Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 513.88

ТЕОРЕМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ИЗ КЛАССА CR_c И ER_c

Д. Дюрчич, А. Торгашев

Аннотация: Доказаны две теоремы представления в смысле Боянич — Сенети для двух классов $\mathscr{O}$-правильно изменяющихся последовательностей CR_c и ER_c.

Ключевые слова: правильно изменяющаяся последовательность, индексная функция.

1. Введение

Пусть (a_n) — некоторая последовательность положительных чисел. Если $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность (c_n), определенная равенством $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ $(n \in \mathbb{N})$, не обязательно $\mathscr{O}$-правильно изменяющаяся (см. [1]), т. е. не обязательно удовлетворяет условию

$$\overline{k}_c(\lambda) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{c_{[\lambda n]}}{c_n} < +\infty, \quad \lambda > 0. \tag{1}$$

Но если при этом (a_n) монотонна, то последовательность (c_n) $\mathscr{O}$-правильно изменяется и ее индексная функция $\overline{k}_c(\lambda)$ непрерывна для всех $\lambda > 0$. Если теперь

$$\underline{k}_c(\lambda) = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{c_{[\lambda n]}}{c_n}, \quad \lambda > 0, \tag{2}$$

— ее вспомогательная индексная функция, то для каждого $\lambda \geq 1$ и некоторого $d \geq 0$ имеем

$$1 \leq \underline{k}_c(\lambda) \leq \overline{k}_c(\lambda) \leq \lambda^d.$$

Множество всех $\mathscr{O}$-правильно изменяющихся последовательностей, индексные функции которых непрерывны, обозначается через CR_c (см. например, [2]). Оно играет определенную роль в анализе расходящихся асимптотических процессов (см., например, [3, 4]).

Множество всех положительных последовательностей (c_n), которые для всех $\lambda \geq 1$ удовлетворяют неравенствам

$$\lambda^c \leq \underline{k}_c(\lambda) \leq \overline{k}_c(\lambda) \leq \lambda^d$$

для некоторых действительных чисел c, d, обозначается через ER_c (см., например, [5]).

Теория Караматы правильной изменяемости занимает важное место в анализе асимптотических процессов (см. [5]). Множество CR_f всех $\mathscr{O}$-правильно изменяющихся функций, индексная функция которых непрерывна (см. [2]), и множество ER_f всех расширенных правильно изменяющихся функций (см. [5]) играют значительную роль в этой теории.

Напомним, что множество всех измеримых функций $f : [a, +\infty) \mapsto (0, +\infty)$, $a > 0$, у которых индексная функция

$$\overline{k}_f(\lambda) = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}$$

непрерывна для всех $\lambda > 0$, обозначается через CR_f, а множество всех положительных измеримых функций $f(x)$ ($x \geq a$, $a > 0$), у которых индексная функция и вспомогательная индексная функция

$$\underline{k}_f(\lambda) = \varliminf_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}$$

для всех $\lambda \geq 1$ удовлетворяют условию

$$\lambda^c \leq \underline{k}_c(\lambda) \leq \overline{k}_c(\lambda) \leq \lambda^d$$

для некоторых действительных чисел c, d, обозначается через ER_f.

Напомним, что, как известно, $ER_f \subsetneq CR_f$ (см. [2]).

Напомним также, что сужение произвольной функции $f(x)$, $x \geq 1$, из класса ER_f на множество $\mathbb{N}$ представляет один из основных примеров последовательностей из класса ER_c. Аналогичное верно и для классов CR_f и CR_c.

Кроме того, если RV_c — множество всех правильно изменяющихся последовательностей (см. [6]) и OR_c — множество всех $\mathscr{O}$-правильно изменяющихся последовательностей (см. [1]), то, как известно,

$$RV_c \subsetneq ER_c \subsetneq CR_c \subsetneq OR_c.$$

2. Основной результат

Сформулируем два утверждения типа Боянич — Сенеты (см. [6]) для классов CR и ER. Эти утверждения служат также теоремами представления для классов последовательностей CR_c и ER_c. Подобные утверждения для правильно изменяющихся последовательностей (класс RV_c) и для $\mathscr{O}$-правильно изменяющихся последовательностей (класс OR_c) доказаны в [6, 1].

