, n]) \circ b + a \circ ([m, b]) \circ n) + (a, [m, b], n)^+.$$

Так как $M \circ [A, M] \subseteq A$, имеем $(a, [m, b], n)^+ \in A$. Следовательно,

$$I = [[A, M], [A, M]] \subseteq A.$$

Ввиду (9), теоремы 1 и (12) получаем, что

$$A \circ I \subseteq [A \circ [A, M], [A, M]] + [A, M] \circ [A, [A, M]] \subseteq I + [A, M] \circ (A, A, M).$$

Поскольку $M \circ [A, M] \subseteq A$, по (9) имеем

$$M \circ I \subseteq [M \circ [A, M], [A, M]] + [A, M] \circ [[A, M], M] \subseteq (A, A, M) + [A, M] \circ [[A, M], M].$$

Поэтому в силу (10)

$$\begin{aligned}[M \circ I, M] &\subseteq [(A, A, M), M] + [[A, M] \circ [[A, M], M], M] \\ &\subseteq [(A, A, M), M] + [M \circ [[A, M], M], [A, M]] + [[A, M] \circ M, [[A, M], M]] \\ &\subseteq [(A, A, M), M] + [M \circ [[A, M], M], [A, M]] + [A, [[A, M], M]].\end{aligned}$$

По (9) и теореме 1

$$\begin{aligned}[M \circ [[A, M], M], [A, M]] &\subseteq [[M, M \circ [A, M]], [A, M]] + [[A, M] \circ [M, M], [A, M]] \\ &\subseteq [[A, M], [A, M]],\end{aligned}$$

а по (11)

$$[A, [[A, M], M]] \subseteq [[A, M], [A, M]] + [M, (A, A, M)].$$

Следовательно,

$$[M \circ I, M] \subseteq [(A, A, M), M] + [[A, M], [A, M]].$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(I, M, M) &\subseteq [M \circ I, M] + I \circ [M, M] \\ &\subseteq [[A, M], [A, M]] + [(A, A, M), M] + [A, M] \circ (A, A, M).\end{aligned}$$

Предложение 7. *Для любых $a, b \in A$ и $n, m \in M$ выполняются равенства*

$$[n, a] \circ [m, b] = 0, \tag{15}$$

$$[[a, n], [m, b]] = (a, [m, b], n)^+ = 0, \tag{16}$$

$$am \cdot bn = ab(mn) + (a, m, n)b - a(b, n, m). \tag{17}$$

Отображение $D_{m,n} : A \mapsto A$, заданное правилом $aD_{m,n} = (a, m, n)$, является дифференцированием алгебры A. Кроме того, для любых $a, b \in A$ и $x, y \in M$ выполняются равенства

$$aD_{x,y}b = aD_{xb,y} = aD_{x,yb}.$$

Доказательство. Пусть $a, b \in A$, $n, m \in M$. Поскольку

$$(a, n, m) = (an)m - a(nm) = \frac{1}{2}([a \circ n, m] - a \circ [n, m]),$$

то по (9) $n \circ [a, m] = 2(a, n, m) \in A$. Тогда ввиду (9) и теоремы 1 получаем $[n, a] \circ [m, b] = [[n, a] \circ m, b] - m \circ [[n, a], b] = 0$. Отсюда $[[n, a], [m, b]] = 2[n, a] * [m, b]$ и $[[n, a], [m, b]]^2 = -4[n, a]^2 * [m, b]^2 = 0$.

Пусть $I = [[A, M], [A, M]]$. Так как $A \circ I \subseteq I + [A, M] \circ (A, A, M)$ и $(A, A, M) = 0$, то I — идеал алгебры A. По предложению 6 $(I, M, M) \subseteq I$.

Рассмотрим пространство $K = I + MI$. В силу следствия 1 имеем $AK \subseteq K$. Поскольку $(IM)M \subseteq (I, M, M) + I(MM) \subseteq I$, то K — идеал супералгебры J. Если $K = J$, то $1 \in I$, т. е. $1 = \sum\limits_i [[a_i, n_i], [b_i, m_i]]$. По доказанному каждый из $[[a_i, n_i], [b_i, m_i]]$ — нильпотентный элемент алгебры A, но в ассоциативной коммутативной алгебре сумма нильпотентных элементов снова нильпотентный элемент. Следовательно, $K = 0$ и $I = 0$. Поскольку

$$(a, [m, b], n)^+ = \frac{1}{4}[[m, b], [a, n]] = 0,$$

имеет место (16). Так как $n \circ [a, m] = 2(a, n, m)$, в силу предложения 6 получаем

$$am \cdot bn = ab(mn) + (a, m, n)b - a(b, n, m).$$

Таким образом, справедливо равенство (17).

Докажем, что $D_{m,n}$ — дифференцирование алгебры A. Действительно, в силу (9) имеем

$$(ab)D_{m,n} = (ab, m, n) = \frac{1}{2} m \circ [ab, n] = \frac{1}{2} m \circ (a \circ [b, n] + b \circ [a, n]).$$

Поэтому ввиду (16)

$$(ab)D_{m,n} = \frac{1}{2}(a \circ (m \circ [b, n]) + b \circ (m \circ [a, n])) = aD_{m,n}b + bD_{m,n}a.$$

Тем самым $D_{m,n}$ — дифференцирование алгебры A.

Пусть $a, b \in A$ и $x, y \in M$. Тогда $aD_{x,y}b = (a, x, y)b = (a, xb, y)$, т. е. $aD_{x,y}b = aD_{xb,y}$. С другой стороны,

$$2(a, xb, y) = (xb) \circ [a, y] = x \circ (b \circ [a, y]) + (x, b, [a, y])^+.$$

Согласно (11) и (16)

$$4(x, b, [a, y])^+ = [b, [x, [a, y]]] = 0.$$

Поэтому в силу теоремы 1

$$2aD_{x,y}b = x \circ (b \circ [a, y]) = x \circ [a, yb] = 2aD_{x,yb}.$$

Лемма 3. *Пусть $K = (A, M, M)$. Тогда либо $K = A$, либо $K = 0$. Если $K = 0$, то алгебра A — поле и лежит в суперцентре супералгебры J, а J как алгебра над полем A является супералгеброй невырожденной билинейной суперформы.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $I = K + KM$. Тогда по (14) и следствию 1 $AI \subseteq I$. Ясно, что $IM \subseteq KM + (K, M, M) + K(MM) \subseteq I$. Поэтому I — идеал в J. Если $I = J$, то $K = A$. Предположим, что $K \neq A$. Тогда $I = 0$ и $K = 0$. Следовательно, $(M, M, A) = 0$. Ввиду (13) получаем $(M, A, M) \subseteq (A, M, M) + (M, M, A) = 0$. Следовательно, A лежит в суперцентре супералгебры J и поэтому является полем. Таким образом, для любых $n, m \in M$ функция $f(n, m) = nm$ определяет на пространстве M кососимметрическую билинейную форму. Очевидно, что ядро формы f является идеалом супералгебры J, который равен нулю. Поэтому форма f невырожденна на M, а J как алгебра над полем A является супералгеброй невырожденной билинейной суперформы.

Теорема 2. *Пусть $J = A + M$ — простая специальная унитальная йорданова супералгебра, ее четная часть A — ассоциативная алгебра, а нечетная часть M — ассоциативный A-модуль. Предположим, что J не является супералгеброй невырожденной билинейной суперформы. Тогда существуют такие элементы $x_1, \dots, x_n \in M$, что $M = Ax_1 + \dots + Ax_n$ и произведение в M задается равенством*

$$ax_i \cdot bx_j = \gamma_{ij} \cdot ab + aD_{ij}b - bD_{ji}a, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{18}$$

где $\gamma_{ij} \in A$, а D_{ij} — дифференцирование алгебры A. Алгебра A является дифференциально простой относительно множества дифференцирований $\Delta = \{D_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$.

Доказательство. По условию теоремы в силу леммы 3 $(A, M, M) = A$. Следовательно, $1 = \sum\limits_i (a_i, x_i, y_i)$, где $a_i \in A$ и $x_i, y_i \in M$. По (14) для любого $m \in M$ имеем

$$m = \sum_i (a_i, x_i, y_i)m = -\sum_i (a_i, x_i m, y_i) + \sum_i (a_i, m, y_i)x_i = \sum_i (a_i, m, y_i)x_i.$$

Таким образом, $M = Ax_1 + \dots + Ax_n$.

