Сибирский математический журнал
Июль—август, 2004. Том 45, № 4

УДК 514.13+514.144.24

ТЕОРЕМА АЙВОРИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Х. Штахель, И. Валлнер

Аннотация: Согласно плоской версии теоремы Айвори каждое семейство софокусных коник обладает тем свойством, что в каждом криволинейном четырехугольнике, образованном двумя парами коник, длины диагоналей одинаковы. Оказывается, эта теорема тесно связана с самосопряженными аффинными преобразованиями. Такая точка зрения дает возможность обобщить теорему Айвори на гиперболические и другие пространства.

Ключевые слова: гиперболическая геометрия, теорема Айвори, конфокальные квадрики.

1. Введение

Теорема Айвори для евклидовой плоскости утверждает, что диагонали X_1X_2' и X_2X_1' любого криволинейного четырехугольника, образованного четырьмя софокусными кониками, имеют равные длины (см. рис. 1). Другая формулировка этой же теоремы такова. *Предположим, что k и k' являются софокусными эллипсами или софокусными гиперболами* (т. е. двумя кониками *одного типа*). *Тогда существует аффинное преобразование α такое, что $\alpha(k) = k'$ и всякая софокусная с k и k' коника другого типа, пересекающая k в точке X_1, с необходимостью пересекает k' в точке $\alpha(X_1)$, причем оба пересечения происходят под прямым углом.* При этом теорема Айвори утверждает равенство расстояний:

$$\overline{\alpha(X_1)\,X_2} = \overline{X_1\,\alpha(X_2)} \quad \text{для всех } X_1, X_2 \in k.$$

Это утверждение справедливо также для вырожденных α, когда $k' = \alpha(k)$ вырождается в множество точек, расположенных на оси симметрии коники k.

Используя подходящую параметризацию, Дж. Айвори в 1809 г. прямыми вычислениями доказал трехмерную версию этой теоремы ([1], см. также [2–6]).

Эта теорема справедлива и в n-мерном евклидовом пространстве ($n > 1$, см., например, [7]). В [8] было показано, что она справедлива также на псевдоевклидовой плоскости (плоскости Минковского). Целью настоящей статьи является доказательство теоремы Айвори в гиперболических пространствах $\mathbb{H}^n$ и даже более общем классе псевдоримановых пространств постоянной кривизны.

2. Определения и вспомогательные результаты

2.1. Скалярные произведения. Мы рассматриваем вещественное n-мерное проективное пространство $\mathbb{P}^n$, трактуемое как множество *точек* $X = \mathbf{x}\mathbb{R}$, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Мы считаем, что в $\mathbb{R}^{n+1}$ введено *скалярное произведение*, т. е. невырожденная симметрическая билинейная форма $\langle\ ,\ \rangle$. Если

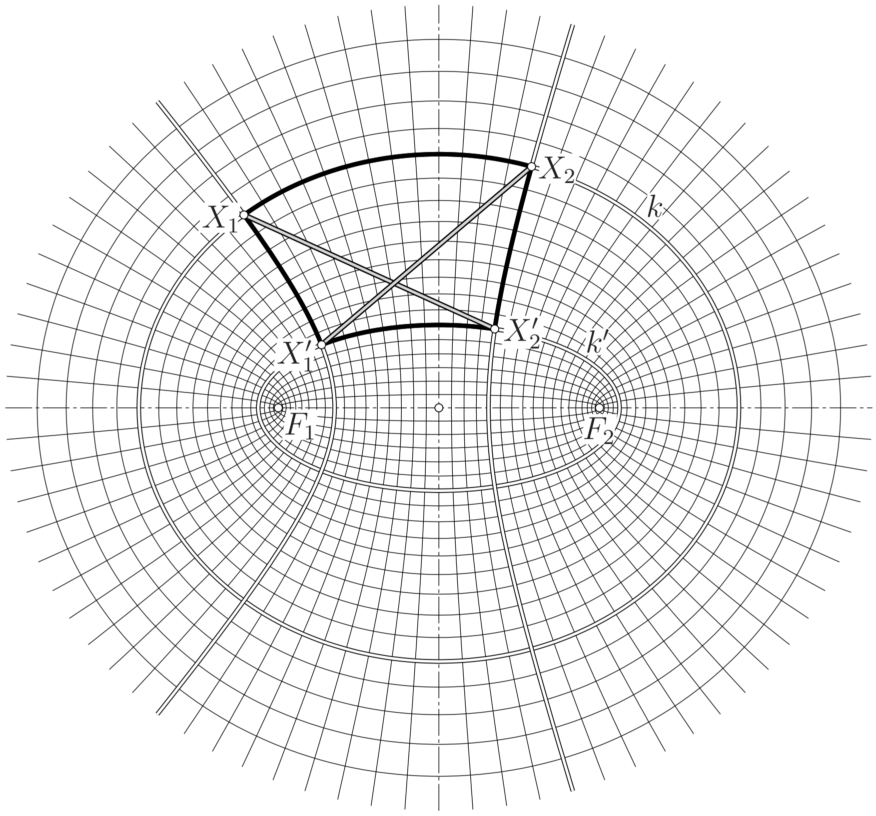

Рис. 1. Теорема Айвори для евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$.

скалярное произведение имеет сигнатуру $(- + \cdots +)$, то n-мерное *гиперболическое пространство* определяется как подмножество

$$\mathbb{H}^n = \{\mathbf{x}\mathbb{R} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0\}$$

пространства $\mathbb{P}^n$. Гиперболическое расстояние $d_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ между точками пространства $\mathbb{H}^n$ задается формулой

$$\operatorname{ch} d_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left| \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}} \right|. \tag{1}$$

Случай сигнатуры $(+ \cdots +)$ приводит к *эллиптической метрике* d_e в пространстве $\mathbb{P}^n$, задаваемой формулой

$$\cos d_e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left| \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}} \right|. \tag{2}$$

Замечание. Стандартная сферическая геометрия является двулистным накрытием эллиптического n-мерного пространства. Гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$ мы можем отождествить с одной из двух компонент множества $\{\mathbf{x} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1\}$. Это вложение индуцирует риманову метрику в пространстве $\mathbb{H}^n$, в которой расстояния между точками вычисляются по формуле (1). Общую информацию о гиперболических пространствах читатель может найти, например, в [9].