Теорема 1. *Пусть (c_n) — последовательность положительных чисел. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(a1) $(c_n) \in CR_c$;

(a2) $f(x) = c_{[x]}$, $x \geq 1$, *принадлежит классу* CR_f;

(a3) $c_n = \exp\Big\{\theta_n + r(\log n) + \sum\limits_{k=n_0}^{n} \frac{\delta_k}{k}\Big\}$, $n \geq n_0$, *причем* $\theta_n \to 0$ *при* $n \to +\infty$, *функция* $r(t)$ *ограничена и равномерно непрерывна на отрезке* $[\log n_0, +\infty)$, *где* (δ_n) — *некоторая ограниченная последовательность.*

Доказательство. (a1) $\Longrightarrow$ (a2). Предположим, что $(c_n) \in CR_c$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $r = r(\varepsilon) > 1$ такое, что $|\overline{k}_c(\lambda) - 1| < \varepsilon$ для каждого $\lambda \in \left[\frac{1}{r^2}, r^2\right]$. Покажем, что существуют промежуток $[A, B] \subseteq \left[\frac{1}{r}, r\right]$ ($A < B$) и $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что $\frac{c_{[zn]}}{c_n} < 1 + \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$ и $z \in [A, B]$.

Для произвольного $\lambda \in \left(\frac{1}{r}, r\right)$ определим $n_\lambda \in \mathbb{N}$ следующим образом:

$$n_\lambda = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{c_{[\lambda n]}}{c_n} < 1 + \varepsilon \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \\ 1 + \max\big\{n \in \mathbb{N} : \frac{c_{[\lambda n]}}{c_n} \geq 1 + \varepsilon\big\} & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что $1 \le n_\lambda < +\infty$ для всех таких λ.

Определим последовательность множеств (A_k) $(k \in \mathbb{N})$:

$$A_k = \{\lambda \in (1/r, r) \mid n_\lambda > k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда (A_k) — убывающая последовательность множеств такая, что $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k = \varnothing$. Покажем, что не все множества A_k $(k \in \mathbb{N})$ плотные в $\left(\frac{1}{r}, r\right)$.

Если $\lambda \in A_k$ для фиксированного $k \in \mathbb{N}$, то $\frac{c_{[(n_\lambda-1)\lambda]}}{c_{n_\lambda-1}} \ge 1+\varepsilon$, так что существует некоторое $\delta_\lambda > 0$ такое, что

$$\frac{c_{[(n_\lambda-1)t]}}{c_{n_\lambda-1}} = \frac{c_{[(n_\lambda-1)\lambda]}}{c_{n_\lambda-1}} \ge 1+\varepsilon$$

для всех $t \in [\lambda, \lambda+\delta_\lambda) \subsetneq \left(\frac{1}{r}, r\right)$. Поэтому каждое $t \in (\lambda, \lambda+\delta_\lambda)$ принадлежит множеству A_k, так как $n_t \ge (n_\lambda - 1) + 1 > k$. Следовательно, если $\lambda \in A_k$, то $(\lambda, \lambda+\delta_\lambda) \subseteq A_k$. Если некоторое множество A_k плотно в $\left(\frac{1}{r}, r\right)$, то множество $\operatorname{Int} A_k$ также плотно в $\left(\frac{1}{r}, r\right)$. Если предположить, что все множества A_k $(k \in \mathbb{N})$ плотны в $\left(\frac{1}{r}, r\right)$, то $(\operatorname{Int} A_k)$ — некоторая последовательность открытых подмножеств множества $\left(\frac{1}{r}, r\right)$ второй категории. Тогда следует, что множество $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ плотно в $\left(\frac{1}{r}, r\right)$ и поэтому непусто; противоречие. Отсюда получаем, что существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что множество A_{n_0} не плотно в $\left(\frac{1}{r}, r\right)$. Поэтому существует некоторый промежуток $[A, B] \subseteq \left[\frac{1}{r}, r\right]$ $(A < B)$ такой, что

$$[A, B] \subseteq (1/r, r) \setminus A_{n_0} = \{\lambda \in (1/r, r) \mid n_\lambda \le n_0\}.$$