Пусть $\gamma_{ij} = x_i x_j$ и $D_{ij} = D_{x_i, x_j}$. Ввиду предложения 7 D_{ij} — дифференцирование алгебры A. В силу (17) для любых элементов $a, b \in A$ получаем

$$ax_i \cdot bx_j = \gamma_{ij} \cdot ab + aD_{ij}b - bD_{ji}a.$$

Пусть $\Delta = \{D_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n\}$ и I — идеал из A, инвариантный относительно элементов из Δ. По предложению 7 имеем

$$(I, M, M) \subseteq \sum_{ij} (I, Ax_i, Ax_j) \subseteq A \sum_{ij} ID_{ij}.$$

Отсюда вытекает, что $(I, M, M) \subseteq I$, т. е. пространство $I + IM$ — идеал супералгебры J. Тогда либо $I = 0$, либо $I = A$. Таким образом, A является Δ-простой алгеброй.

Лемма 4. *Пусть супералгебра $J = A + M$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и четная часть A супералгебры J является локальной алгеброй. Тогда J изоморфна супералгебре $J(\Gamma, D)$, где Γ — ассоциативная и коммутативная D-простая алгебра с $0 \neq D \in \mathrm{Der}(\Gamma)$. В частности, если супералгебра J имеет положительную характеристику $p > 2$, то J изоморфна супералгебре $J(\Gamma, D)$.*

Доказательство. Пусть $a \in A$, $x \in M$ и $(a, M, x) = A$. Тогда $1 = (a, y, x)$ для некоторого $y \in M$. По (14) для любого $m \in M$

$$m = (a, y, x)m = -(a, ym, x) + (a, m, x)y = (a, m, x)y.$$

Таким образом, $M = Ay$. Ввиду теоремы 2 получаем $n = 1$, $x_1 = y$, в этом случае $J \cong J(\Gamma, D)$ для $\Gamma = A$, $D = D_{11}$ и $\gamma_{11} = 0$. Ясно, что алгебра A является D-простой и $D \neq 0$.

Пусть A — локальная алгебра с максимальным идеалом I. Согласно теореме 2 алгебра A является Δ-простой. Поэтому $I\Delta \nsubseteq I$. Тем самым для некоторых $a \in A$ и $x \in M$ имеем $(a, M, x) \nsubseteq I$. В силу (14) (a, M, x) — идеал в A. Следовательно, $(a, M, x) = A$. Ввиду вышедоказанного супералгебра J изоморфна супералгебре $J(\Gamma, D)$.

Пусть супералгебра J имеет положительную характеристику $p > 2$. Тогда в силу [12] всякая дифференциально простая ассоциативная коммутативная алгебра положительной характеристики является локальной, поэтому в данном случае A — локальная алгебра.

Предложение 8. *Пусть супералгебра $J = A + M$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда для любых $a, b \in A$ и $x, y, u, v \in M$ выполняются равенства*

$$(aD_{x,y})(bD_{u,v}) = (aD_{u,y})(bD_{x,v}), \quad D_{x,y} = D_{y,x}.$$

Доказательство. Докажем первое равенство. По предложению 7 и (8) имеем

$$(aD_{x,y})(bD_{u,v}) = aD_{bD_{u,v}x,y} = aD_{bD_{x,v}u,y} = (aD_{u,y})(bD_{x,v}).$$

Докажем второе равенство. Согласно теореме 2 и предложению 7 достаточно проверить, что $D_{ij} = D_{ji}$ для любых индексов $i, j = 1, \dots, n$. Если супералгебра J изоморфна супералгебре $J(\Gamma, D)$, то все доказано. Поэтому в силу леммы 5 можно считать, что J имеет характеристику, равную нулю. Тогда ввиду [13] дифференциально простая алгебра A не содержит делителей нуля.

Пусть x — ненулевой элемент из M. Покажем, что $D_{x,x}$ — ненулевое дифференцирование алгебры A. Предположим противное, т. е. $aD_{x,x} = 0$ для любого $a \in A$. Пусть y — произвольный ненулевой элемент из M. Тогда по предположению, предложению 7 и (8) получаем

$$(aD_{x,y})(aD_{x,y}) = aD_{x,aD_{x,y}y} = aD_{x,aD_{y,y}x} = (aD_{x,x})(aD_{y,y}) = 0.$$

Поскольку A не имеет делителей нуля, то $aD_{x,y} = 0$. По теореме 2 будет $1 = \sum\limits_i a_i D_{x_i,y_i}$. Поэтому

$$x = \sum_i a_i D_{x_i,y_i} x = \sum_i a_i D_{x,y_i} x_i = 0.$$

Если x, y — ненулевые элементы из M, то $D_{x,x}$ и $D_{y,y}$ — ненулевые дифференцирования алгебры A. Значит, $aD_{x,x} \neq 0$ и $bD_{y,y} \neq 0$ для некоторых элементов $a, b \in A$. Тогда

$$(aD_{x,y})(bD_{x,y}) = aD_{x,bD_{x,y}y} = aD_{x,bD_{y,y}x} = (aD_{x,x})(bD_{y,y}) \neq 0.$$

Следовательно, $D_{x,y}$ — ненулевое дифференцирование алгебры A.

Пусть теперь a — элемент из A такой, что $aD_{ij} \neq 0$. Тогда для любого $b \in A$

$$(bD_{ij})(aD_{ij}) = (bD_{ii})(aD_{jj}) = (bD_{ji})(aD_{ij}).$$

Поэтому $bD_{ij} = bD_{ji}$ для любых индексов i, j.

Таким образом, $D_{x,y} = D_{y,x}$ для любых $x, y \in M$.

Предложение 9. *Предположим, что супералгебра $J = A + M$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и $F = Z_0(J)$ (четная часть центра супералгебры J). Если супералгебра J не изоморфна $J(\Gamma, D)$, то поле F имеет характеристику 0 и F-алгебра A удовлетворяет условиям:*

(i) *A является дифференциально простой F-алгеброй, не содержит делителей нуля, и A-модуль M не имеет A-кручений;*

(ii) *M является проективным A-модулем ранга 1;*

(iii) *A-модуль ΔA образует F-подалгебру в алгебре Ли $\mathrm{Der}(A)$, также представляющую собой проективный A-модуль ранга 1;*

(iv) *для любого $D \in \Delta$ справедливо равенство $\ker D = F$;*

(v) *для любого $D \in \Delta$ алгебра A не является D-простой;*

(vi) *для любого $D \in \Delta$ образ дифференцирования D не содержит обратимых элементов алгебры A;*

(vii) *мультипликативная подполугруппа эндоморфизмов, порожденная множеством Δ в $\mathrm{End}_F(A)$, не содержит нуля;*

(viii) *A не является полулокальной алгеброй;*

(ix) *A не является алгеброй многочленов от конечного числа переменных.*

Доказательство. Первая часть (i) доказана в теореме 2. То, что алгебра A не содержит делителей нуля, следует из [13]. Покажем, что A-модуль M не имеет A-кручений. Пусть $a \in A$, $m \in M$ и $am = 0$. Тогда $(a, m, n) = -a(mn)$ для любого $n \in M$. В силу (14) имеем $a(a, m, n) = (a, am, n) + (a, a, n)m = 0$. Поскольку $(a, m, n) \in A$, то $(a, m, n) = 0$. Поэтому $a(mn) = 0$ и $mn = 0$, т. е. $mM = 0$. Следовательно, пространство $\{m \in M \mid am = 0\}$ является идеалом J. Таким образом, A-модуль M не имеет A-кручений.

(ii) Согласно [14, гл. II, § 5, п. 3, теорема 2] достаточно доказать, что для любого максимального идеала I алгебры A найдется такой элемент $f \in A \setminus I$, что f-локализованный A_f-модуль M_f будет однопорожденным. Так как I не является Δ-инвариантным, существуют такие $x, y \in M$ и $i \in I$, что $f = (i, x, y) \notin I$. Поэтому по (14) имеем $fm = (i, x, y)m = (i, m, y)x$, откуда $M_f = A_f x$.