Аналогично сигнатуры $(+-\cdots-)$ и $(-\cdots-)$ порождают гиперболическую и эллиптическую геометрии (с очевидными изменениями в определении метрики). Сигнатуры вида $(++--\pm\cdots\pm)$ не приводят к римановым многообразиям, но мы по-прежнему можем рассматривать выражения вида

$$\delta(X,Y)=\delta(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\sqrt{|\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle|}},\tag{3}$$

которые в некотором смысле заменяют метрику и имеют смысл для всех точек $X=\mathbf{x}\mathbb{R}$, $Y=\mathbf{y}\mathbb{R}\in\mathbb{P}^n$, для которых $\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle,\langle\mathbf{y},\mathbf{y}\rangle\neq 0$. Точки $\mathbf{x}\mathbb{R}$, для которых $\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=0$, называются *бесконечно удаленными.*

Гиперплоскостями в $\mathbb{P}^n$ называем множества нулей линейных форм $\mathbf{a}^*\in\mathbb{R}^{(n+1)*}$. Форму $\mathbf{a}^*$ можно представлять ее *градиентным вектором* $\mathbf{v}$; тогда $\mathbf{a}^*(\mathbf{x})=\langle\mathbf{v},\mathbf{x}\rangle$. Две гиперплоскости с градиентными векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ соответственно называются *ортогональными*, если $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle=0$. Если гиперплоскость ортогональна сама себе, то мы называем ее *бесконечно удаленной.*

Напомним, что *эндоморфизмы* l и l^* называются *сопряженными*, если $\langle\mathbf{x},l(\mathbf{y})\rangle=\langle l^*(\mathbf{x}),\mathbf{y}\rangle$ для всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Если билинейная форма записана в виде $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})=\langle\mathbf{x},l(\mathbf{y})\rangle$, где l — некоторый линейный эндоморфизм, то σ является симметрической, если и только если l является самосопряженным.

Определение 1. Множество нулей (невырожденной) симметрической билинейной формы $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})=\langle\mathbf{x},l(\mathbf{y})\rangle$, где l — самосопряженный (невырожденный) линейный эндоморфизм, называется (*невырожденной*) *квадрикой* Φ.

Эндоморфизм $l=\mathrm{id}$ соответствует *бесконечно удаленной квадрике* Ω, т. е. множеству бесконечно удаленных точек.

2.2. Самосопряженные эндоморфизмы. Обсудим возможность *совместного приведения к нормальной форме* симметрической билинейной формы $\langle\ ,\ \rangle$ и самосопряженного линейного отображения l, т. е. возможность выбора такой координатной системы, в которой координатные матрицы обоих отображений имеют простой вид. Единичную $k\times k$-матрицу мы обозначаем через I_k, а также используем обозначения

$$J_k(t,s)=\begin{bmatrix} t & s & & \\ & t & \ddots & \\ & & \ddots & s \\ & & & t\end{bmatrix},\quad S_k=\begin{bmatrix} & & 1\\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{bmatrix},\quad R_2(a,b)=\begin{bmatrix} a & b\\ -b & a\end{bmatrix},$$

$$R_{2k}(a,b,s)=\begin{bmatrix} R_2(a,b) & sI_2 & & \\ & R_2(a,b) & \ddots & \\ & & \ddots & sI_2\\ & & & R_2(a,b)\end{bmatrix},$$

в которых нижний правый индекс равен размеру матрицы.

Теорема 1. *Для любого самосопряженного линейного эндоморфизма l существует такая система координат в $\mathbb{R}^{n+1}$, что $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\mathbf{x}^T H\mathbf{y}$, $l(\mathbf{x})=A\cdot\mathbf{x}$, причем матрицы A и H имеют следующий вид:*

$$A=\mathrm{diag}(J_{r_0}(t_0,1),\ldots,J_{r_{k-1}}(t_{k-1},1),R_{2r_k}(a_k,b_k,1),\ldots,R_{2r_s}(a_s,b_s,1)),\tag{4}$$

$$H=\mathrm{diag}(\varepsilon_0S_{r_0},\ldots,\varepsilon_{k-1}S_{r_{k-1}},\varepsilon_kS_{2r_k},\ldots,\varepsilon_sS_{2r_s}),\tag{5}$$

где $\varepsilon_i=\pm1$, а $t_i,a_i,b_i\in\mathbb{R}$, $b_i\neq 0$.

Доказательство. См. [10, теорема 5.3]. □

Следствие 1. *В случае знакоопределенного скалярного произведения* $\langle\ ,\ \rangle$, *нормальная форма из теоремы* 1 *принимает вид*

$$A = \operatorname{diag}(t_0, \ldots, t_n), \quad H = \pm I_{n+1}.$$

В случае гиперболического скалярного произведения с сигнатурой $\varepsilon(- + \cdots +)$, $\varepsilon = \pm 1$, *нормальная форма из теоремы* 1 *принимает вид*

(i) $A = \operatorname{diag}(t_0, \ldots, t_n)$, $H = \varepsilon \operatorname{diag}(-1, I_n)$,

(ii) $A = \operatorname{diag}(J_2(t_0, 1), t_2, \ldots, t_n)$, $H = \varepsilon \operatorname{diag}(\varepsilon_0 S_2, I_{n-1})$, *где* $\varepsilon_0 = \pm 1$,

(iii) $A = \operatorname{diag}(R_2(a, b), t_2, \ldots, t_n)$, $H = \varepsilon \operatorname{diag}(\varepsilon_0 S_2, I_{n-1})$, *где* $\varepsilon_0 = \pm 1$,

(iv) $A = \operatorname{diag}(J_3(t_0, 1), t_3, \ldots, t_n)$, $H = \varepsilon \operatorname{diag}(S_3, I_{n-2})$.

Доказательство. Сначала рассмотрим гиперболический случай. Поскольку каждая из матриц εS_r имеет сигнатуру $\varepsilon(+ - + - \cdots)$, то, суммируя, мы легко находим сигнатуру блочной матрицы (5). Эта сигнатура должна равняться сигнатуре скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$. Следовательно, только одна из матриц S_r имеет размер больше единицы, причем этот размер должен быть меньше четырех. Теперь результат немедленно вытекает из теоремы 1.