Отсюда для каждого $\lambda \in [A, B]$ имеем $n_\lambda \le n_0$, поэтому для каждого $n \ge n_0 \ge n_\lambda$ и каждого $\lambda \in [A, B]$ будет $\frac{c_{[\lambda n]}}{c_n} < 1+\varepsilon$. Тем самым для каждого $\lambda \in \left[\frac{1}{r}, r\right]$ и всех достаточно больших $x \ge x_0$ получим

$$\frac{c_{[\lambda x]}}{c_{[x]}} = \frac{c_{[t[\eta[x]]]}}{c_{[\eta[x]]}} \cdot \frac{c_{[\eta[x]]}}{c_{[x]}}, \tag{3}$$

где $t = t(x) \in [A, B]$ и $\eta = 2\lambda/(A+B)$.

Так как $1/r^2 \le \eta \le r^2$, находим, что

$$1 - \varepsilon < \overline{k}_c(\lambda) \le \overline{k}_f(\lambda) < (1+\varepsilon)^2 \tag{4}$$

для каждого $\lambda \in \left[\frac{1}{r}, r\right]$. Отсюда $\lim\limits_{\lambda \to 1} \overline{k}_f(\lambda) = 1$, поэтому $\overline{k}_f(\lambda)$ — непрерывная функция для всех $\lambda > 0$. Но это значит, что функция $f(x) = c_{[x]}$, $x \ge 1$, принадлежит классу CR_f.

(a2) $\Longrightarrow$ (a3). Предположим, что функция $f(x) = c_{[x]}$, $x \ge 1$, принадлежит классу CR_f. Тогда, используя [2], получаем, что существует некоторое $n \ge B$ такое, что

$$c_n = f(n) = \exp\left\{\theta(n) + r_1(\log n) + \int\limits_B^n \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\right\},$$

где ε и θ — ограниченные измеримые функции на $[B, +\infty)$, функция r_1 ограничена и равномерно непрерывна на $[\log B, +\infty)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \theta(x) = 0$. Если взять $n_0 = [B] + 1$ и

$$s = \int\limits_B^{n_0} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt, \tag{5}$$

то функция $r(t) = r_1(t)+s$ ограничена и равномерно непрерывна на $[\log n_0, +\infty)$. Далее, пусть $\delta_k = k \int\limits_{k-1}^{k} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt$ для всех $k \geq n_0 + 1$ и $\delta_{n_0} = 0$. Так как

$$|\delta_k| = k\left|\int\limits_{k-1}^{k} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\right| \leq k \sup_{t\geq k-1} |\varepsilon(t)| \cdot \log\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) \leq 2 \sup_{t\geq k-1} |\varepsilon(t)| < M < +\infty$$

для всех $k \geq n_0 + 1$, то (δ_n) — ограниченная последовательность. Отсюда для всех $n \geq n_0$ и $\theta_n = \theta(n)$ получаем

$$c_n = \exp\left\{\theta_n + r(\log n) + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\delta_k}{k}\right\},$$

где $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = 0$, (δ_n) — ограниченная последовательность и функция $r = r(t)$ ограничена и равномерно непрерывна на отрезке $[\log n_0, +\infty)$.