(iii) В силу предложения 7 получаем, что A-модуль ΔA совпадает с аддитивной подгруппой в $\mathrm{Der}(A)$, порожденной дифференцированиями $D_{x,y}$, где $x, y \in M$.

Пусть $a, b \in A$ и $x, y, v, u \in M$. Тогда по предложению 8

$$\begin{aligned}(aD_{x,y})(bD_{u,v}) = (aD_{u,y})(bD_{x,v}) = (aD_{y,u})(bD_{v,x}) \\ = (aD_{v,u})(bD_{y,x}) = (aD_{u,v})(bD_{x,y}).\end{aligned}$$

Если теперь I — максимальный идеал, то, как и в (ii), выберем $i \in I$, $x, y \in M$ так, чтобы $f = iD_{x,y} \notin I$; тогда по доказанному $\Delta f \subseteq D_{x,y}A$, откуда $(\Delta A)_f = D_{x,y}A_f$.

Покажем, что ΔA — подалгебра в алгебре Ли $\mathrm{Der}(A)$. По предложению 8 имеем $D_{x,y} = D_{y,x}$ и $D_{u,v} = D_{v,u}$. Поэтому в силу (13) получаем $D_{x,y} = R_x \circ R_y$

и $D_{v,u} = R_v \circ R_u$. Поскольку

$$[R_x \circ R_y, R_v \circ R_u] = [R_x, R_v \circ R_u] \circ R_y + R_x \circ [R_y, R_v \circ R_u]$$
$$= -\frac{1}{2}(R_{(v,x,u)} \circ R_y + R_x \circ R_{(v,y,u)}),$$

имеем

$$[D_{x,y}, D_{u,v}] = -\frac{1}{2}(D_{(v,x,u),y} + D_{x,(v,y,u)}).$$

Отсюда следует, что ΔA — подалгебра в алгебре $\mathrm{Der}(A)$.

(iv) Пусть $(a, x, y) = 0$ для каких-то $a \in A$ и ненулевых $x, y \in M$. Тогда для любого $m \in M$ по (14) имеем $0 = (a, x, y)m = (a, m, y)x$. Так как M не имеет A-кручения, то $(a, m, y) = 0$ и в силу предложения 8 $(a, y, m) = 0$. Применяя опять (14), получаем $(a, n, m) = 0$ для любого $n \in M$. Таким образом, $a \in F$.

(v) Пусть A является D-простой для $D = D_{x,y} \in \Delta$. Повторяя рассуждения п. (ii), видим, что для любого максимального идеала I алгебры A существует такой элемент $f \notin I$, для которого $M_f = A_f x$. Следовательно, $M_I = (Ax)_I$ для всех I-локализаций. Отсюда $M = Ax$ (см., например, [14]) и J изоморфна $J(\Gamma, D)$. Получили противоречие.

(vi) Пусть $b \in A$, $x, y \in M$ и $c = (b, x, y)$. Тогда в силу (14) справедливо включение $cM \subseteq Ax$. Если теперь элемент c обратим, то $M = Ax$. Получили противоречие.

(vii) Пусть $D_1, \dots, D_n$ — дифференцирования из Δ такие, что $D_1 \dots D_n = 0$, а $D_1 \dots D_{n-1} \neq 0$. Тогда $(A)D_1 \dots D_{n-1} \subseteq \ker D_n$ и по (iv) $(A)D_{n-1}$ содержит обратимый элемент.

(viii) Пусть A — полулокальная алгебра, т. е. множество максимальных идеалов алгебры A конечно. Ввиду п. (ii) для любого максимального идеала I алгебры A фактор-модуль M/IM является однопорожденным A-модулем. Пусть $I_1, \dots, I_k$ — все максимальные идеалы алгебры A. Предположим, что $x \in M \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i M \neq \varnothing$. Тогда $M = Ax + IM$ для любого максимального идеала I, и по обобщенной лемме Накаямы получаем, что $M = Ax$. Следовательно, супералгебра J изоморфна $J(\Gamma, D)$. Поэтому $M = \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i M$, а так как поле F имеет нулевую характеристику, то $M = I_i M$ для некоторого I_i. В этом случае, как известно, аннулятор модуля M не равен нулю, что противоречит отсутствию A-кручений у модуля M. Таким образом, алгебра A не является полулокальной.

(ix) Это утверждение вытекает из того, что конечнопорожденный проективный модуль над кольцом многочленов является свободным [15].

Теперь приведем пример йордановой супералгебры, которая удовлетворяет условиям теоремы 2, но не изоморфна супералгебре $J(\Gamma, D)$.

Пусть $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел и $G = \mathbb{R}[\sin(t), \cos(t)]$ — ассоциативная коммутативная $\mathbb{R}$-алгебра, порожденная функциями $\sin(t)$ и $\cos(t)$. Рассмотрим супералгебру $J(G, D)$, где $D = \frac{d}{dt}$.

Пусть A — подалгебра в G, порожденная функциями $\sin(2t), \cos(2t)$, и M — A-модуль, порожденный в пространстве $\overline{G}$ элементами $\overline{\sin(t)}, \overline{\cos(t)}$. Тогда $J(\sin(t), \cos(t)) = A + M$ является подпространством в $J(G, D)$. Положим

$$D_{11} = D\sin^2(t), \quad D_{22} = D\cos^2(t), \quad D_{12} = D\sin(t)\cos(t).$$

Ясно, что D_{11}, D_{22}, D_{12} — дифференцирования алгебры A.

Предложение 10. *Подпространство $J(\sin(t),\cos(t)) = A + M$ — подсупералгебра йордановой супералгебры $J(G,D)$, причем если $\alpha,\beta \in A$, то*

$$\alpha\overline{\sin(t)}\cdot\beta\overline{\sin(t)} = \alpha D_{11}\beta - \beta D_{11}\alpha, \quad \alpha\overline{\cos(t)}\cdot\beta\overline{\cos(t)} = \alpha D_{22}\beta - \beta D_{22}\alpha,$$

$$\alpha\overline{\sin(t)}\cdot\beta\overline{\cos(t)} = \alpha\beta + \alpha D_{12}\beta - \beta D_{12}\alpha.$$

Более того, супералгебра $J(\sin(t),\cos(t))$ проста, и M не является свободным A-модулем.

Доказательство. Пусть $\alpha,\beta \in A$, тогда по определению умножения в супералгебре $J(G,D)$ получаем

$$\alpha\overline{\sin(t)}\cdot\beta\overline{\sin(t)} = (\alpha)D\sin^2(t)\beta - (\beta)D\sin^2(t)\alpha \in A,$$

$$\alpha\overline{\cos(t)}\cdot\beta\overline{\cos(t)} = (\alpha)D\cos^2(t)\beta - (\beta)D\cos^2(t)\alpha \in A,$$

$$\alpha\overline{\sin(t)}\cdot\beta\overline{\cos(t)} = \alpha\beta + (\alpha)D\sin(t)\cos(t)\beta - (\beta)D\sin(t)\cos(t)\alpha \in A.$$

Отсюда следует, что $J(\sin(t),\cos(t))$ — подсупералгебра в $J(G,D)$, и поэтому $J(\sin(t),\cos(t))$ является йордановой супералгеброй. Нетрудно видеть, что произведение нечетных элементов супералгебры $J(\sin(t),\cos(t))$ производится согласно равенству (18), при этом множество дифференцирований Δ равно $\{D_{11},D_{22},D_{12}\}$, а $\gamma_{12} = 1$.

