Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2004. Том 45, № 5

УДК 517.76:515.16.165

РАВНОМЕРНО КВАЗИКОНФОРМНАЯ ГРУППА, НЕ ИЗОМОРФНАЯ МЁБИУСОВОЙ

П. В. Дойников

Аннотация: Указывается в явном виде группа, не изоморфная никакой группе мёбиусовых преобразований трехмерной сферы, у которой существует квазиконформное действие в трехмерной сфере.

Ключевые слова: мёбиусова группа, равномерно квазиконформная группа.

1. Введение

Поскольку конформные преобразования $\boldsymbol{S}^n$ при $n \geq 3$ исчерпываются мёбиусовыми, а следовательно, и группы конформных преобразований исчерпываются мёбиусовыми группами, естественно рассматривать их непосредственные обобщения. Одним из таких обобщений являются равномерно квазиконформные группы, т. е. группы квазиконформных преобразований $\boldsymbol{S}^n$, коэффициенты которых ограничены в совокупности. Большим обобщением являются введенные Герингом и Мартином [1] сходящиеся группы, за определение которых взято такое свойство мёбиусовых групп, что из всякого бесконечного семейства элементов можно выбрать последовательность, которая либо равномерно на $\boldsymbol{S}^n$ сходится к некоторому гомеоморфизму $\boldsymbol{S}^n$, либо сходится к постоянному отображению равномерно на компактах в дополнении к некоторой точке в $\boldsymbol{S}^n$.

На пути изучения равномерно квазиконформных групп естественным образом возникает вопрос: насколько класс равномерно квазиконформных групп шире класса конформных (мёбиусвых) групп, т. е. для всякой ли равномерно квазиконформной группы G преобразований сферы $\boldsymbol{S}^n$ существует гомеоморфизм $f : \boldsymbol{S}^n \to \boldsymbol{S}^n$ такой, что $fGf^{-1} = \Gamma$ мёбиусова? Другими словами, действие всякой ли равномерно квазиконформной группы можно сделать конформным с помощью замены координат.

В этом направлении следует отметить прежде всего работы Тукиа [2] и Суливана [3], показавших, что при $n = 2$ ответ положительный, причем гомеоморфизм f может быть сделан квазиконформным. В больших размерностях ситуация существенно меняется. Тукиа [4] построен пример равномерно квазиконформной непрерывной группы, которая квазиконформно не сопряжена никакой мёбиусовой. Пример дискретной равномерно квазиконформной группы с тем же свойством впервые построен Мартином [5]. Фридман и Скора [6] построили примеры свободных разрывных равномерно квазиконформных групп, действующих в $\boldsymbol{S}^3$ и $\boldsymbol{S}^4$ и топологически не сопряженных никаким мёбиусовым. Кроме того, следует отметить пример М. Э. Каповича равномерно квазиконформной группы, топологически не сопряженной мёбиусовой [7]. В работе Н. А. Исаченко [8] доказано, что существует равномерно квазиконформная конечнопорожденная группа G, действующая разрывно и свободно на области $\boldsymbol{\Omega}(G) \subset \boldsymbol{S}^3$ и не изоморфная как абстрактная группа никакой группе мёбиусовых преобразований $\boldsymbol{S}^3$. Но в упомянутой работе не предъявляется в явном виде пример такой группы, и поэтому целью настоящей работы является ее построение.

2. Определения и необходимые результаты

Пусть $\boldsymbol{S}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — расширенное евклидово пространство, отождествленное со сферой $\boldsymbol{S}^n$ при помощи стандартной стереографической проекции. Через $\boldsymbol{M}_n$ будем обозначать группу всех мёбиусовых преобразований $\boldsymbol{S}^n$, т. е. отображений, являющихся композицией четного числа инверсий в $\boldsymbol{S}^n$. Согласно теореме Луивилля при $n \geq 3$ группа $\boldsymbol{M}_n$ совпадает со всей группой конформных преобразований $\boldsymbol{S}^n$ [9]. *Мёбиусовой группой* будем называть любую подгруппу группы $\boldsymbol{M}_n$.

Говорят, что группа $G < \boldsymbol{M}_n$ действует *разрывно в точке* $x \in \boldsymbol{S}^n$, если существует окрестность $U_x \subset \boldsymbol{S}^n$ точки x, для которой $g(U_x) \cap U_x \neq \varnothing$ не более чем для конечного числа элементов $g \in G$. Множество $\boldsymbol{\Omega}(G)$ всех таких точек называется *множеством разрывности*, а его дополнение $\boldsymbol{\Lambda}(G) = \boldsymbol{S}^n \backslash \boldsymbol{\Omega}(G)$ — *предельным множеством* группы G. Группа $G < \boldsymbol{M}_n$ называется *разрывной*, если $\boldsymbol{\Omega}(G)$ непусто. Разрывные подгруппы $\boldsymbol{M}_n$ обычно называют *клейновыми*.

