Сибирский математический журнал
Июль—август, 2004. Том 45, № 4

УДК 513.7

ВОКРУГ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ ЛЕЖАНДРА — КОШИ О ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ

И. Х. Сабитов

Аннотация: Кратко описывается история доказательств известной леммы Коши о сравнении расстояний между концами двух выпуклых ломаных на плоскости или сфере и приводится ее аналитическое доказательство с объяснением, почему в традиционно применяемых построениях для ее доказательства в общем случае неизбежно появление нестрого выпуклых ломаных. Рассматриваются также изгибания наложения двух изометричных выпуклых многоугольников или ломаных.

Ключевые слова: выпуклые ломаные и многоугольники, изометрия многоугольников, расстояния между концами ломаных, изометрические деформации многоугольников и ломаных.

1. Одной из ключевых лемм, использованных Коши при доказательстве им в 1813 г. своей знаменитой теоремы об однозначной определенности выпуклых многогранников [1], является следующее утверждение о числе перемен знака приращений значений углов при изометрическом преобразовании выпуклого многоугольника.

Лемма 1. *Рассмотрим на плоскости или на сфере два неконгруэнтных выпуклых n-угольника P_1 и P_2. Пусть на каждом из них введена некоторая циклическая нумерация вершин: $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1} = A_1$ и $B_1, B_2, \dots, B_n$, $B_{n+1} = B_1$, и пусть многоугольники таковы, что соответствующие их стороны A_iA_{i+1} и $B_iB_{i+1}, 1 \le i \le n$, имеют равные длины. Отметим на многоугольнике P_1 знаком $+(-)$ те внутренние углы, которые больше (меньше) соответствующих внутренних углов в P_2; если же соответствующие углы равны, то этому углу в P_1 не приписываем никакого знака. Тогда в ряду отмеченных вершин в P_1 при их циклическом обходе будет по меньшей мере 4 перемены знака*[1)].

Здесь под циклическим обходом отмеченных вершин многоугольника P_1 понимается обход P_1 по ходу или против хода движения часовой стрелки, начинающийся в некоторой отмеченной его вершине и *с возвращением* в эту же вершину (так как многоугольники P_1 и P_2 неконгруэнтны, то хотя бы одна отмеченная вершина обязательно найдется). Например, пусть на многоугольнике

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00101) и Минобразования РФ (№ Е02–1.0–43).

[1)] На самом деле эта лемма сформулирована и доказана (в несколько иных выражениях) Лежандром в 1794 г. в 1-м издании его известного учебника [2] и поэтому мы называем ее леммой Лежандра — Коши (и в этом же издании, кстати, сформулирована как гипотеза сама теорема об однозначной определенности выпуклых многогранников и даны ее доказательства для некоторых классов многогранников).

на рис. 1 отмечены вершины $A_1, A_2, A_3, A_5, A_6, A_8$; тогда при обходе против часовой стрелки, начиная, например, с вершины A_3, отмеченные знаки составят ряд $(+, +, -, +, -, -, +)$ с четырьмя переменами знака.

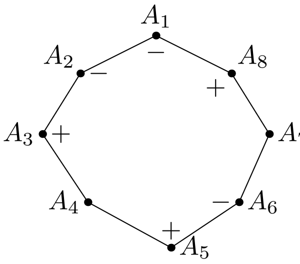

Рис. 1.

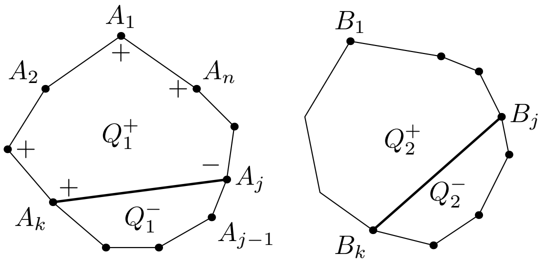

Рис. 2.