Покажем, что A является Δ-простой алгеброй. Заметим, что алгебра A как линейное пространство над $\mathbb{R}$ порождена функциями $\sin(2kt),\cos(2kt)$, где k пробегает множество целых чисел. Пусть I — идеал алгебры A, инвариантный относительно множества дифференцирований Δ. Так как $D_{11}+D_{22} = D$, то I инвариантен относительно дифференцирования D. Пусть

$$a = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i\sin(2k_it) + \sum_{i=1}^{s}\beta_i\cos(2l_it),$$

где $\alpha_i,\beta_i \in \mathbb{R}$, — ненулевой элемент из I, для которого число $r+s$ является наименьшим. Не теряя общности, можно считать, что все k_i ненулевые. Тогда

$$(aD)D = -4\left(\sum_{i=1}^{r}k_i^2\alpha_i\sin(2k_it) + \sum_{i=1}^{s}l_i^2\beta_i\cos(2l_it)\right) \in I.$$

Следовательно,

$$ak_1^2 + \frac{1}{4}(aD)D = \sum_{i=2}^{r}\bigl(k_1^2-k_i^2\bigr)\alpha_i\sin(2k_it) + \sum_{i=1}^{s}\bigl(k_1^2-l_i^2\bigr)\beta_i\cos(2l_it) \in I.$$

В силу выбора элемента a получаем, что $k_i = \pm k_1$, $i = 1,\dots,r$, и $l_i = \pm k_1$, $i = 1,\dots,s$. Поэтому $a = \alpha\sin(2kt)+\beta\cos(2kt)$, где $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ и $k \neq 0$. Тогда

$$aD = 2k\alpha\cos(2kt) - 2k\beta\sin(2kt) \in I$$

и $2k\beta a + \alpha aD = 2k(\beta^2+\alpha^2)\cos(2kt) \in I$. Следовательно, $\cos(2kt) \in I$ и $\sin(2kt) = -\frac{1}{2k}\cos(2kt)D \in I$, т. е. $I = A$.

Таким образом, супералгебра $J(\sin(t),\cos(t))$ является простой.

Установим, что M не является свободным A-модулем. В силу предложений 3 и 7 в супералгебре $J(\sin(t),\cos(t))$ имеет место равенство $aD_{x,y}z = aD_{z,y}x$ для любых $a \in A$ и $x,y,z \in M$. Для свободного модуля это означает, что он однопорожденный. Поэтому достаточно показать, что M не порождается как A-модуль одним элементом.

Пусть m — элемент из M такой, что $\overline{\sin(t)} = mf(t)$ и $\overline{\cos(t)} = mg(t)$, где $f(t)$ и $g(t)$ — элементы из A. Тогда $\sin(t) = m(t)f(t)$ и $\cos(t) = m(t)g(t)$, где $m(t) \in A\sin(t) + A\cos(t)$. Так как функции $\sin(t)$ и $\cos(t)$ не имеют общих нулей, то функция $m(t)$ либо строго положительная, либо строго отрицательная. Как легко видеть, $f(t+\pi) = f(t)$ и $g(t+\pi) = g(t)$. Поэтому

$$0 = \sin(t) + \sin(t+\pi) = m(t)f(t) + m(t+\pi)f(t+\pi) = (m(t) + m(t+\pi))f(t).$$

Поскольку $f(t)$ — ненулевая функция, то $m(t_0) + m(t_0+\pi) = 0$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$. Это противоречит условию, которому удовлетворяет функция $m(t)$.

Таким образом, M не является однопорожденным A-модулем.

Пусть $J = A + M$ — йорданова супералгебра с ассоциативной четной частью, нечетная часть которой является ассоциативным A-модулем, и S — мультипликативно замкнутое подмножество алгебры A. Так как супералгебра J — ассоциативный коммутативный A-модуль, определен модуль частных $S^{-1}J$ модуля J относительно множества S.

Определение. Йорданова супералгебра $J_1 = A_1 + M_1$ называется *супералгеброй частных* J относительно S, если $J_1 = S^{-1}J$, при этом $A_1 = S^{-1}A$, $M_1 = S^{-1}M$ и J как супералгебра гомоморфно вкладывается в J_1. Если A не содержит делителей нуля и $S = A \setminus \{0\}$, то J_1 называется *супералгеброй частных* J.

Предложение 11. *Пусть супералгебра $J = A + M$ удовлетворяет условиям теоремы* 2 *и S — мультипликативно замкнутое подмножество не делителей нуля в A. Тогда у J существует унитальная простая супералгебра частных J_1 относительно множества S, в которой умножение нечетных элементов задается равенством* (18). *При этом J как супералгебра инъективно вкладывается в J_1.*

Доказательство. Повторяя рассуждения п. (i) предложения 9, можно показать, что A-модуль M не имеет S-кручений. Пусть $A_1 = S^{-1}A_1$ и $M_1 = S^{-1}M$. Тогда $J_1 = S^{-1}J = A_1 + M_1$. Поскольку элементы из S — не делители нуля в A и M не имеет S-кручений, то алгебра A и A-модуль M инъективно вкладываются соответственно в алгебру A_1 и A_1-модуль M_1. Всякое дифференцирование алгебры A стандартным образом продолжается до дифференцирования алгебры A_1. Нетрудно также видеть, что для элементов $a, b \in A_1$ и дифференцирований $D_{x,y}, D_{u,v}$, где $x, y, u, v \in M$, справедливы равенства из предложения 8.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — порождающие A-модуля M, $D_{ij} = D_{x_i,x_j}$ и $\gamma_{ij} = x_i x_j$ (см. теорему 2). Тогда $x_1, \dots, x_n$ — порождающие A_1-модуля M_1.

Нетрудно понять, что для любого $a \in A_1$ и любой тройки индексов $i, j, k = 1, \dots, n$ справедливо $aD_{ij}x_k = aD_{kj}x_i$, т. е. имеет место (8).

Покажем, что для любых $a, b, d \in A_1$ имеет место (7). Действительно, непосредственным вычислением, учитывая, что $D_{ij} = D_{ji}$, получаем

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{ij}(a,b)D_{kl}d - \Gamma_{il}(a,d)D_{kj}b + \Gamma_{jl}(b,d)D_{ki}a \\
&= (\gamma_{ij}D_{kl} - \gamma_{il}D_{kj} + \gamma_{jl}D_{ki})abd + (aD_{kl}\gamma_{ij} - aD_{kj}\gamma_{il} + aD_{ij}D_{kl} - aD_{il}D_{kj})bd \\
&\qquad - (dD_{kj}\gamma_{il} - dD_{ki}\gamma_{jl} - dD_{il}D_{kj} + dD_{jl}D_{ki})ab \\
&\qquad\qquad + (bD_{kl}\gamma_{ij} + bD_{ki}\gamma_{jl} - bD_{ij}D_{kl} + bD_{jl}D_{ki})ad.
\end{aligned}$$

Ввиду теоремы 2 и предложения 3 достаточно показать, что выражения, стоящие в трех последних скобках, равны нулю.

Покажем, например, что $H = (aD_{kl}\gamma_{ij} - aD_{kj}\gamma_{il} + aD_{ij}D_{kl} - aD_{il}D_{kj}) = 0$. Пусть $a = cs^{-1}$, где $c \in A, s \in S$. Тогда

$$\begin{aligned}H &= (cD_{kl}\gamma_{ij} - cD_{kj}\gamma_{il} + cD_{ij}D_{kl} - cD_{il}D_{kj})s^{-1}\\ &\quad + ((cD_{ij})(s^{-1}D_{kl}) + (cD_{kl})(s^{-1}D_{ij}) - (cD_{il})(s^{-1}D_{kj}) - (cD_{kj})(s^{-1}D_{il}))\\ &- (sD_{kl}\gamma_{ij} - sD_{kj}\gamma_{il} + sD_{ij}D_{kl} - sD_{il}D_{kj})cs^{-2} - c((sD_{ij})(s^{-2}D_{kl}) - (sD_{il})(s^{-2}D_{kj})).\end{aligned}$$

Поскольку для дифференцирований D_{ij} и D_{kl} справедливы равенства из предложения 8, вторая и четвертая скобки в правой части последнего равенства равны нулю. По предложению 3 имеем $\gamma_{ij}D_{kl} - \gamma_{il}D_{kj} + \gamma_{jl}D_{ki} = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}H &= (\Gamma_{ij}(c,1)D_{kl} - \Gamma_{il}(c,1)D_{kj} + \Gamma_{jl}(1,1)D_{ki}c)s^{-1}\\ &\qquad - (\Gamma_{ij}(s,1)D_{kl} - \Gamma_{il}(s,1)D_{kj} + \Gamma_{jl}(1,1)D_{ki}s)cs^{-2}.\end{aligned}$$

Следовательно, ввиду предложения 3 и теоремы 2 равенство (7) справедливо для любых $a, b, d \in A_1$.