(a3) $\Longrightarrow$ (a1). Предположим, что $\lambda > 1$ и $n \geq n_0$. Тогда

$$\frac{c_{[\lambda n]}}{c_n} = \exp\left\{\theta_{[\lambda n]} - \theta_n + r(\log[\lambda n]) - r(\log n) + \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \frac{\delta_k}{k}\right\}.$$

Так как функция $r(t)$ равномерно непрерывна на отрезке $[\log n_0, +\infty)$, $\theta_n \to 0$ при $n \to +\infty$ и

$$\inf_{k\geq n+1} \delta_k \log \frac{[\lambda n] + 1}{n+1} = \inf_{k\geq n+1} \delta_k \int\limits_{n+1}^{[\lambda n]+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \frac{\delta_k}{k}$$

$$\leq \sup_{k\geq n+1} \delta_k \int\limits_{n+1}^{[\lambda n]+1} \frac{dt}{t-1} = \sup_{k\geq n+1} \delta_k \log \frac{[\lambda n]}{n}$$

для каждого $n \geq n_0$ и некоторой ограниченной последовательности (δ_n), находим, что $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\ \lambda\to 1+}} c_{[\lambda n]}/c_n = 1$. Аналогично можно получить $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \lambda\to 1-}} c_{[\lambda n]}/c_n = 1$, поэтому $(c_n) \in CR_c$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если (c_n) — последовательность положительных чисел, то эквивалентны следующие условия:*

(b1) $(c_n) \in ER_c$;

(b2) $f(x) = c_{[x]}$, $x \geq 1$, *принадлежит классу* ER_f;

(b3) $c_n = \exp\left\{\varepsilon_n + \sum\limits_{k=n_0}^{n} \frac{\delta_k}{k}\right\}$, $n \geq n_0$, *где* $\varepsilon_n \to c \in \mathbb{R}$, $n \to +\infty$ *и* (δ_n) — *ограниченная последовательность.*

Доказательство. (b1) $\Longrightarrow$ (b2). Предположим, что $(c_n) \in ER_c$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $r = r(\varepsilon) > 1$ такое, что $|\overline{k}_c(\lambda) - 1| \leq \varepsilon$ для всех $\lambda \in [1, r^2]$. Существуют промежуток $[A, B] \subseteq [1, r]$ $(A < B)$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $n \geq n_0$ и каждого $z \in [A, B]$ будет $c_{[zn]}/c_n \leq 1+\varepsilon$. Это можно доказать таким же способом, как в части (a1) $\Longrightarrow$ (a2). Значит, для каждого $\lambda \in [r, r^2]$ и всех достаточно больших $x \geq x_0$ выполняется (3), где $t = t(x) \in [A, B]$ и $\eta = 2\lambda/(A + B)$. Так как $1 \leq \eta \leq r^2$, получаем (4) для всех $\lambda \in [r, r^2]$.

Далее, пусть $\lambda \in (1, r)$ и α такое, что $1 < \alpha \le \lambda \le \alpha^2$. Аналогично предыдущему случаю существуют некоторый промежуток $[C, D] \subseteq [1, \alpha]$ $(C < D)$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что для всех $n \ge n_0$ и каждого $z \in [C, D]$ будет $c_{[zn]}/c_n \le 1 + \varepsilon$. Тогда для всех таких λ и всех достаточно больших $x \ge x_0$ выполняется (3), где $t = t(x) \in [C, D]$ и $\eta = 2\lambda/(C + D)$. В силу $1 \le \eta \le \alpha^2 < r^2$ снова получаем (4).

Отсюда для всех рассматриваемых $\varepsilon > 0$ и всех $\lambda \in [1, r^2]$ приходим к (4). Это дает равенство $\lim\limits_{\lambda \to 1+} \overline{k}_f(\lambda) = 1$. Далее, для $\varepsilon > 0$ существует $s = s(\varepsilon) > 1$ такое, что $|\underline{k}_c(\lambda) - 1| \le \varepsilon$ для всех $\lambda \in [1, s^2]$.