На группе $\boldsymbol{M}_n$ естественным образом вводится топология равномерной сходимости на компактах, относительно которой $\boldsymbol{M}_n$ является топологической группой.

Подгруппа $G < \boldsymbol{M}_n$ называется *дискретной*, если ее элементы образуют дискретное множество в $\boldsymbol{M}_n$ относительно топологии равномерной сходимости. Это эквивалентно тому, что единичный элемент изолирован.

Пуанкаре заметил, что каждое мёбиусово преобразование, действующее в $\boldsymbol{S}^n$, имеет единственное продолжение до мёбиусова преобразования, действующего в $\boldsymbol{S}^{n+1}$.

Фундаментальным множеством клейновой группы G называется множество $F \subset \boldsymbol{\Omega}(G)$, содержащее по одной точке каждой орбиты $G_x = \{g(x) : g \in G\}$, $x \in \boldsymbol{\Omega}(G)$ и такое, что для любой компоненты связности $\Omega_i \in \boldsymbol{\Omega}(G)$ пересечение $F \cap \Omega_i$ связно. Любая клейнова группа обладает фундаментальной областью, например областью Дирихле [10].

Пусть $G < \boldsymbol{M}_n$ — разрывная группа такая, что $\infty \in \boldsymbol{\Omega}(G)$ и $G_\infty = \{\mathrm{id}\}$, тогда

$$P(G) = \{x \in \boldsymbol{S}^n : \sup_{g \in G \backslash \{\mathrm{id}\}} |g'(x)| < 1\} = \boldsymbol{S}^n \backslash \overline{\bigcup_{g \in G \backslash \{\mathrm{id}\}} (\mathrm{int}(I(g))}$$

(т. е. пересечение внешностей изометрических сфер $I(g)$) называют *фундаментальным полиэдром* группы G.

Естественным обобщением мёбиусовых групп являются так называемые равномерно квазиконформные группы.

Группа G гомеоморфизмов n-мерной сферы $\boldsymbol{S}^n$ на себя называется *равномерно квазиконформной*, если каждый ее элемент является квазиконформным и коэффициенты квазиконформности ограничены в совокупности.

Как и в случае с мёбиусовыми группами аналогичным образом вводятся понятия разрывного действия, множества разрывности, предельного множества и разрывной группы.

Вторая теорема комбинирования по Маскиту. *Пусть* $\Gamma \subset \boldsymbol{M}_n$ — *разрывная группа с подгруппами* H_1 *и* H_2, *относительно которых строго инвариантны замкнутые области* D_1 *и* D_2, *ограниченные жордановыми поверхностями* S_1 *и* S_2 *и такие, что существует* $f \in \boldsymbol{M}_n$, $f(\operatorname{int} D_1) = \boldsymbol{S}^n \backslash D_2$, *и пусть выполнены условия:*

1) *если* Δ_1, Δ_2 *и* $F_0 \subset \Delta_1 \cap \Delta_2$ — *фундаментальные области групп* H_1, H_2 *и* Γ *соответственно, то существуют окрестности* V_1 *и* V_2 *поверхностей* S_1 *и* S_2 *такие, что* $\Delta_i \cap V_i \subset F_0$, $i = 1, 2$;

2) $\Delta_i \cap D_i = F_0 \cap D_i$, $i = 1, 2$;

3) $F = \operatorname{int}\{F_0 \cap \operatorname{ext}(D_1 \cup D_2)\} \neq \varnothing$;

4) $f H_1 f^{-1} = H_2$;

5) $g(D_1) \cap D_2 = \varnothing$ *для всех* $g \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}\}$.

Тогда

1) *группа* $G = \langle \Gamma, f \rangle$ *разрывна, и* F — *ее фундаментальная область;*

2) *каждое соотношение в* G *есть следствие соотношений в* Γ *и условия* 4.

Пусть M — трехмерное многообразие. По теореме Мойза [11] на многообразии M можно ввести кусочно-линейную структуру. Поэтому в дальнейшем мы всегда будем считать, что на M зафиксирована некоторая кусочно-линейная структура и все отображения многообразий являются кусочно-линейными.