Эллиптический случай может быть рассмотрен аналогично. Отметим только, что он в точности соответствует спектральной теореме для самосопряженных эндоморфизмов при наличии знакоопределенного скалярного произведения. $\square$

2.3. Квадратные корни. Ниже мы будем пользоваться тем, что некоторые эндоморфизмы имеют квадратные корни определенного вида. Для удобства читателя мы приводим соответствующие утверждения в этом пункте. Прежде всего очевидным образом распространим данное выше определение для матриц $J_k(t, s)$ на матрицы с элементами из некоторого кольца R. Установим соответствие между формальными степенными рядами с коэффициентами из коммутативного кольца R и матрицами из $R^{k\times k}$ $(k > 0)$ следующим образом:

$$a(x) \sim A \iff a(x) = \sum a_i x^i, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{k-1} \\ & a_0 & \ldots & a_{k-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Очевидно, что

$$A, B \in R^{k\times k}, \quad a(x) \sim A, \quad b(x) \sim B \implies a(x)b(x) \sim AB. \tag{7}$$

Ниже мы используем сокращение

$$\binom{1/2}{i} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{2} - i + 1\right)}{i\,!} \quad \text{для} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1. *Предположим, что* R *является* $\mathbb{Q}$*-алгеброй (т. е. коммутативным кольцом, содержащим* $\mathbb{Q}$ *в качестве подкольца). Допустим также, что* $t \in R$ *имеет квадратный корень* $\sqrt{t}$ *и обратный элемент* t^{-1}. *Рассмотрим верхнюю треугольную матрицу* $A \in R^{k\times k}$, *которой в силу* (6) *соответствует степенной ряд*

$$a(x) = (t + sx)^{1/2} = \sum_{i\geq 0} \binom{1/2}{i} (st^{-1})^i \sqrt{t} x^i \in R[[x]]. \tag{8}$$

Тогда A^2 равняется жордановой клетке $J_k(t,s)$.

Доказательство. Очевидно, матрица $J_k(t,s)$ соответствует степенному ряду $t+sx$ и согласно (7) квадратный корень из нее может быть найден как матрица, соответствующая степенному ряду

$$(t+sx)^{1/2} = \sqrt{t}(1+sxt^{-1})^{1/2} = \sqrt{t}\sum_{i\geq 0}\binom{1/2}{i}(st^{-1})^i x^i. \qquad \square$$

Лемма 2. *Если $t>0$, то квадратный корень из жордановой клетки $J_k(t,s) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ имеет вид (6) с $a_i = \binom{1/2}{i}(s/t)^i\sqrt{t}$. Если $b \neq 0$, то квадратный корень из матрицы $R_{2k}(a,b,s) \in \mathbb{R}^{2k\times 2k}$ имеет вид*

$$\sqrt{R_2(a,b)} = R_2(b/2\zeta, \zeta),$$

где $4\zeta^4 + 4a\zeta^2 - b^2 = 0$,

$$\sqrt{R_{2k}(a,b,s)} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{k-1} \\ & A_0 & \dots & A_{k-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_0 \end{bmatrix},$$

где

$$A_i = \binom{1/2}{i}\sqrt{R_2(a,b)}s^i R_2(a,b)^{-i}.$$

Доказательство. Утверждение о жордановой клетке $J_k(t,s)$ непосредственно вытекает из леммы 1, если положить $R=\mathbb{R}$. Утверждение о матрице $R_2(a,b)$ проверяется легко. Нужно лишь заметить, что квадратное уравнение $4\xi^2 + 4a\xi - b^2 = 0$ имеет решения $\xi = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2+b^2})$, по крайней мере одно из которых положительно, поскольку $b \neq 0$. Это показывает, что ζ существует и не равно нулю.

Пусть теперь R является подкольцом матричного кольца $\mathbb{R}^{2\times 2}$, порожденным матрицей $\sqrt{R_2(a,b)}$. Заметим, что матричное кольцо $R^{k\times k}$ вложено в матричное кольцо $\mathbb{R}^{2k\times 2k}$ и что $J_k(R_2(a,b), sI_2) = R_{2k}(a,b,s)$. С учетом этих отождествлений утверждение о $\sqrt{R_{2k}(a,b,s)}$ непосредственно следует из леммы 1. $\square$

Следствие 2. *Самосопряженный линейный эндоморфизм l из $\mathbb{R}^{n+1}$, все вещественные собственные значения которого положительны, имеет самосопряженные квадратные корни.*

Доказательство. Пусть A и H — координатные матрицы эндоморфизма l и скалярного произведения $\langle\ ,\ \rangle$ соответственно, построенные в теореме 1 и имеющие общую блочно-диагональную структуру. Достаточно рассмотреть каждую клетку A_k и $H_k = \pm S_k$ по отдельности. Квадратные корни из $\sqrt{A_k}$ найдены в лемме 2. Поскольку $\sqrt{A_k}^T(\pm S_k) = (\pm S_k)\sqrt{A_k}$, построенное таким способом отображение $\sqrt{l}$ является самосопряженным. $\square$

Следствие 3. *Как матрицы $J_k(t,s)$ (для $t>0$), так и матрицы $R_{2k}(a,b,s)$ (для $a^2+b^2>0$) имеют квадратные корни, гладко зависящие от параметров t, s и a, b, s соответственно. При этом производные коммутируют с соответствующими матрицами.*

Доказательство. Утверждение о гладкости непосредственно вытекает из явной формулы для квадратных корней, полученной в лемме 2, при этом используется тот факт, что ζ равняется $(\frac{1}{2}(-a+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}}$. Далее, заметим, что производные от матриц вида (6) опять являются матрицами такого же вида. Теперь коммутативность вытекает из (7), поскольку произведение степенных рядов коммутативно. $\square$

2.4. Двойственные квадрики. Точки $X=\mathbf{x}\mathbb{R}$, $Y=\mathbf{y}\mathbb{R}$ называются *сопряженными* относительно невырожденной квадрики Φ или относительно определяющей эту квадрику квадратичной формы σ, если $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})=\langle\mathbf{x},l(\mathbf{y})\rangle=0$.

Множество точек, сопряженных с X, образует гиперплоскость с градиентными векторами $\lambda l(\mathbf{x})$. Если точки X и Y лежат на квадрике Φ и сопряжены относительно Φ, то прямая $X\vee Y$ целиком содержится в Φ. И обратно, любые две точки подпространства, содержащегося в Φ, являются сопряженными.