Кроме того, существуют промежуток $[A_1, B_1] \subseteq [1, s]$ $(A_1 < B_1)$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что $c_{[zn]}/c_n \ge 1 - \varepsilon$ для каждого $n \ge n_0$ и всех $z \in [A_1, B_1]$. Это можно доказать аналогично доказательству существования промежутка $[A, B]$ в части (a1) $\implies$ (a2). Тогда для каждого $\lambda \in [s, s^2]$ и всех достаточно больших $x \ge x_0$, очевидно, выполняется (3), причем $t = t(x) \in [A_1, B_1]$ и $\eta = 2\lambda/(A_1 + B_1)$. Так как к тому же $1 \le \eta \le s^2$, находим, что для всех $\lambda \in [s, s^2]$

$$1 + \varepsilon \ge \underline{k}_c(\lambda) \ge \underline{k}_f(\lambda) \ge (1 - \varepsilon)^2. \tag{6}$$

Пусть, далее, $\lambda \in (1, s)$. Рассмотрим произвольное β такое, что $1 < \beta \le \lambda \le \beta^2$. Аналогично предыдущей части существуют некоторый промежуток $[C_1, D_1] \subseteq [1, \beta]$ $(C_1 < D_1)$ и $n_0 \in \mathbb{N}$ такие, что $c_{[zn]}/c_n \ge 1 - \varepsilon$ для каждого $n \ge n_0$ и всех $z \in [C_1, D_1]$. Тогда для всех рассматриваемых λ и достаточно больших $x \ge x_0$ выполняется (3), где $t = t(x) \in [C_1, D_1]$ и $\eta = 2\lambda/(C_1 + D_1)$. Так как $1 \le \eta \le \beta^2 < s^2$, получаем (6) для всех рассматриваемых λ. Отсюда для всех $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in [1, s^2]$ приходим к (6). Это сразу дает $\lim\limits_{\lambda \to 1+} \underline{k}_f(\lambda) = 1$, поэтому существует $\delta > 1$ такое, что $0 < \underline{k}_f(\lambda) \le \overline{k}_f(\lambda) < +\infty$ для всех $\lambda \in [1, \delta]$. Это значит, что $0 < \overline{k}_f(\lambda) < +\infty$ для всех $\lambda \in \left[\frac{1}{\delta}, \delta\right]$, откуда $f \in OR_f$, тем самым $\overline{k}_f(\lambda) < +\infty$ для всех $\lambda > 0$. Так как $\lim\limits_{\lambda \to 1-} \overline{k}_f(\lambda) = 1$, находим, что функция $\overline{k}_f(\lambda)$ непрерывна для всех $\lambda > 0$. Отсюда $f \in CR_f$. Поскольку $\overline{k}_c(\lambda) = \overline{k}_f(\lambda)$, $\lambda > 0$, получаем

$$\lambda^c \le \underline{k}_f(\lambda) \le \overline{k}_f(\lambda) \le \lambda^d$$

для некоторых c, $d \in \mathbb{R}$ и всех $\lambda \ge 1$. Значит, $f \in ER_f$.

(b2) $\Longrightarrow$ (b3). Предположим, что функция $f(x) = c_{[x]}$, $x \ge 1$, принадлежит классу ER_f. Тогда из [5] следует существование $B > 0$ такого, что для каждого $n \ge B$ выполнено

$$c_n = f(n) = \exp\left\{\varepsilon_1(n) + \int\limits_B^n \frac{\delta(t)}{t}\,dt\right\},$$

где функция $\delta(t)$ ограничена и измерима на $[B, +\infty)$, функция $\varepsilon_1(t)$ ограничена и измерима на $[B, +\infty)$ и $\varepsilon_1(t) \to c_1 \in \mathbb{R}$ при $t \to +\infty$. Если определим $n_0 = [B] + 1$ и s, как в (5), то функция $\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + s$ ограничена и измерима на $[B, +\infty)$ и $\varepsilon(t) \to c_1 + s = c$ при $t \to +\infty$. Отсюда

$$c_n = \exp\left\{\varepsilon_n + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{\delta_k}{k}\right\}$$

для каждых $n \ge n_0$, причем $\varepsilon_n = \varepsilon(n)$ $(n \ge n_0)$, $\varepsilon_n \to c$ при $n \to \infty$ и последовательность (δ_n) аналогично части (a2) $\implies$ (a3) ограничена.