Расслоение Зейферта. Все определения из теории расслоений Зейферта и двумерных орбифолдов предполагаются известными (подробное изложение можно найти в [12]). Приведем лишь те свойства, которых вполне достаточно для понимания этого объекта и необходимые в дальнейшем.

Пространство слоев расслоения Зейферта наделяется естественной структурой орбифолда, который будем называть *базой расслоения Зейферта.*

Край любого расслоения Зейферта состоит из торов.

Пусть M — компактное расслоение Зейферта, имеющее q особых слоев, и база $\mathscr{O}$ представляет ориентируемый орбифолд рода g с p компонентами края. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M)$ имеет следующее копредставление [13]:

$$\pi_1(M) = \Big\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, c_1, \ldots, c_q, d_1, \ldots, d_p, t$$
$$: [a_i, t] = [b_i, t] = [c_j, t] = [d_k, t] = 1, c_j^{\alpha_j} = t,\ t^b = \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] c_1 \ldots c_q d_1 \ldots d_p = 1 \Big\rangle,$$

где α_j — индекс j-го слоя.

3. Равномерно квазиконформная группа, не изоморфная мёбиусовой

Данный пункт посвящен построению равномерно квазиконформной группы, не изоморфной никакой мёбиусовой. Здесь будет доказана

Теорема 1. *Пусть* $G = \langle a, b, c, t, \varphi : abc = 1,\ c^2 = t,\ [a, t] = [b, t] = 1,\ \varphi a \varphi^{-1} = t,\ \varphi t \varphi^{-1} = b,\ a^{24} = t^{24} = 1 \rangle$. *Тогда*

1) *существует равномерно квазиконформное действие группы* G на $\boldsymbol{\Omega}(G) \subset \boldsymbol{S}^3$;

2) G *не изоморфна никакой группе мёбиусовых преобразований* $\boldsymbol{S}^3$.

3.1. Идея доказательства. В доказательстве мы используем пример Каповича [7] замкнутого трехмерного многообразия M, на котором невозможно ввести плоскую конформную структуру, в то время как на некотором его конечнолистном накрытии M_1 такая структура существует, причем униформизируемая, т. е. $M_1 = \Omega(\Gamma)/\Gamma$, где $\Gamma < \mathscr{M}_3$ и $\Omega(\Gamma)$ — инвариантная компонента области разрывности группы Γ.

Рассмотрим расслоение Зейферта N над базисным орбифолдом $\mathscr{O}$, представляющим собой кольцо с конической точкой порядка два. Фундаментальная группа такого многообразия имеет копредставление: $\pi_1(N) = \langle a, b, c, t : abc = 1, c^2 = t, [a,t] = [b,t] = 1\rangle$ (см. п. 2). Многообразие N имеет две компоненты края T_1 и T_2, фундаментальные группы которых порождаются парами a, t и b, t соответственно. Рассмотрим гомеоморфизм $f : T_1 \to T_2$ такой, что $f_*(a) = t$, $f_*(t) = b$ и образующие выбраны так, что f меняет индуцированную из N ориентацию края, здесь $f_* : \pi_1(T_1) \to \pi_1(T_2)$ — индуцированный изоморфизм. В качестве M возьмем многообразие, полученное из N отождествлением точек $x \in T_1$ и $f(x) \in T_2$. Группа $\pi_1(M)$ есть HNN-*расширение* $\pi_1(N)$:

$$\pi_1(M) = \langle a, b, c, t, \varphi : abc = 1,\ c^2 = t,\ [a,t] = [b,t] = 1,\ \varphi a \varphi^{-1} = t,\ \varphi t \varphi^{-1} = b\rangle$$

М. Э. Каповичем доказано, что на многообразии M, рассмотренном выше, невозможно ввести плоскую конформную структуру, а на некотором его конечнолистном накрытии M_1 такая структура существует, причем униформизируемая.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \Omega(\Gamma) \arrow[rr, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & & M_1, \arrow[dl, "p"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

здесь $M_1 = \Omega(\Gamma)/\Gamma$, $\Gamma < \mathscr{M}_3$, $M = M_1/H$, H — конечная группа кусочно-линейных гомеоморфизмов, $p_1 : \Omega(\Gamma) \to M_1$ и $p : M_1 \to M$ — накрытия, $p_2 = p \circ p_1$.