Касательная гиперплоскость к квадрике Φ в точке $\mathbf{x}$ имеет градиентные векторы $\lambda l(\mathbf{x})$. Обратно, гиперплоскость с градиентным вектором $\mathbf{v}$ является касательной к квадрике Φ, если и только если

$$\widehat{\sigma}(\mathbf{v},\mathbf{v})=\sigma\langle l^{-1}(\mathbf{v}),l^{-1}(\mathbf{v})\rangle=\langle l^{-1}(\mathbf{v}),\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{v},l^{-1}(\mathbf{v})\rangle=0.$$

Если $\mathbf{a}^*$ и $\mathbf{b}^*$ имеют в качестве градиентных векторов векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ соответственно, то введем в рассмотрение билинейную форму

$$\sigma^*(\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*)=\widehat{\sigma}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\langle\mathbf{v},l^{-1}(\mathbf{w})\rangle. \tag{9}$$

Определение 2. Квадрика $\widehat{\Phi}$, определенная в двойственном пространстве равенством (9), называется *двойственной к исходной квадрике* Φ, заданной билинейной формой σ.

Используя координаты относительно некоторого базиса, мы подразумеваем, что для линейных форм используются координаты относительно двойственного базиса. Если $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\mathbf{x}^TH\mathbf{y}$, то линейная форма $\mathbf{a}^*$ и ее градиентный вектор $\mathbf{v}$ связаны соотношением $\mathbf{a}^*=H\mathbf{v}$. Если $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{x}^THA\mathbf{y}$, то $\hat{\sigma}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathbf{v}^THA^{-1}\mathbf{w}$ и $\sigma^*(\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*)=\mathbf{a}^{*T}(HA)^{-1}\mathbf{b}^*$.

Двойственную квадрику $\widehat{\Phi}$ можно рассматривать как множество гиперплоскостей (т. е. как множество нулей соответствующих линейных форм). Ее можно также трактовать как образ Φ под действием отображения «$X\mapsto$ гиперплоскость, состоящая из точек, сопряженных с X».

Выше мы исключили из рассмотрения вырожденные квадрики и вырожденные формы, потому что они не имеют двойственных в смысле определения 2. Тем не менее мы будет использовать ниже термин *вырожденные двойственные квадрики*, подразумевая под этим квадрики, порожденные вырожденными симметрическими билинейными формами в $\mathbb{R}^{(n+1)*}$.

Вычислим образ $\Phi_1=k(\Phi_0)$ квадрики Φ_0 под действием невырожденного эндоморфизма k. Имеем $\mathbf{x}\in\Phi_0 \iff k(\mathbf{x})\in\Phi_1$. Следовательно, если квадрика Φ_0 задана билинейной формой

$$\sigma_0(\mathbf{x},\mathbf{y})=\langle\mathbf{x},l(\mathbf{y})\rangle,$$

то квадрика Φ_1 задана формой $\sigma_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle k^{-1}(\mathbf{x}), lk^{-1}(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, (k^{-1})^* lk^{-1}(\mathbf{y})\rangle$. Представляя линейные формы их градиентными векторами, видим, что двойственные к квадрикам Φ_0 и Φ_1 задаются билинейными формами $\langle \mathbf{v}, l^{-1}(\mathbf{w})\rangle$ и $\langle \mathbf{v}, kl^{-1}k^*(\mathbf{w})\rangle$ соответственно.

Тот факт, что обратный к k эндоморфизм не участвует в формуле, задающей квадрику $\widehat{\Phi}_1$, мотивирует следующее

Определение 3. Если k — линейный эндоморфизм, а квадрика Φ задана с помощью эндоморфизма l, то двойственный k-образ квадрики Φ задается уравнением

$$\widehat{\sigma}(\mathbf{v},\mathbf{v}) = 0, \quad \text{где} \quad \widehat{\sigma}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, kl^{-1}k^*(\mathbf{w})\rangle.$$

При этом подразумевается, что $\widehat{\sigma}$ применяется к градиентным векторам.

Оказывается, что вырожденные линейные отображения, примененные к невырожденным квадрикам, определяют осмысленное понятие *двойственного* образа квадрики.

2.5. Семейства софокусных форм и квадрик. Предположим, что квадрики Φ_0 и Φ_1 заданы с помощью симметрических билинейных форм σ_0 и σ_1 или с помощью самосопряженных эндоморфизмов l_0 и l_1 соответственно и что их двойственные квадрики $\widehat{\Phi}_0$ и $\widehat{\Phi}_1$ заданы симметрическими билинейными формами $\widehat{\sigma}_0$ и $\widehat{\sigma}_1$ в соответствии с определением 2.

Используя координатную запись, положим $l_i(\mathbf{x}) = A_i\mathbf{x}$ и $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^T H\mathbf{y}$. Тогда $\sigma_i(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T Q_i \mathbf{y}$ с $Q_i = HA_i$ и $\sigma_i^*(\mathbf{a}^*,\mathbf{b}^*) = \mathbf{a}^{*T} Q_i^{-1}\mathbf{b}^*$.

Определение 4. В обозначениях, непосредственно предшествующих этому определению, квадрики Φ_0 и Φ_1 называются *софокусными* (или *конфокальными*), если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

(i) билинейные формы $\widehat{\sigma}_0$, $\widehat{\sigma}_1$ и $\widehat{\langle\ ,\ \rangle} = \langle\ ,\ \rangle$ линейно зависимы,

(ii) линейные эндоморфизмы l_0^{-1}, l_1^{-1} и id линейно зависимы,

(iii) координатные матрицы Q_1^{-1}, Q_2^{-1} и H^{-1} линейно зависимы.

Семейство квадрик Φ, софокусных с квадрикой Φ_0, задается эндоморфизмами l, удовлетворяющими соотношению $l^{-1} = \lambda l_0^{-1} + \mu\,\mathrm{id}$, где $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda\neq 0$.

Следовательно, двойственные квадрики $\widehat{\Phi}$ вместе с квадрикой $\widehat{\Omega}$, двойственной к бесконечно удаленной квадрике, образуют линейную систему алгебраических гиперповерхностей в двойственном проективном пространстве. Любая бесконечно удаленная касательная гиперплоскость к квадрике Φ является касательной к квадрике Φ_0, и наоборот.

Замечание. Это определение обобщает обычное понятие софокусности в евклидовой геометрии, которое получается, если ввести однородные координаты и определить вырожденную симметрическую билинейную форму $\widehat{\langle\ ,\ \rangle}$, см. [2–4, 11].

На евклидовой плоскости софокусные коники могут быть разных типов, например, одна из них может быть эллипсом, а другая — гиперболой (см. рис. 1). Тот очевидный факт, что не существует непрерывного перехода от эллипса к гиперболе, служит мотивировкой для следующего определения.