Определим на пространстве J_1 операцию умножения. Произведение элементов из M_1 задается формулой

$$ax_i \cdot bx_j = \gamma_{ij} \cdot ab + aD_{ij}b - bD_{ji}a,$$

где $a, b \in A_1$ и все произведения, стоящие справа, являются произведениями в алгебре A_1. Остальные произведения задаются стандартным образом.

Проверим, что произведение нечетных элементов задано корректно. Пусть в J_1 имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0,$$

где $\alpha_i \in A_1$. Тогда можно считать, что $\alpha_i = a_i s^{-1}$, где $a_i \in A, s \in S$. Поскольку M не имеет S-кручений, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$$

Поэтому для любого $b \in A$ получаем

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \cdot bx_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} a_i b + \sum_{i=1}^{n} a_i D_{ij} b - \sum_{i=1}^{n} bD_{ji} a_i.$$

Кроме того, в силу предложения 7

$$\sum_{i=1}^{n} bD_{ji} a_i = \sum_{i=1}^{n} bD_{ij} a_i = 0.$$

Следовательно, для $\beta = bt^{-1}$, где $b \in A$ и $t \in S$, имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \cdot \beta x_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij}\alpha_i\beta + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D_{ij}\beta - \sum_{i=1}^{n} \beta D_{ij}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} a_i b s^{-1} t^{-1}\\ &+ \sum_{i=1}^{n} a_i D_{ij} b s^{-1} t^{-1} - \sum_{i=1}^{n} bD_{ji} a_i s^{-1} t^{-1} - \sum_{i=1}^{n} sD_{ij} a_i s^{-2} b + \sum_{i=1}^{n} tD_{ji} a_i t^{-2} b s^{-1} = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, операция умножения в J_1 определена корректно, и в силу предложения 3 получаем, что J_1 — йорданова супералгебра.

Ясно, что J инъективно вкладывается в J_1 как супералгебра.

Покажем, что J_1 — простая супералгебра. Пусть I — ненулевой идеал в J_1. Поскольку супералгебра J инъективно вкладывается в J_1, можно считать, что $J \cap I \neq 0$. Тогда $J \cap I$ — ненулевой идеал супералгебры J. Поэтому $J \cap I = J$ и $I = J_1$. Следовательно, J_1 — простая супералгебра.

Следствие 2. *Пусть P — простой идеал четной части супералгебры J и $S = A \setminus P$. Тогда супералгебра $S^{-1}J$ изоморфна $J(\Gamma, D)$, где $\Gamma = S^{-1}A$. Если характеристика супералгебры J равна нулю, то супералгебра частных для J изоморфна $J(\Gamma, D)$, где Γ — поле частных алгебры A. При этом J как супералгебра инъективно вкладывается в $J(\Gamma, D)$*

Доказательство. Пусть J имеет характеристику $p > 2$. Тогда в силу [12] A — локальная алгебра и P — максимальный идеал алгебры A. Следовательно, множество S состоит из обратимых элементов. Поэтому алгебра A изоморфна $S^{-1}A$, модуль M изоморфен $S^{-1}M$ и в силу леммы 5 супералгебра $S^{-1}J$ изоморфна $J(S^{-1}A, D)$.

Пусть характеристика супералгебры J равна нулю. Тогда в силу [13] A не содержит делителей нуля. Если супералгебра J изоморфна супералгебре $J(R, D)$, то M — свободный A-модуль ранга один. Поэтому $S^{-1}M$ — свободный $S^{-1}A$-модуль ранга один. Предположим, что супералгебра J не изоморфна супералгебре $J(R, D)$. Тогда по п. (ii) предложения 9 M — проективный конечнопорожденный A-модуль ранга один. Следовательно, $S^{-1}M$ — проективный конечнопорожденный $S^{-1}A$-модуль. Поскольку $S^{-1}A$ — локальная алгебра, то $S^{-1}M$ — свободный $S^{-1}A$-модуль ранга один.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — порождающие A-модуля M. В силу п. (i) предложения 9 M не имеет A-кручений. Поэтому можно считать, что $S^{-1}M$ порождается как $S^{-1}A$-модуль элементом $x \in M$. Предположим, что $x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, где $a_1, \dots, a_n \in A$. Тогда для любых $a, b \in A_1$ по определению умножения в супералгебре $S^{-1}J$ имеем

$$\begin{aligned} ax \cdot bx = \sum_{k=1}^{n}(aa_k)x_k \sum_{l=1}^{n}(ba_l)x_l &= \sum_{kl}((x_kx_l)aba_ka_l + (aa_k)D_{kl}ba_l - (ba_l)D_{kl}aa_k) \\ &= \sum_{kl}((x_kx_l)a_ka_l + a_kD_{kl}a_l - a_lD_{kl}a_k)ab \\ &\quad + \sum_{kl}(aD_{kl}a_ka_lb - bD_{kl}a_la_ka) = aD_{x,x}b - bD_{x,x}a. \end{aligned}$$

Таким образом, супералгебра $S^{-1}J$ изоморфна супералгебре $J(S^{-1}A, D_{x,x})$. Поскольку $S = A \setminus \{0\}$, то $S^{-1}A$ — поле частных алгебры A. По предложению 11 супералгебра J изоморфно вкладывается в $S^{-1}J$.

§ 3. Супералгебры с условием $M \cap [A, M] \neq 0$

В этом параграфе мы изучим строение простой специальной унитальной супералгебры $J = A + M$ с ассоциативной четной частью при условии $M \cap [A, M] \neq 0$. Пусть $T = [[A, M], M]$.

Предложение 12. *Пусть супералгебра $J = A + M$ удовлетворяет условиям теоремы 2, и пусть*

$$\sum_i [a_i, y_i] \circ x_i = 1,$$

где $x_i, y_i \in M$, $a_i \in A$. Положим $s = \frac{1}{2}\sum_i [[a_i, y_i], x_i]$. Тогда

(i) *$T \circ M \subseteq [M, A], T \circ [M, A] = 0$, $[A, T] = 0$,*

(ii) *$s \in T$, $s^2 = 1$ и $s \circ M = 0$,*

(iii) *$2s \circ ([a, y] \circ x) = [[a, y], x]$, $T = s \circ A$ и $[a, y] = 2y \circ (s \circ a)$ для любых элементов $a \in A$, $x, y \in M$.*

Доказательство. (i) Так как $A = (A, M, M) = M \circ [M, A]$, то по (9), теореме 1 и предложению 7 имеем

$$T \circ M \subseteq [M, [M, A] \circ M] + [M, A] \circ [M, M] \subseteq [M, A]$$

и

$$T \circ [M, A] \subseteq [M \circ [M, A], [M, A]] + M \circ [[M, A], [M, A]] = 0.$$

По (11) и (16)

$$[A, T] \subseteq [[A, M], [A, M]] + [M, [A, [A, M]]] = 0.$$

Пусть $1 = \sum_i [a_i, y_i] \circ x_i$, где $x_i, y_i \in M$, $a_i \in A$ и $s = \frac{1}{2}\sum_i [[a_i, y_i], x_i]$.