В работе Н. А. Исаченко [8] доказано, что накрытие $p_2 : \Omega(\Gamma) \to M$ регулярно (это эквивалентно тому, что действие каждого гомеоморфизма $h \in H$ поднимается до действия гомеоморфизма h' в $\Omega(\Gamma)$). Тогда $M = \Omega(\Gamma)/G$, где $G = \langle \Gamma, h'_1, \dots, h'_k\rangle$, h'_i действует кусочно-линейно, $k = |H|$, причем индекс Γ в G конечен. Таким образом, группа G равномерно квазиконформная. Там же показано, что G не изоморфна никакой мёбиусовой.

3.2. Построение многообразия M_1. Одним из основных этапов доказательства теоремы 1 является построение многообразия M_1, являющегося регулярным накрытием многообразия M.

К базисному орбифолду $\mathscr{O}$ приклеим вдоль компонент края диски D_1 и D_2 с коническими точками порядка 24. Полученный в результате орбифолд обозначим через $\mathscr{O}'$. Построим регулярное накрытие орбифолда $\mathscr{O}'$. Для этого рассмотрим его фундаментальную группу, копредставление которой имеет вид $\pi_1(\mathscr{O}') = \langle a, b : a^{24} = b^{24} = (ab)^2 = 1\rangle$. Выделим в ней подгруппу, порожденную элементами $A_i = a^{-11(i-1)} b^{-1} a^{11i}$, $i = 1, \dots, 24$, и обозначим ее через G_0. Выделенная подгруппа G_0 является нормальной индекса 24 [14, § 5.5] и фундаментальной группой поверхности рода 6. Из нормальности построенной подгруппы следует, что накрытие, показанное в [14, § 5.5] (обозначим его через $\Psi' : S_6 \to \mathscr{O}'$), регулярное, S_6 — замкнутая поверхность рода 6.

Рассмотрим поверхность с краем $\mathscr{P} = S_6 \backslash (\Psi'^{-1}(D_1) \cap \Psi'^{-1}(D_2))$. В силу регулярности Ψ' накрытие $\Psi'|_{\mathscr{P}} : \mathscr{P} \to \mathscr{O}$ регулярно и из [15] следует, что существуют расслоение Зейферта $\mathscr{W}$ над $\mathscr{P}$ и накрытие $\Psi : \mathscr{W} \to N$, которому соответствует накрытие $\Psi'|_{\mathscr{P}} : \mathscr{P} \to \mathscr{O}$ баз и 24, кратное накрытие слоя N слоем $\mathscr{W}$. Так как $\partial W \neq \varnothing$, поверхность $\mathscr{P}$ ориентируема, а расслоение Зейферта $\mathscr{W} \to \mathscr{P}$ не имеет сингулярных слоев, тогда W гомеоморфно $\mathscr{P} \times \boldsymbol{S}^1$.

Склеим из $\mathscr{W}$ накрытие M_1 над M. Для этого зафиксируем ориентацию на $\mathscr{W}$ так, чтобы гомеоморфизм, склеивающий из $\mathscr{W}$ многообразие M_1, менял ориентацию края. Пусть σ_1 и σ_2 — компоненты $\partial\mathscr{P}$, теми же символами обозначим их естественное вложение в $\mathscr{P} \times \boldsymbol{S}^1$. Пусть $t_1 = \{x_1 \times \boldsymbol{S}^1, x_1 \in \sigma_1\}$, $t_2 = \{x_2 \times \boldsymbol{S}^1, x_2 \in \sigma_2\}$. Пусть $T_1' = \sigma_1 \times \boldsymbol{S}^1$, $T_2' = \sigma_2 \times \boldsymbol{S}^1$. Ориентируем t_1 и t_2 одинаковым образом, а σ_1 и σ_2 так, чтобы сумма соответствующих элементов $H_1(\mathscr{W}, \mathbb{Z})$ равнялась нулю и ориентация пар (t_1, σ_1) и (t_2, σ_2) совпадала с выбранной ориентацией ∂W. Пусть $f : T_1' \to T_2'$, $f_*(\sigma_1) = t_2$ и $f_*(t_1) = \sigma_2$. Тогда полученное при склейке многообразие M_1 будет накрывать M [15].

3.3. Зацепление торов. Также важным этапом в доказательстве теоремы 1 будет размещение торов в пространстве. Для этого введем некоторые обозначения.

Пусть в некоторой плоскости лежит окружность $O(Q, \rho)$ с центром в точке Q и радиусом ρ, а l — прямая в той же плоскости, удаленная от точки P на расстояние $\rho + R$, где $R > 0$. Тор, полученный из $O(Q, \rho)$ вращением в $\mathbb{R}^3$ вокруг l, обозначим через $T(R, \rho)$. Прямую l назовем *осью вращения*, а плоскость, перпендикулярную l и проходящую через Q, назовем *основной плоскостью* тора.