В свою очередь, лемма 1 является легким следствием следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть на евклидовой плоскости или на сфере заданы два выпуклых n-угольника Q_1 и Q_2 с соответственно циклически пронумерованными вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1} = A_1$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n, B_{n+1} = B_1$. Пусть эти многоугольники таковы, что у них стороны A_iA_{i+1} и B_iB_{i+1}, $1 \le i \le n-1$, попарно имеют равные длины: $|A_iA_{i+1}| = |B_iB_{i+1}|$. Далее, пусть внутренние углы в Q_2 при вершинах B_i, $2 \le i \le n-1$, не больше чем соответствующие внутренние углы в Q_1: $\angle B_{i-1}B_iB_{i+1} \le \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$, $2 \le i \le n-1$, причем хотя бы для одной пары углов есть строгое неравенство. Тогда длина стороны A_1A_n в Q_1 больше длины стороны B_1B_n в Q_2: $|A_1A_n| > |B_1B_n|$.*

Замечание 1. Лемму 2 часто формулируют как лемму о сравнении расстояний между концами двух изометричных выпуклых ломаных с соответствующими условиями на их внутренние углы, и тогда ее образно называют леммой о луке [3], имея в виду, что чем шире открыта дуга лука, тем длиннее натянутая на нее тетива. Здесь и всюду далее в статье под выпуклой (нестрого выпуклой) ломаной понимается ломаная, которая после соединения отрезком ее концевых вершин становится замкнутым выпуклым (соответственно нестрого выпуклым) многоугольником.

Замечание 2. Обе леммы справедливы и для нестрого выпуклых многоугольников. Далее мы будем предполагать, что рассматриваемые многоугольники или соответственно ломаные являются, вообще говоря, нестрого выпуклыми, но будем требовать их невырожденности, т. е. допускаются внутренние углы, равные π, но не разрешается, чтобы были нулевые внутренние углы. Последнее условие сделано исключительно для того, чтобы не заниматься каждый раз рассмотрением возможных вырождений.

Доказательство леммы 1 в предположении справедливости леммы 2 (или после ее доказательства) дано во многих работах (см., например, [4–7]). Приведем для полноты изложения это доказательство.

Итак, пусть лемма 2 доказана. Тогда в условиях леммы 1 не может быть, чтобы все отмеченные вершины многоугольника Q_1 имели одинаковый знак (иначе у многоугольников Q_1 и Q_2 хотя бы в одной паре соответствующие стороны были бы разной длины). Значит, есть по крайней мере две вершины, отмеченные противоположными знаками. Так как при обходе отмеченных вершин мы возвращаемся в исходную вершину, число перемен знака должно быть четным. Пусть перемены знака всего две. Тогда весь многоугольник Q_1 можно разбить на две ломаные следующим образом. Берем вершину со знаком, скажем, $+$; пусть это будет вершина A_1. Идем от этой вершины против часовой стрелки, пока не встретим в первый раз вершину со знаком $-$; пусть это будет вершина $A_k, k \geq 2$. Если $k = n$, то Q_1 разбиваем на ломаные $A_2A_3 \ldots A_n$ и $A_nA_1A_2$. Если же $k < n$, то идем от A_1 по часовой стрелке, пока опять не встретим в первый раз вершину со знаком $-$; пусть это будет вершина $A_j, k \leq j \leq n$. Если $k = j$, то многоугольник разбиваем на ломаные $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ и $A_{k+1} \ldots A_1 \ldots A_{k-1}$. Если же $j > k$, то Q_1 разбиваем на ломаные $A_kA_{k+1} \ldots A_j$ и $A_j \ldots A_1 \ldots A_k$. Перенесем эти разбиения на ломаные с многоугольника Q_1 на многоугольник Q_2 по соответствию номеров вершин и во всех случаях в обоих многоугольниках Q_1 и Q_2 проведем диагонали, соединяющие общие концы ломаных, на которые разбились многоугольники (рис. 2). Тогда получатся две пары выпуклых многоугольников: Q_1^+, Q_2^+ и Q_1^-, Q_2^- (обозначения по знакам вершин многоугольника Q_1, входящим в ломаные). Пусть проведенная в Q_1 диагональ имеет длину d_1, а в Q_2 длина диагонали равна d_2. По лемме 2, примененной к паре Q_1^+, Q_2^+, имеем $d_1 > d_2$, а в паре Q_1^-, Q_2^- получаем $d_1 \leq d_2$, что и дает требуемое противоречие. Следовательно, число перемен знаков больше двух, т. е., будучи четным числом, оно не меньше четырех.