Определение 5. Говорят, что две квадрики, принадлежащие семейству софокусных билинейных форм, порожденных эндоморфизмом l_0, являются *квадриками разных типов*, если они принадлежат разным компонентам связности множества $\{(\lambda,\mu) \mid\ \text{эндоморфизм}\ \ \lambda(l_0^{-1} + \mu\ \mathrm{id})\ \text{невырожденный}\}$.

Лемма 3. *В n-мерном эллиптическом и гиперболическом пространстве ($n > 1$) каждое семейство софокусных квадрик содержит квадрики по крайней мере двух различных типов.*

Доказательство. Согласно определению 5 достаточно показать, что эндоморфизм l_0^{-1} имеет собственное значение. Поскольку l_0^{-1} самосопряжен, то это вытекает из следствия 1 и того факта, что $n+1 \geq 3$. $\square$

Следующее утверждение хорошо известно.

Лемма 4. *Всякие софокусные пересекающиеся квадрики Φ_0 и Φ_λ пересекаются под прямым углом.*

Доказательство. Обозначим через g_0 и g_λ эндоморфизмы, задающие софокусные квадрики. Тогда $g_\lambda^{-1} = g_0^{-1} + \lambda\,\mathrm{id}$ ($\lambda \neq 0$). Обозначим через $\mathbf{v} = g_0(\mathbf{x})$ и $\mathbf{w} = g_\lambda(\mathbf{x})$ градиентные векторы касательных гиперплоскостей в точке $\mathbf{x} \in \Phi_0 \cap \Phi_\lambda$.

Взяв линейную комбинацию соотношений

$$0 = \langle \mathbf{x}, g_0(\mathbf{x})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}\rangle = \left\langle g_\lambda^{-1}(\mathbf{w}), \mathbf{v}\right\rangle \quad \text{и} \quad 0 = \left\langle g_0^{-1}(\mathbf{w}), \mathbf{v}\right\rangle,$$

получаем $0 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$. $\square$

3. Свойство Айвори и самосопряженные эндоморфизмы

3.1. Отображения Айвори линейны. Покажем, что теорема Айвори для двух квадрик Φ_0 и Φ_1 всегда связана с существованием самосопряженного линейного эндоморфизма l такого, что $\Phi_1 = l(\Phi_0)$.

Лемма 5. *Предположим, что Φ является квадрикой, возможно вырожденной, но во всяком случае не содержащейся ни в какой гиперплоскости. Предположим также, что существует отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ такое, что*

$$\langle \mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2\rangle = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2'\rangle \quad \text{для всех } \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Phi.$$

Тогда существует самосопряженный линейный эндоморфизм l пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ такой, что $\mathbf{x}' = l(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in \Phi$.

Доказательство. Фиксируем линейно независимые векторы $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n \in \Phi$ и определим линейный эндоморфизм l с помощью формул $l(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i'$ ($i = 0, \dots, n$). Из условий леммы вытекает, что

$$\langle \mathbf{x}_i, l^*(\mathbf{y})\rangle = \langle l(\mathbf{x}_i), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}_i', \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}'\rangle \quad (i = 0, \dots, n).$$

Поскольку векторы $\mathbf{x}_i$ линейно независимы, то $\mathbf{y}' = l^*(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{y}$. В частности, $l^*(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i'$, а значит, $l = l^*$. $\square$

3.2. Квадрики, задаваемые уравнением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle l(\mathbf{x}), l(\mathbf{x})\rangle = 0$.

Лемма 6. *Для любого линейного самосопряженного эндоморфизма l квадрика*

$$\Phi_0 : \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle l(\mathbf{x}), l(\mathbf{x})\rangle = 0 \tag{10}$$

и ее l-образ Φ_1 обладают свойством Айвори:

$$\delta(l(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x}, l(\mathbf{y})) \quad \text{для всех } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Phi \text{ таких, что } \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle, \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \neq 0.$$

При этом ограничение l на любое линейное подпространство, содержащееся в Φ_0, является изометрией в смысле метрики δ.

Доказательство. Нам необходимо доказать, что

$$\frac{\langle \mathbf{x}, l(\mathbf{y})\rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle}\sqrt{\langle l(\mathbf{y}), l(\mathbf{y})\rangle}} = \frac{\langle l(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle}{\sqrt{\langle l(\mathbf{x}), l(\mathbf{x})\rangle}\sqrt{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle}}.$$

Знаменатели этих дробей совпадают в силу (10). Числители же совпадают, поскольку эндоморфизм l самосопряжен.

Что касается второго утверждения, то расстояние δ между точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Phi_0$ сохраняется, если и только если $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle l(\mathbf{x}), l(\mathbf{y})\rangle$. Это уравнение характеризует сопряженность относительно Φ_0. Из него вытекает, что ограничение эндоморфизма l на любое подпространство, содержащееся в квадрике Φ_0, является изометрией. $\square$

Лемма 7. *Пусть l — самосопряженный эндоморфизм, и пусть квадрика Φ_0, заданная формулой* (10), *невырожденна. Тогда квадрики Φ_0 и $\Phi_1 = l(\Phi_0)$ являются софокусными* (*если необходимо, мы понимаем это утверждение в смысле определения* 3).

Доказательство. Преобразуем уравнение квадрики Φ_0:

$$\sigma_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle - \langle l(\mathbf{x}), l(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, (\mathrm{id} - l^2)(\mathbf{y})\rangle.$$

Двойственная квадрика задается формулой

$$\widehat{\sigma}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, (\mathrm{id} - l^2)^{-1}(\mathbf{w})\rangle.$$

В соответствии с определением 3 двойственный l-образ квадрики Φ_0 задается формулой

$$\widehat{\sigma}_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, l(\mathrm{id} - l^2)^{-1} l(\mathbf{w})\rangle.$$

Остается убедиться, что

$$\widehat{\sigma}_0 - \widehat{\sigma}_1 = \langle\ ,\ \rangle, \tag{11}$$

т. е. что $(\mathrm{id} - l^2)^{-1} - l(\mathrm{id} - l^2)^{-1} l = \mathrm{id}$. Последнее легко следует из соотношения $l(\mathrm{id} - l^2) = (\mathrm{id} - l^2) l$. $\square$