Пусть на координатной плоскости лежит окружность S_0, уравнение которой имеет вид $(x-R)^2 + y^2 = r^2$, где $R = r \cdot \operatorname{ctg}(\pi/24)$. Рассмотрим S_1 — образ S_0 при повороте плоскости относительно начала координат на угол $\pi/12$. Нетрудно видеть, что угол между S_1 и S_0 в точках пересечения равен $\pi/12$. Пусть S_k — образы окружности S_0, полученные поворотом плоскости относительно начала координат на угол $\pi \cdot k/12$, $k = 2, \dots, 23$. Тогда группа, порожденная отображениями внешности S_i на внутренность S_{i+12}, изоморфна G_0 (см. 3.2). Обозначим ее также через G_0. Продолжим действие группы G_0 в S_3. Пусть G_0' — продолжение G_0 в $\boldsymbol{S}^3$. Тогда дополнение к фундаментальному полиэдру группы G_0' содержится в замыкании полнотория $T = T(r \cdot \operatorname{ctg} \pi/24, r)$. Возьмем $r = 0.95$.

Пусть $T_1 = T(1, 1)$ — тор с осью вращения, проходящей через точку с координатами $(0.95 \cdot \operatorname{ctg}(\pi/24), 0, 0)$ и перпендикулярной Ox. Обозначим через γ_1 инверсию относительно сферы радиуса 1 с центром в точке A с координатами $(0.95 \cdot \operatorname{ctg}(\pi/24) - 2, 0, 0)$; через γ_2 — растяжение с центром в A и коэффициентом 15; через γ_3 — сдвиг на вектор $(-(0.95 \cdot \operatorname{ctg}(\pi/24) + 2), 0, 0)$; через γ_4 — отражение относительно плоскости, проходящей через Ox и образующей с основной плоскостью тора T угол в 45°. Нетрудно видеть, что $\gamma = \gamma_4 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_1$ — мёбиусово преобразование.

Пусть $T_* = \gamma \cdot T_1$. Нетрудно убедиться в том, что торы T, T_1 и T_* расположены в пространстве так, что T будет иметь с T_1 и T_* индекс зацепления 1, а сами T_1 и T_* не будут пересекаться (рис. 1).

Итак, мы разместили нужным образом торы в пространстве и указали мёбиусово преобразование γ, переводящее внешность тора T_1 во внутренность тора T_*.

3.4. Доказательство теоремы 1.

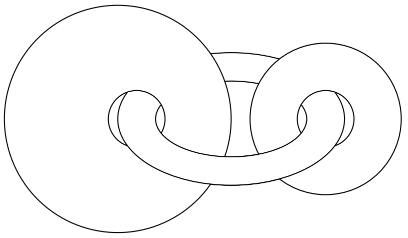

Рис. 1

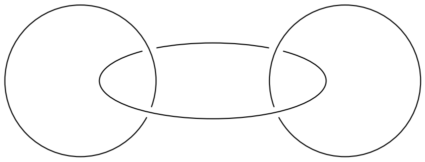

Рис. 2.

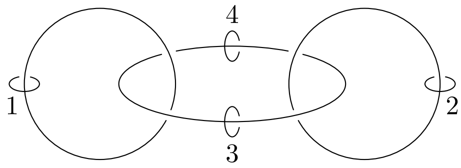

Рис. 3.

Лемма. *Пусть L — зацепление трех окружностей в $\boldsymbol{S}^3$, как показано на рис.* 2. *Тогда $\boldsymbol{S}^3 \backslash L$ является регулярным накрытием многообразия M* (см. 3.1), *причем группа скольжения имеет копредставление* $\langle a, b, c, t, \varphi : abc = 1,\ c^2 = t,\ [a, t] = [b, t] = 1,\ \varphi a \varphi^{-1} = t,\ \varphi t \varphi^{-1} = b,\ a^{24} = t^{24} = 1 \rangle$.

Доказательство. Пусть $p : M_1 \to M$ — накрытие, рассмотренное ранее (см. 3.1), и H — его группа скольжений. Рассмотрим группу G_0' (см. 3.3). Из нее комбинированием по Маскиту построим группу, униформизирующую M_1.