(ii) Ясно, что $s \in T$, поэтому $s \circ [A, M] = 0$. Ввиду (11), (12) и предложения 7 получаем

$$[[a_i, y_i], [[a_j, y_j], x_j]] = -4[a_i, y_i] \circ ([a_j, y_j] \circ x_j),$$

и по доказанному выше

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{4}\sum_{ij} [[a_i, y_i], x_i] \circ [[a_j, y_j], x_j] \\ &= \frac{1}{4}\sum_{ij} ([[a_i, y_i], x_i \circ [[a_j, y_j], x_j]] - x_i \circ [[a_i, y_i], [[a_j, y_j], x_j]]) \\ &= \sum_{ij} x_i \circ ([a_i, y_i] \circ ([a_j, y_j] \circ x_j)) \\ &= \sum_{ij} (x_i \circ [a_i, y_i]) \circ ([a_j, y_j] \circ x_j) - \sum_{ij} (x_i, [a_i, y_i], [a_j, y_j] \circ x_j)^+ = 1. \end{aligned}$$

Пусть $e_1 = \frac{1}{2}(1 + s)$, $e_2 = \frac{1}{2}(1 - s)$. Тогда e_1 и e_2 — идемпотенты. Пусть $([A, M])_{\frac{1}{2}}$ — $\frac{1}{2}$-компонента албертовского разложения модуля $[A, M]$ относительно идемпотента e_1. Так как $s \circ [A, M] = 0$, то $[A, M] = ([A, M])_{\frac{1}{2}}$. Пусть $m \in M_1$, где M_1 — 1-компонента албертовского разложения модуля M относительно идемпотента e_1. Поскольку $[A, s] = 0$, имеем $A_{\frac{1}{2}} = 0$. Тогда по свойству албертовского разложения $m \circ [A, M] \subseteq A_{\frac{1}{2}} = 0$. Следовательно,

$$m = m \circ \sum_i [a_i, y_i] \circ x_i = \sum_i (m \circ [a_i, y_i]) \circ x_i = 0.$$

Аналогично 0-компонента модуля M равна нулю. Таким образом, $M = M_{\frac{1}{2}}$, т. е. $s \circ M = 0$.

(iii) Пусть $a \in A$ и $x, y \in M$. Тогда ввиду (12), (11) и предложения 7 получаем

$$\begin{aligned}2s \circ ([a, y] \circ x) &= -2(s, x, [a, y])^{+} + 2(s \circ x) \circ [a, y] \\ &= -\frac{1}{4} \sum_i [x, [[[a_i, y_i], x_i], [a, y]]] = -\frac{1}{4} \sum_i [x, [[a_i, y_i], [x_i, [a, y]]]] \\ &= -\sum_i [x, ([a_i, y_i] \circ x_i) \circ [a, y]] = -[x, [a, y]] = [[a, y], x].\end{aligned}$$

Следовательно, $T = s \circ A$.

Докажем последнее равенство. Так как

$$\begin{aligned}[[a, y], s] &= \frac{1}{2} \sum_i [[a, y], [[a_i, y_i], x_i]] = \frac{1}{2} \sum_i [[a_i, y_i], [[a, y], x_i]] \\ &= -2 \sum_i [a, y] \circ ([a_i, y_i] \circ x_i) = -2[a, y],\end{aligned}$$

то

$$y \circ (s \circ a) = -(y, s, a)^{+} = -\frac{1}{4}[s, [y, a]] = \frac{1}{2}[a, y].$$

Предложение 13. *Пусть супералгебра $J = A + M$ удовлетворяет условиям теоремы* 2. *Тогда*

$$T \cap A = 0, \quad M \cap [A, M] = 0, \quad (A + T) \cap (M + [A, M]) = 0.$$

Доказательство. Пусть $R = T \cap A$. Тогда по предложению 12 R — идеал алгебры A. Ввиду (9) и предложения 12 $M \circ [T, M] \subseteq T$. Следовательно, $M \circ [R, M] \subseteq R$. Поэтому $(R, M, M) \subseteq R$. Тогда из теоремы 2 следует, что либо $R = A$, либо $R = 0$.

Если $R = A$, то $A \subseteq T$ и по предложению 12 $A \circ [A, M] = 0$. Отсюда $[A, M] = 0$. Таким образом, $T \cap A = 0$.

Пусть $n \in M \cap [A, M]$. Тогда $[n, M] \subseteq A \cap T = 0$ и по (15) $n \circ [A, M] = 0$. Поскольку $A = M \circ [A, M]$, то $1 = \sum\limits_i x_i \circ [a_i, y_i]$. Следовательно,

$$n = \sum_i (x_i \circ [a_i, y_i]) \circ n = \sum_i x_i \circ ([a_i, y_i] \circ n) = 0.$$

Таким образом, $M \cap [A, M] = 0$.

Так как $A + T \subseteq B_0$ и $M + [A, M] \subseteq B_1$, то $(A + T) \cap (M + [A, M]) = 0$.

Покажем, что A-модули $[A, M]$ и $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ изоморфны. Обозначим $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ через M^*. Пусть $a \in A$ и $x \in M$. Так как $[a, x] \circ y \in A$ для любого $y \in M$, то в силу (12) отображение $\phi_{a,x} : M \mapsto A$, заданное правилом $\phi_{a,x}(y) = [a, x] \circ y$, является гомоморфизмом A-модулей. Рассмотрим

$$\psi : \sum_i [b_i, m_i] \in [A, M] \mapsto \sum_i \phi_{b_i, m_i} \in M^*.$$

Тогда в силу предложения 7 отображение ψ является A-модульным гомоморфизмом. В силу простоты супералгебры J имеем $1 \in (A, M, M) = [A, M] \circ M$. Поэтому по предложению 7 получаем, что ψ — инъективное вложение. Рассмотрим элемент f из M^*. По (12) будет

$$f(z)([a, x] \circ y) = f(z([a, x] \circ y)) = f((z \circ [a, x]) \circ y) = f(y)(z \circ [a, x])$$

для любого $z \in M$, т. е. $f(z)\phi_{a,x}(y) = f(y)\phi_{a,x}(z)$. Поскольку супералгебра J проста, то $1 = \sum\limits_i \phi_{a_i,x_i}(y_i)$. Отсюда получаем, что

$$f(y) = \sum_i f(y)\phi_{a_i,x_i}(y_i) = \sum_i f(y_i)\phi_{a_i,x_i}(y).$$

Следовательно, ввиду предложения 7

$$f = \sum_i f(y_i)\phi_{a_i,x_i} = \sum_i \phi_{a_i,x_i f(y_i)}.$$

Как нетрудно видеть, отображение ψ — изоморфизм A-модулей $[A, M]$ и M^*.

Теорема 3. *Пусть $J = A+M$ — простая специальная унитальная йорданова супералгебра, ее четная часть A — ассоциативная алгебра, а нечетная часть M — ассоциативный A-модуль. Предположим, что J не является супералгеброй невырожденной билинейной суперформы. Положим $T = [[A, M], M]$, $A_0 = A+T$ и $M_0 = M + [A, M]$. Тогда $J(A, M, M^*) = A_0 + M_0$ — простая унитальная йорданова подсуперaлгебра в B^+. При этом ее четная часть A_0 является ассоциативной алгеброй. Нечетная часть M_0 не является ассоциативным A_0-модулем, и $[A, M] \subseteq M_0 \cap [A_0, M_0]$. Алгебра A_0 содержит два ортогональных идемпотента e_1, e_2 и $e_1 + e_2 = 1$, а $M_0 = (M_0)_{\frac{1}{2}}$.*

Доказательство. Пусть $J_0 = J(A, M, M^*)$. В силу сделанного предположения супералгебра J удовлетворяет условиям теоремы 2. Поэтому алгебра A является Δ-простой, где Δ — множество дифференцирований алгебры A, определенное в теореме 2. Ввиду предложения 12 имеем $T = s \circ A$, где $s \in T$ и $s^2 = 1$.

Ясно, что J_0 — унитальная йорданова подсупералгебра в B^+ с четной частью A_0 и нечетной частью M_0. Покажем, что супералгебра J_0 проста.

Пусть I — идеал супералгебры J_0. Тогда $R = I \cap A_0$ — идеал в A_0 и $(R, M, M) \subseteq R$. Положим $K = \{a \in A \mid a + t \in R$ для некоторого $t \in T\}$. В силу предложения 12 множество K является идеалом в A. Ввиду (9) и предложения 12 имеем $M \circ [T, M] \subseteq T$. Поэтому $(K, M, M) = M \circ [K, M] \subseteq K$. Тогда $K\Delta \subseteq K$ и либо $K = A$, либо $K = 0$. Если $K = A$, то $R \circ [A, M] = [A, M]$. Тем самым $[A, M] \subseteq I$ и $T \subseteq I$. Следовательно, $A \subseteq I$. Отсюда получаем, что $I = J_0$. Поэтому $K = 0$ и $R \subseteq T$. По предложению 12 имеем $s \circ R \subseteq A$, значит, $s \circ R = 0$ и $R = 0$. Это означает, что $I \subseteq M + [A, M]$.