(b3) $\Longrightarrow$ (b1). Если $\lambda \geq 1$ и $n \geq n_0$, то

$$\frac{c_{[\lambda n]}}{c_n} = \exp\left\{\varepsilon_{[\lambda n]} - \varepsilon_n + \sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \frac{\delta_k}{k}\right\}.$$

Так как $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\varepsilon_{[\lambda n]} - \varepsilon_n) = 0$ и

$$\left|\sum_{k=n+1}^{[\lambda n]} \frac{\delta_k}{k}\right| \leq \sup_{k\geq n+1} |\delta_k| \cdot \log\frac{[\lambda n]}{n}, \quad n \geq n_0,$$

находим, что

$$\log \overline{k}_c(\lambda) \leq d \cdot \log\lambda,$$

где $d = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\delta_k|$. Поэтому $\lambda^c \leq \overline{k}_c(\lambda) \leq \lambda^d$, где $c = -\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\delta_k|$ и $\lambda \geq 1$ произвольное. Отсюда $(c_n) \in ER_c$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть (c_n) — некоторая последовательность положительных чисел. Тогда эквивалентны следующие условия:*

(a1) *$(c_n) \in CR_c$;*

(a2) *$\lim\limits_{\lambda\to 1} \overline{k}_c(\lambda) = 1$;*

(a3) *если $k_i : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ $(i = 1, 2)$ — функции такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} k_i(n) = +\infty$ и $k_1(n) \sim k_2(n)$ при $n \to +\infty$, то $c_{k_1(n)} \sim c_{k_2(n)}$, если $n \to +\infty$;*

(a4) *имеет место равенство*

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \lambda\to 1}} \frac{c_{[\lambda n]}}{c_n} = 1.$$

Следствие 2. *Предположим, что $(c_n) \in CR_c$. Тогда*

(b1) *$\overline{k}_c(\lambda) = \overline{k}_f(\lambda)$, $\lambda > 0$, где $f(x) = c_{[x]}$, $x \geq 1$;*

(b2) *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\lambda\in T} \Big(\sup_{k\geq n} \frac{c_{[\lambda k]}}{c_k} - \overline{k}_c(\lambda)\Big) = 0$$

для любого компакта $T \subseteq (0, +\infty)$.

Заметим, что утверждение (b2), по-существу, является теоремой о равномерной сходимости для последовательностей из класса CR_c.

С помощью предыдущих результатов можно расширить теорию последовательностей из классов ER_c и CR_c аналогично соответствующей теории функций, как в случае RV (см. [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Božin V, Djurčić D.* A proof of a S. Aljančić hypothesis on $\mathscr{O}$–regularly varying sequences // Publ. Inst. Math. 1997. V. 76, N 62. P. 46–52.
2. *Djurčić D.* $\mathscr{O}$-regularly varying functions and strong asymptotic equivalence // J. Math. Anal. Appl. 1998. V. 220. P. 451–461.
3. *Коренблюм Б. И.* Об асимптотическом поведении интегралов Лапласа вблизи границы области сходимости // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104, № 2. С. 173–176.
4. *Schmidt R.* Über divergente folgen und lineare mittelbildungen // Math. Z. 1925. Bd 22. S. 89–152.

5. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. H.* Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
6. *Bojanić R., Seneta E.* A unified theory of regularly varying sequences // Math. Z. 1973. Bd 134. S. 91–106.

Статья поступила 22 октября 2003 г.

Дюрчич Драган
Технический факультет, Светого Саве, 65, Чачак 32000, Сербия и Черная Гора
draganj@tfc.kg.ac.yu

Торгашев Александр
Математический факультет, Студенческая площадь, 16а, Белград 11000, Сербия и Черная Гора
torgasev@poincare.matf.bg.ac.yu