Граница фундаментального полиэдра F группы G_0' лежит внутри замыкания полнотория T. Выкинем из F полнотории T_1 и T_*. Пусть γ — мёбиусово преобразование, построенное в 2.3. Устроим HNN-расширение группы G_0' с помощью элемента γ. Тогда выполняются все условия второй теоремы комбинирования по Маскиту, так как $\operatorname{int} T_1$ и $\operatorname{int} T_*$ строго инвариантны относительно единичной подгруппы. В итоге многообразие, полученное из $F \backslash (\operatorname{int} T_1 \cup \operatorname{int} T_*)$ склейкой граничных точек, эквивалентных относительно G_0' и элемента γ, гомеоморфно M_1 (см. 3.2). Таким образом, многообразие M_1, 24-листно накрывающее M, униформизируется группой $\gamma G_0' \gamma^{-1} = \Gamma$.

Как отмечалось ранее, действие каждого гомеоморфизма $h \in H$ поднимается до действия кусочно-линейного гомеоморфизма h' в $\Omega(\Gamma)$. При этом группа скольжений накрытия $p_2 : \Omega(\Gamma) \to M$ является равномерно квазиконформной. Найдем фундаментальную группу многообразия $\Omega(\Gamma)$, которое гомеоморфно, как нетрудно видеть, $\boldsymbol{S}^3 \backslash L$ (см. рис. 2). Пусть a', b' и t' суть соответственно петли 1, 2 и 3. Очевидно, что 3-я и 4-я петли гомотопы. Выписывая соотношение Ветингенера, видим, что фундаментальная группа $\Omega(\Gamma)$ имеет копредставление $\pi_1 = \langle a', b', t' : [a', t'] = [b', t'] = 1 \rangle$. Так как $p_1|\sigma_1$ и $p_1|\sigma_2$ — гомеоморфизм, а накрытие $p : M_1 \to M$ 24-листное, имеем $p_{2*}(a') = a^{24}$, $p_{2*}(b') = b^{24}$ и $p_{2*}(t') = t^{24}$. Тогда, так как для группы скольжений накрытия p_2 $G \cong \pi_1(M, y_0)/p_{2*}(\pi_1(\Omega, x_0))$ будет $x_0 \in p_2^{-1}(y_0)$, то

$$G \cong \langle a, b, c, t, \varphi : abc = 1,\ c^2 = t,\ [a, t] = [b, t] = 1,\ \varphi a \varphi^{-1} = t,\\ \varphi t \varphi^{-1} = b,\ a^{24} = b^{24} = t^{24} = 1 \rangle.$$

Из представления фундаментальной группы M следует, что $b = \varphi a \varphi^{-2}$. Таким образом, соотношение $b^{24} = 1$ можем исключить.

Из доказательства леммы непосредственно следует и доказательство теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gehring F., Martin G.* Discrete quasiconformal groups. I // London Math. 1987. V. 55, N 3. P. 331–358.
2. *Tukia P.* On two-dimension quasiconformal groups // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1980. V. 5. P. 73–78.
3. *Sullivan D.* On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete groups of hyperbolic motions // Ann. of Math. Stud. 1981. N 97. P. 465–496.
4. *Tukia P.* A quasiconformal groups not isomorphic to a Mobius groups // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1981. V. 6. P. 149–160.
5. *Martin G.* Discrete quasiconformaly groups that are not the quasiconformaly conjugates of Mobius groups // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 1986. V. 11. P. 179–202.
6. *Freedman M., Skora R.* Strange actions of groups on spheres // J. Differential Geom. 1987. V. 25. P. 75–78.
7. *Капович М. Э.* Плоские конформные структуры на трехмерных многообразиях: проблема существования. I // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 60–73.
8. *Исаченко Н. А.* О равномерно квазиконформных разрывных группах, не изоморфных мёбиусовым // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313, № 5. С. 1040–1043.
9. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Наука, 1982.
10. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986.
11. *Moise E.* Affine structure on 3-manifolds // Ann. of Math. 1952. V. 56. P. 96–114.
12. *Скотт П.* Геометрии на трехмерных многообразиях. М.: Мир, 1986.
13. *Hempel J.* 3-manifolds. Prinseton: Prinseton Univ. Press, 1976.
14. *Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.
15. *McCullough D., Miller A.* Manifold covers of 3-orbifold with geometric pieces. Norman, Oklahoma, 1987. (Preprint / Univ. of Oklahoma).

Статья поступила 10 декабря 2003 г.

Дойников Павел Витальевич
Омский гос. университет, кафедра математического анализа,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
pdojn@yandex.ru