Пусть $x \in I$ и $x = m+y$, где $m \in M$, $y \in [A, M]$. Так как $[I, M] \subseteq I \cap A_0 = 0$, согласно предложению 13 $[m, M] = 0$. Поскольку $I \circ A \subseteq I$, то $[m \circ a, M] = 0$ для любого $a \in A$. Тогда в силу (9) имеем $m \circ [A, M] \subseteq A \circ [m, M] + [m \circ A, M] = 0$. Так как $A = (A, M, M) = M \circ [A, M]$, то $1 = \sum\limits_i n_i \circ [a_i, m_i]$. Следовательно,

$$m = m \circ \sum_i [a_i, m_i] \circ n_i = \sum_i (m \circ [a_i, m_i]) \circ n_i = 0.$$

Таким образом, $I \subseteq [A, M]$ и

$$I = \sum_i n_i \circ ([a_i, m_i] \circ I) = 0$$

ввиду предложения 7.

Теперь покажем, что $[A_0, A_0] = 0$. По предложению 12 $[A, T] = 0$. Так как $[A, A] = 0$ и $T = s \circ A$, по (9) имеем $[T, T] = 0$. Поэтому A_0 — ассоциативная алгебра.

Проверим, что $(A_0, A_0, M_0) \neq 0$. По предложению 12

$$T \circ (T \circ M) \subseteq T \circ [A, M] = 0.$$

Следовательно, в супералгебре J_0 для любого $m \in M$ ассоциатор (s, s, m) равен m. Поэтому $(A_0, A_0, M_0) \neq 0$.

Покажем включение $[A, M] \subseteq M_0 \cap [A_0, M_0]$. Как легко видеть, $[A_0, M_0] = [A, M] + [T, M] + [T, [A, M]]$, т. е. $[A, M] \subseteq [A_0, M_0]$. Отсюда следует искомое включение.

Поскольку $A_0 = A + s \circ A$ и $s^2 = 1$, то $e_1 = \frac{1}{2}(1 + s)$, $e_2 = \frac{1}{2}(1 - s)$ — искомые идемпотенты. В силу предложения 12 получаем, что $M_0 = (M_0)_{\frac{1}{2}}$.

Предложение 14. *Пусть $J = A + M$ — простая унитальная супералгебра, изоморфная $J(A, D)$. Тогда супералгебра $J(A, M, M^*)$ изоморфна $J(A[n], D)$.*

Доказательство. Поскольку J изоморфна супералгебре $J(A, D)$ и A — алгебра с единицей, то M — однопорожденный A-модуль. Пусть элемент m — порождающий модуля M. Тогда

$$1 = \sum_i (a_i, b_i m, c_i m) = \frac{1}{2} \sum_i (b_i m) \circ [a_i, c_i m] = \frac{1}{2} m \circ \sum_i [a_i, b_i c_i m].$$

Положим

$$n = \frac{1}{2} \sum_i [a_i, c_i b_i m].$$

Тогда $1 = m \circ n$ и ввиду предложения 7 элемент n порождает A-модуль $[A, M]$. Поэтому $M + [A, M] = A \circ m + A \circ n$. По предложению 12 получаем, что $A + T = A + s \circ A$, где $s = \frac{1}{2}[n, m]$, и для любых $a, b, c, d \in A$ имеем

$$(a + s \circ b) \circ (c + s \circ d) = (ac + bd) + s \circ (ad + bc).$$

Можно считать, что $D = D_{m,m}$. В силу предложения 12 $(s \circ A) \circ (A \circ n) = 0$. Если $a, b \in A$, то опять по предложению 12 $(s \circ b) \circ (a \circ m) = \frac{1}{2}[b, a \circ m]$. Поскольку $[b, m] \in [A, M]$, то $[b, m] = d \circ n$ для некоторого $d \in A$. Поэтому

$$b^D = \frac{1}{2}[b, m] \circ m = \frac{1}{2} m \circ (d \circ n) = \frac{1}{2}(m \circ n) \circ d = \frac{1}{2} d.$$

Отсюда

$$(s \circ b) \circ (a \circ m) = \frac{1}{2}[b, a \circ m] = \frac{1}{2} a \circ [b, m] = \frac{1}{2}(ad) \circ n = (b^D a) \circ n.$$

В силу (9) и предложения 7 имеем

$$a \circ n \cdot b \circ m = \frac{1}{2}[a \circ n, b \circ m] = \frac{1}{2}(ab) \circ [n, m] = s \circ (ab).$$

Ясно, что $a \circ m \cdot b \circ m = a^D b - b^D a$.

Таким образом, по предложению 1 супералгебра $J(A, M, M^*)$ изоморфна $J(A[n], D)$.

Предложение 15. *Пусть супералгебра $J = A + M$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Предположим, что P — простой идеал алгебры A и $S = A \setminus P$. Тогда супералгебра $J(A, M, M^*)$ изоморфно вкладывается в супералгебру $J(S^{-1}A[n], D)$.*

Доказательство. Ввиду следствия 2 супералгебра J изоморфно вкладывается в супералгебру $J(S^{-1}A, D)$. Если J имеет характеристику $p > 2$, то P — максимальный идеал алгебры A и S состоит из обратимых элементов алгебры A. В этом случае $S^{-1}A = A$ и супералгебра J изоморфна $J(A, D)$. Следовательно, по предложению 14 супералгебра $J(A, M, M^*)$ изоморфна $J(A[n], D)$.

Пусть супералгебра J имеет характеристику нуль. Тогда в силу [13] A не содержит делителей нуля. Поэтому можно считать, что нечетная часть $S^{-1}M$ супералгебры $J(S^{-1}A, D)$ порождается как $S^{-1}A$-модуль элементом $m \in M$. По предложениям 1 и 14 четная часть супералгебры $J(S^{-1}A, S^{-1}M, (S^{-1}M)^*)$ имеет вид $S^{-1}A + \bar{s}S^{-1}A$, где $\bar{s}^2 = 1$, а ее нечетная часть — вид $S^{-1}Am + S^{-1}An$. По теореме 3 $S^{-1}An = [S^{-1}A, S^{-1}Am] = S^{-1}A[A, m]$, поэтому $n = n_1q^{-1}$, где $n_1 \in [A, m]$, $q \in S$. По теореме 3 и предложению 12 четная часть супералгебры $J(A, M, M^*)$ имеет вид $A + s \circ A$, где $s^2 = 1$. Очевидно, что алгебра $A + s \circ A$ изоморфно вкладывается в $S^{-1}A + \bar{s}S^{-1}A$, и при этом вложении образом элемента s является элемент $\bar{s}$. Будем считать, что $A + s \circ A$ является подалгеброй в $S^{-1}A + \bar{s}S^{-1}A$.

Пусть элементы $x_1, \dots, x_k$ порождают A-модуль M. Тогда существуют элемент $r \in S$ и такие элементы $r_1, \dots, r_k \in A$, что $x_i r = m r_i$. Поскольку $A = (A, M, M)$, имеем

$$\sum_{i=1}^{k} [a_i, y_i] \circ x_i = 1.$$

Ввиду (9) и предложения 7 получаем, что элементы $[a_1, y_1], \dots, [a_k, y_k]$ порождают A-модуль $[A, M]$.