Лемма 8. *Пусть самосопряженный эндоморфизм l таков, что его нормальная форма не содержит клеток вида $R_2(0, b)$ и $R_{2k}(0, b, 1)$. Пусть квадрика Φ_0 определена равенством* (10) *и невырожденна, и пусть квадрика $\Phi_1 = l(\Phi_0)$ также невырожденна. Тогда Φ_0 и Φ_1 — квадрики одного типа.*

Доказательство. Квадрика Φ_i ($i = 0, 1$) является множеством нулей квадратичной формы $\sigma_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, g_i(\mathbf{x})\rangle$, где g_i — некоторый самосопряженный эндоморфизм. Из доказательства леммы 7 вытекает, что $\widehat{\sigma}_0 - \widehat{\sigma}_1 = \langle\ ,\ \rangle$, т. е. что $g_0^{-1} - \mathrm{id} = g_1^{-1}$. Нас интересует, может ли эндоморфизм

$$g_\lambda^{-1} = (1 - \lambda) g_0^{-1} + \lambda g_1^{-1} = g_0^{-1} - \lambda\, \mathrm{id} \quad (0 \le \lambda \le 1)$$

быть вырожденным. Если он невырожденный для всех $\lambda \in [0, 1]$, то согласно определению 5 Φ_0 и Φ_1 являются квадриками одного типа (если же g_λ вырождается, то обозначение g_λ^{-1}, конечно, не имеет смысла).

Непосредственно из определения имеем $g_0^{-1} = (\mathrm{id} - l^2)^{-1}$. Используем координаты, построенные в теореме 1. Учитывая блочную структуру матриц (4), без ограничения общности можно предполагать, что координатная матрица A

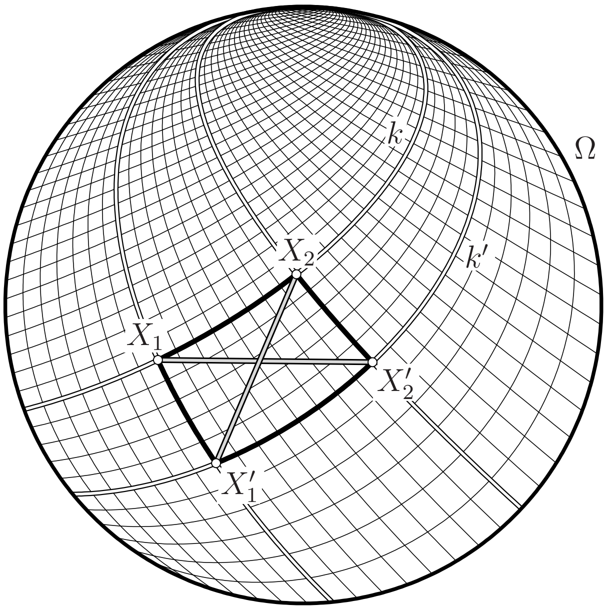

Рис. 2. Теорема Айвори на гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ — случай (iv) следствия 1, приводящий к коникам без центра и осей симметрии.

эндоморфизма l совпадает либо с $J_k(t,1)$, либо с $R_{2k}(a,b,1)$. В первом случае координатная матрица эндоморфизма g_λ^{-1} имеет вид

$$(I_k - A^2)^{-1} - \lambda I_k = \begin{bmatrix} (1-t^2)^{-1} - \lambda & & * \\ & \ddots & \\ & & (1-t^2)^{-1} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Поскольку выражение $(1-t^2)^{-1}$ не принимает значения из интервала $[0,1]$, эндоморфизм g_λ^{-1} невырожденный. Во втором случае, когда $A = R_{2k}(a,b,1)$ с некоторым $b \neq 0$, используем сокращение $U = (I_2 - R_2(a,b)^2)^{-1}$ и получаем

$$(I_k - A^2)^{-1} - \lambda I_{2k} = \begin{bmatrix} U - \lambda I_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & U - \lambda I_2 \end{bmatrix},$$

где

$$U = \frac{1}{(a^2+b^2+1)^2 - 4a^2} \begin{bmatrix} cc1 - a^2 + b^2 & 2ab \\ -2ab & 1 - a^2 + b^2 \end{bmatrix} = R_2(a', b').$$

Собственные значения матрицы U равны $a' \pm ib'$. Они не являются вещественными числами при $b' \neq 0$, т. е. при $a \neq 0$. Таким образом, и в этом случае эндоморфизм g_λ^{-1} оказывается невырожденным.

В случае $a = 0$ число $1/(b^2+1)$ является единственным собственным значением матрицы U. Более того, оно содержится в интервале $[0,1]$. Следовательно, в этом случае существует $\lambda \in (0,1)$, для которого эндоморфизм g_λ не определен. $\square$

4. Теорема Айвори

4.1. Лемма о представлении. В предыдущих леммах мы перечислили свойства квадрик, задаваемых специальными уравнениями. Сейчас мы собираемся показать, что рассмотренных случаев достаточно, чтобы доказать теорему Айвори.

Лемма 9. *Рассмотрим две софокусные невырожденные квадрики Φ_0 и Φ_1 одного типа. Для них существует самосопряженный эндоморфизм l такой, что квадрика Φ_0 задается уравнением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle l(\mathbf{x}), l(\mathbf{x}) \rangle = 0$ и $\Phi_1 = l(\Phi_0)$.*

Доказательство. Пусть квадрика Φ_i $(i = 0, 1)$ задается самосопряженным эндоморфизмом g_i. Поскольку квадрики Φ_0 и Φ_1 софокусны, то $g_1^{-1} = \lambda g_0^{-1} + \mu \,\mathrm{id}$. Не изменяя квадрик Φ_0 и Φ_1, умножим эндоморфизмы g_0 и g_1 на вещественные числа так, чтобы имело место соотношение

$$g_0^{-1} - g_1^{-1} = \mathrm{id}\,. \tag{12}$$

Сначала покажем, что существует эндоморфизм l такой, что $g_0 = \mathrm{id} - l^2$, т. е. такой, что существует корень квадратный из эндоморфизма $\mathrm{id} - g_0$. Пусть координатные матрицы A и H эндоморфизма g_0 и билинейной формы $\langle\ ,\ \rangle$ заданы формулами (4) и (5) соответственно. Поскольку эти матрицы блочной структуры, можно считать, что $A = J_k(t, 1)$ или $A = R_{2k}(a, b, 1)$. В первом случае эндоморфизм g_1 имеет следующую координатную матрицу:

$$(A^{-1} - I_k)^{-1} = \begin{bmatrix} (t^{-1}-1)^{-1} & & * \\ & \ddots & \\ & & (t^{-1}-1)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Поскольку мы предположили, что квадрики Φ_0 и Φ_1 одного типа, вещественные числа t и $(t^{-1} - 1)^{-1}$ имеют один знак. Если этот знак положителен, то $t \in (0, 1)$, а если он отрицателен, то $t < 0$. В обоих случаях $1 - t > 0$. Поэтому у эндоморфизма $\mathrm{id} - g_0$ положительное собственное значение.