Зададим отображение $\phi : M + [A, M] \mapsto S^{-1}Am + S^{-1}An$, полагая

$$\sum_{i=1}^{k} b_i x_i \mapsto \sum_{i=1}^{k} b_i r_i r^{-1} m, \quad \sum_{i=1}^{k} b_i [a_i, y_i] \mapsto \sum_{i=1}^{k} b_i([a_i, y_i] \circ m) n.$$

Ясно, что первая стрелка задана корректно и является вложением. В силу предложения 7

$$b_i([a_i, y_i] \circ m) = (b_i \circ [a_i, y_i]) \circ m.$$

Следовательно, вторая стрелка задана корректно. Если

$$\sum_{i=1}^{k} b_i([a_i, y_i] \circ m) n = 0,$$

то

$$t \sum_{i=1}^{k} ((b_i \circ [a_i, y_i]) \circ m) \circ n_1 = 0$$

для некоторого $t \in S$. Заметим, что $n_1 \circ M \neq 0$, иначе

$$n_1 \in n_1 \circ (A, M, M) \subseteq n_1 \circ (M \circ [A, M]) \subseteq (n_1 \circ M) \circ [A, M]) = 0.$$

Поэтому $n_1 \circ x \neq 0$ для некоторого $x \in M$. Следовательно,

$$t \sum_{i=1}^{k} ((b_i \circ [a_i, y_i]) \circ m) \circ (n_1 \circ x) = \left(t \sum_{i=1}^{k} ((b_i \circ [a_i, y_i]) \circ m) \circ n_1 \right) \circ x = 0.$$

Так как алгебра A не содержит делителей нуля, имеем

$$\sum_{i=1}^{k}(b_i \circ [a_i, y_i]) \circ m = 0.$$

Тем самым

$$\sum_{i=1}^{k}(x \circ (b_i \circ [a_i, y_i])) \circ m = 0$$

для любого $x \in M$ и по п. (i) предложения 9 получаем, что

$$\sum_{i=1}^{k} x \circ (b_i \circ [a_i, y_i]) = 0.$$

Но тогда

$$\sum_{i=1}^{k} b_i \circ [a_i, y_i] = \left(\sum_{j=1}^{k}[a_j, y_j] \circ x_j\right) \sum_{i=1}^{k} b_i \circ [a_i, y_i] = \sum_{ji}[a_j, y_j] \circ (x_j \circ (b_i \circ [a_i, y_i])) = 0.$$

Таким образом, отображение ϕ является вложением. Ясно, что ϕ — вложение A-модулей.

Теперь покажем, что отображение супералгебры $A + s \circ A + M + [A, M]$ в супералгебру $J(S^{-1}A[n], D)$, определенное по правилу

$$a + s \circ b + x + [c, y] \mapsto a + \bar{s}b + \phi(x) + \phi([c, y]),$$

является изоморфным вложением супералгебр.

Ввиду следствия 2 и теоремы 3 указанное отображение является вложением супералгебры $A + M$ в $J(S^{-1}A[n], D)$.

Рассмотрим произведение элементов $b[a_i, y_i]$, ax_j и $\phi(b[a_i, y_i])$, $\phi(ax_j)$ в супералгебрах $J(A, M, M^*)$ и $J(S^{-1}A[n], D)$. По теореме 2 и предложению 12

$$\frac{1}{2}[b[a_i, y_i], ax_j] = s \circ ((a \circ x_j) \circ (b \circ [a_i, y_i])) = s \circ ((ab)(x_j \circ [a_i, y_i])).$$

С другой стороны, в супералгебре $J(S^{-1}A[n], D)$ имеем

$$\phi(b[a_i, y_i]) \cdot \phi(ax_j) = b([a_i, y_i] \circ m)n \cdot ar_j r^{-1} m = \bar{s}(ab([a_i, y_i] \circ m) r_j r^{-1}).$$

Поскольку $x_j r = m r_j$, ввиду предложения 7 справедливы равенства

$$(x_j \circ [a_i, y_i])r = (x_j r) \circ [a_i, y_i] = (m r_j) \circ [a_i, y_i] = (m \circ [a_i, y_i]) r_j.$$

Тогда $(ab) \circ (x_j \circ [a_i, y_i]) = ab([a_i, y_i] \circ m) r_j r^{-1}$. Отсюда

$$\frac{1}{2}[b[a_i, y_i], ax_j] = \phi(b[a_i, y_i]) \cdot \phi(a \circ x_j).$$

Рассмотрим элементы sb и ax_j. Тогда по предложению 12 в супералгебре $J(A, M, M^*)$ будет $(sb) \circ ax_j = \frac{1}{2}[b, ax_j]$. Поэтому

$$(sb) \circ ax_j = \frac{1}{2} \sum_{i}([b, ax_j] \circ x_i) \circ [a_i, y_i].$$

Следовательно,

$$2\phi((sb)\circ ax_j)=\phi\Big(\sum_i([b,ax_j]\circ x_i)\circ[a_i,y_i]\Big)$$
$$=\sum_i(([b,ax_j]\circ x_i)([a_i,y_i]\circ m))\circ n=\sum_i([b,ax_j]\circ(x_i\circ([a_i,y_i]\circ m)))\circ n$$
$$=\sum_i([b,ax_j]\circ((x_i\circ[a_i,y_i])\circ m))\circ n=([b,ax_j]\circ m)\circ n.$$

С другой стороны, в супералгебре $J(S^{-1}A[n],D)$ получаем

$$(\bar{s}b)\cdot\phi(ax_j)=(\bar{s}b)\cdot ar_jr^{-1}m=(bD_{m,m}ar_jr^{-1})\circ n=\frac{1}{2}(([b,m]\circ m)(ar_jr^{-1}))\circ n.$$

Ввиду предложения 7, теоремы 1 и $x_jr=mr_j$ имеем

$$([b,ax_j]\circ m)r=[b,a(x_jr)]\circ m=[b,a(mr_j)]\circ m=([b,m]\circ m)(ar_j).$$

Следовательно,

$$2(\bar{s}b)\cdot\phi(ax_j)=([b,ax_j]\circ m)\circ n.$$

Таким образом, $\phi((sb)\circ ax_j)=(\bar{s}b)\cdot\phi(ax_j)$.

Теперь нетрудно видеть, что определенное выше отображение супералгебр является изоморфным вложением.

Теорема 4. *Пусть $J=A+M$ — простая специальная унитальная йорданова супералгебра с ассоциативной четной частью, не изоморфная супералгебре D_t или конечномерной йордановой супералгебре билинейной суперформы. Предположим, что M не является ассоциативным A-модулем и $[A,M]\cap M\neq 0$, где $[A,M]$ — линейное подпространство в ассоциативной обертывающей J, порожденное коммутаторами четных и нечетных элементов. Тогда J содержит такую подсупералгебру $J_0=A_0+M_0$, которая удовлетворяет условиям теоремы 2, причем $J=J(A_0,M_0,M_0^*)$.*

Доказательство можно провести, дословно повторив рассуждения § 3 работы [9], заменив ссылку на лемму 2 ссылкой на теорему 1 и следствие 1 настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kac V.* Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras // Comm. Algebra. 1977. V. 5. P. 1375–1400.
2. *Кантор И. Л.* Йордановы и лиевы супералгебры, определенные алгеброй Пуассона // Вторая сибирская школа «Алгебра и анализ». Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1989. С. 55–80.
3. *Racine M., Zelmanov E.* Simple Jordan superalgebras with semisimple even part // J. Algebra. 2003. V. 270, N 2. P. 374–444.
4. *King D., McCrimmon K.* The Kantor construction of Jordan superalgebras // Comm. Algebra. 1992. V. 20, N 1. P. 109–126.
5. *Martinez C., Zelmanov E.* Simple finite-dimensional Jordan superalgebras of prime characteristic // J. Algebra. 2001. V. 236. P. 575–629.
6. *Зельманов Е. И., Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 4. С. 676–693.
7. *Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 701–731.
8. *Шестаков И. П.* Простые супералгебры типа $(-1,1)$ // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 721–739.

9. *Желябин В. Н.* Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой четной частью // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 276–310.
10. *Gonzalez S., Lopez-Diaz M. C., Martinez C., Shestakov I. P.* Bernstein superalgebras and superbimodules // J. Algebra. 1999. V. 212, N 1. P. 119–131.
11. *King D., McCrimmon K.* The Kantor doubling process revisited // Comm. Algebra. 1995. V. 23, N 1. P. 357–372.
12. *Shuen Yuan.* Differentiable simple rings of prime characteristic // Duke Math. J. 1964. V. 31, N 4. P. 623–630.
13. *Posner E. C.* Differentiable simple rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. V. 11, N 3. P. 337–343.
14. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра. М.: Наука, 1971.
15. *Суслин А. А.* О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т. 41, № 2. С. 235–252.

Статья поступила 9 февраля 2004 г.

Желябин Виктор Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vicnic@math.nsc.ru

Шестаков Иван Павлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Current address
Instituto de matemática e Estatística
Universidade de São Paulo, Brazil 05315-970
shestak@ime.usp.br