В случае, когда $A = R_{2k}(a, b, 1)$, матрица $I_{2k} - A$ имеет вид $R_{2k}(1-a, -b, -1)$ при некотором $b \neq 0$, а у эндоморфизма $\mathrm{id} - g_0$ нет вещественных собственных значений. Следовательно, во всех случаях мы можем применить следствие 2, в силу которого существует самосопряженный эндоморфизм l такой, что $l^2 = \mathrm{id} - g_0$. Остается доказать равенство $l(\Phi_0) = \Phi_1$. Мы только что убедились, что квадрика Φ_0 задается уравнением как раз того вида, к которому можно применять лемму 7. Поэтому согласно (11) квадрика $l(\Phi_0)$ задается некоторым эндоморфизмом $\bar{g}_1$ таким, что

$$g_0^{-1} - \bar{g}_1^{-1} = \mathrm{id}\,.$$

Из допущения (12) теперь следует $\bar{g}_1 = g_1$, что и завершает доказательство. □

Лемма 10. *В обозначениях леммы 9 существует $\delta > 0$ такое, что эндоморфизм $\mathrm{id} - \lambda g_0$ имеет квадратный корень, который гладко зависит от λ для $-\delta < \lambda < 1 + \delta$.*

Доказательство. Вернемся к доказательству леммы 9. В случае, если $A = J_k(t, 1)$, мы имеем $t \in (0, 1)$ или $t < 0$. Значит, существует δ такое, что $1 - \lambda t > 0$ для любого $\lambda \in (-\delta, 1 + \delta)$. Следовательно, эндоморфизм $\mathrm{id} - \lambda g_0$ имеет квадратный корень, который согласно следствию 3 гладко зависит от параметра λ.

В случае, если $A = R_{2k}(a,b,1)$, координатной матрицей эндоморфизма $\mathrm{id} - \lambda g_0$ является $R_{2k}(1-\lambda a, -\lambda b, -\lambda)$. Поскольку не существует λ такого, что $1-\lambda a = \lambda b = 0$, мы можем применить следствие 3 и сделать вывод, что существует квадратный корень из эндоморфизма $\mathrm{id} - \lambda g_0$, гладко зависящий от параметра λ. $\square$

Замечание. В окрестности $\lambda = 0$ мы можем также применить теорему о неявной функции для того, чтобы вывести существование самосопряженного квадратного корня из эндоморфизма $\mathrm{id} - \lambda g_0$, гладким образом зависящего от параметра λ.

4.2. Ортогональные траектории софокусных семейств. Мы хотим обобщить евклидову теорему о том, что *соответствующие* точки X_i и X'_i софокусных коник k и k' лежат на некоторой третьей конике, которая пересекает каждую из двух первых коник под прямым углом (см. рис. 1).

Лемма 11. *Пусть Φ_0, Φ_1, g_0, g_1 и l означают то же, что в лемме 9 и ее доказательстве. Тогда существует гладкое семейство эндоморфизмов l_λ такое, что $l_0 = \mathrm{id}$ и $l_1 = l$, причем квадрика $\Phi_\lambda = l_\lambda(\Phi_0)$ задается эндоморфизмом g_λ таким, что*

$$g_\lambda^{-1} = g_0^{-1} - \lambda\,\mathrm{id}\,. \tag{13}$$

При этом все квадрики Φ_λ софокусны квадрике Φ_0 и пересекают траекторию $l_\lambda(\mathbf{x})\mathbb{R}$ произвольной точки $\mathbf{x}\mathbb{R} \in \Phi_0$ под прямым углом.

Доказательство. Нам дано $g_0 = \mathrm{id} - l^2$ и $g_1^{-1} = g_0^{-1} - \mathrm{id}$. Рассмотрим λg_0 вместо g_0 и определим эпиморфизм l_λ с помощью формулы

$$\lambda g_0 = \mathrm{id} - l_\lambda^2.$$

Согласно лемме 10 l_λ существует и гладко зависит от параметра λ. Заметим, что эпиморфизмы l_λ и g_0 коммутируют, что очевидно при $\lambda = 0$, а для остальных λ следует из формулы

$$l_\lambda g_0 = l_\lambda \lambda^{-1}\bigl(\mathrm{id} - l_\lambda^2\bigr) = \lambda^{-1}\bigl(\mathrm{id} - l_\lambda^2\bigr) l_\lambda = g_0 l_\lambda.$$

Теперь вычислим эндоморфизм g_λ^{-1}, который в соответствии с определением 3 задает квадрику, двойственную к $l_\lambda(\Phi_0)$:

$$g_\lambda^{-1} = l_\lambda g_0^{-1} l_\lambda = l_\lambda^2 g_0^{-1} = (\mathrm{id} - \lambda g_0) g_0^{-1} = g_0^{-1} - \lambda\,\mathrm{id}\,.$$

Таким образом, мы доказали соотношение (13). Софокусность квадрик Φ_0 и $l_\lambda(\Phi_0)$ вытекает из леммы 7. Продифференцировав соотношение $\lambda g_0 = \mathrm{id} - l_\lambda l_\lambda$, получаем

$$g_0 = -(\dot{l}_\lambda l_\lambda + l_\lambda \dot{l}_\lambda) = -2\dot{l}_\lambda l_\lambda \implies \dot{l}_\lambda = -\frac{1}{2} g_0 l_\lambda^{-1} = -\frac{1}{2} g_\lambda l_\lambda. \tag{14}$$

Здесь мы использовали соотношение $g_\lambda = g_0 l_\lambda^{-2}$ и тот факт, что эндоморфизмы l_λ и $\dot{l}_\lambda$ коммутируют. Последнее вытекает из теоремы 1 и следствия 3.

Касательная гиперплоскость к квадрике Φ_λ в точке $l_\lambda(\mathbf{x})$ имеет градиентный вектор $g_\lambda l_\lambda(\mathbf{x})$. Из формулы (14) следует, что точка касания $\dot{l}_\lambda(\mathbf{x})\mathbb{R}$ сопряжена с этой касательной гиперплоскостью относительно бесконечно удаленной квадрики Ω. $\square$

Лемма 12. *В обозначениях леммы* 11 *рассмотрим квадрики* Φ_λ, *заданные эндоморфизмами* g_λ. *Предположим, что квадрика* Ψ *софокусна с квадрикой* Φ_0, *но не совпадает с ней, и* $\mathbf{x} \in \Phi_0 \cap \Psi$. *Тогда* $l_\lambda(\mathbf{x}) \in \Psi$.

Доказательство. Мы знаем, что $\mathbf{x} \in \Phi_0$ равносильно тому, что $\langle \mathbf{x}, g_0(\mathbf{x})\rangle = 0$. Пусть самосопряженный эндоморфизм g_μ таков, что $\mathbf{x} \in \Psi$, т. е. $\langle \mathbf{x}, g_\mu(\mathbf{x})\rangle = 0$. В силу определения софокусности имеет место равенство $g_\mu^{-1} = g_0^{-1} - \mu\,\mathrm{id}$, причем $\mu \neq 0$. Ниже мы покажем, что

$$\lambda g_0 - \mu l_\lambda g_\mu l_\lambda - (\lambda - \mu) g_\mu = 0. \tag{15}$$

Тогда из соотношения $\mathbf{x} \in \Phi_0 \cap \Psi$ и формулы (15) сразу вытекает, что $l_\lambda(\mathbf{x}) \in \Psi$:

$$\mu\langle l_\lambda(\mathbf{x}), g_\mu l_\lambda(\mathbf{x})\rangle = \mu\langle \mathbf{x}, l_\lambda g_\mu l_\lambda(\mathbf{x})\rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, g_0(\mathbf{x})\rangle - (\lambda-\mu)\langle \mathbf{x}, g_\mu(\mathbf{x})\rangle = 0.$$

Из доказательства леммы 11 мы знаем, что эндоморфизмы l_λ и g_0 коммутируют. Значит, коммутируют и эндоморфизмы l_λ и g_μ^{-1}. Мы проверяем равенство (15), умножая его левую часть на автоморфизм g_μ^{-1} справа:

$$\begin{aligned}\lambda g_0\big(g_0^{-1} - \mu\,\mathrm{id}\big) - \mu l_\lambda g_\mu l_\lambda g_\mu^{-1} - (\lambda-\mu)\,\mathrm{id} \\ = \lambda\,\mathrm{id} - \lambda\mu g_0 - \mu l_\lambda g_\mu g_\mu^{-1} l_\lambda - (\lambda-\mu)\,\mathrm{id} \\ = \lambda\,\mathrm{id} - \lambda\mu g_0 - \mu(\mathrm{id} - \lambda g_0) - (\lambda-\mu)\,\mathrm{id} = 0. \quad \square\end{aligned}$$

Замечание. В любой собственной (т. е. не бесконечно удаленной) точке пространства $\mathbb{P}^n$ может пересекаться не более n софокусных квадрик (большее число невозможно ввиду взаимной ортогональности квадрик).

4.3. Теорема Айвори.

Теорема 2 (обобщение теоремы Айвори). *В проективном пространстве* $\mathbb{P}^n$ *с метрикой* (3) *рассмотрим две софокусные невырожденные квадрики* Φ_0 *и* Φ_1 *одного типа. Тогда существует гладкое семейство квадрик* $\Phi_\lambda = l_\lambda(\Phi_0)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, *софокусных с квадриками* Φ_0 *и* $\Phi_1 = l_1(\Phi_0)$, *таких, что эндоморфизм* l_λ *самосопряжен и обладает свойством Айвори:*

$$\delta(\mathbf{x}, l_\lambda(\mathbf{y})) = \delta(l(_\lambda\mathbf{x}), \mathbf{y}) \quad \textit{для всех } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Phi_0. \tag{16}$$

Любая другая квадрика Ψ, *софокусная с* Φ_0 *и содержащая точку* $\mathbf{x} \in \Phi_0$, *целиком содержит путь* $l_\lambda(\mathbf{x})$, *пересекающий все квадрики* Φ_λ *под прямым углом.*

Доказательство. Согласно лемме 9 существует эндоморфизм l такой, что квадрика Φ_0 задается эндоморфизмом $\mathrm{id} - l^2$ и справедливо равенство $\Phi_1 = l(\Phi_0)$. Из леммы 11 вытекает существование квадрики Φ_λ и эндоморфизма l_λ. В силу леммы 6 эндоморфизм l_λ обладает свойством Айвори (16). Наконец, лемма 12 гарантирует справедливость утверждения о квадрике Ψ, если таковая существует. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ivory J.* On the attractions of homogeneous ellipsoids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1809. P. 345–372.

2. Dingeldey F. Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme // Encyklopädie der math. Wiss. III. C 1. Leipzig: B. G. Teubner, 1903. N 65, S. 113.

3. *Staude O.* Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven // Encyklopädie der math. Wiss. III. C 2. Leipzig: B. G. Teubner, 1904, no. 53, p. 204.

4. *Blaschke W.* Analytische Geometrie. Basel: Birkhäuser Verl., 1954. Bd 3.

5. *Albrecht G.* Eine Bemerkung zum Satz von Ivory // J. Geom. 1994. V. 50. P. 1–10.
6. *Stachel H.* Flexible octahedra in the hyperbolic space // Non-Euclidean geometries / eds. A. Prekopa and E. Molnár. Kluwer Sci. Publ, 2004. (János Bolyai Memorial Volume). (To appear).
7. *Stachel H.* Configuration theorems on bipartite frameworks // Rend. Circ. Mat. Palermo (2). 2002. V. 770. P. 335–351.
8. *Stachel H.* Ivory's theorem in the Minkowski plane // Math. Pannonica. 2002. V. 13. P. 11–22.
9. *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 29. С. 5–146. (Итоги науки и техники).
10. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrices and indefinite scalar products. Basel: Birkhäuser, 1983.
11. *Берже М.* Геометрия. М.: Мир, 1984. Т. 2.

Статья поступила 9 октября 2003 г.

Хельмут Штахель (Hellmuth Stachel), Иоганн Валлнер (Johannes Wallner)
Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8–10/104
A-1040 Wien
{stachel,wallner}@geometrie.tuwien.ac.at