Остается доказать лемму 2. Как известно, на самом деле в доказательстве Коши этой леммы им была допущена ошибка[2)], которая описана во многих работах. Ошибка заключается в следующем. Коши сначала рассматривает случай, когда в данном многоугольнике Q_1 изменился (скажем, увеличился) *только один* угол, и доказывает лемму, увеличивая вращением (как говорят, открывая или разворачивая) вокруг вершины этот угол в Q_1 до его значения в другом многоугольнике. Затем он последовательно увеличивает каждый следующий угол и делает вывод, что «одновременное увеличение углов должно дать такой же эффект, как и последовательное их увеличение», не замечая, что в получаемой по его подходу последовательности многоугольников, соединяющих исходный выпуклый многоугольник Q_1 с другим сравниваемым многоугольником Q_2, не все многоугольники обязаны быть выпуклыми.

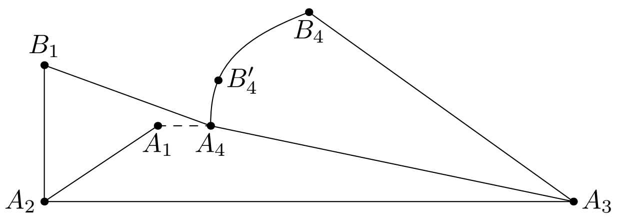

Рис. 3.

Например, пусть даны две изометричные выпуклые ломаные $Q_1 = A_1A_2A_3A_4$ и $Q_2 = B_1A_2A_3B_4$, изображенные на рис. 3. Углы при вершинах A_2 и A_3 в ломаной Q_2 больше, чем соответствующие углы в ломаной Q_1, и расстояние $|B_1B_4|$, в полном соответствии с леммой 2 больше расстояния $|A_1A_4|$. Но если мы, следуя идее Коши, сначала изменим в Q_1 *только один* угол, скажем, $\angle A_1A_2A_3$, до угла $\angle B_1A_2A_3$ в Q_2 и применим его рассуждение, сравнивая Q_1 с полученной ломаной $Q_3 = B_1A_2A_3A_4$ (должно получиться $|B_1A_4| > |A_1A_4|$), а затем снова изменим *только один* угол $\angle A_2A_3A_4$ в Q_3, раскрывая его до угла $\angle A_2A_3B_4$

[2)] Для доказательства леммы Коши использовал рассуждения Лежандра, и поэтому точно такая же ошибка есть и в доказательстве Лежандра.

в Q_2, и попытаемся сравнить ломаные Q_3 и Q_2, чтобы последовательно получить $|B_1B_4| > |B_1A_4| > |A_1A_4|$, то такое сравнение окажется недопустимым, так как замыкание ломаной Q_3 до многоугольника может оказаться невыпуклым! Так будет, если на рис. 3 вершина A_4 будет находиться ниже диагонали B_1A_3, чего легко добиться соответствующим подбором длин и углов исходного многоугольника Q_1. Более того, если сравнивать получающуюся в процессе исполнения идеи Коши ломаную Q_3 с изометричной ей и Q_1 выпуклой ломаной $Q_4' :\ B_1A_2A_3B_4'$ (у которой сторона A_3B_4' имеет ту же длину, что и A_3A_4, но вершина B_4' лежит *внутри* окружности с центром в B_1 и радиуса $|B_1A_4|$), то расстояние $|B_1B_4'|$ между концами ломаной Q_4 окажется меньше, чем расстояние $|B_1A_4|$. Получится цепочка неравенств $|A_1A_4| < |B_1A_4| > |B_1B_4'|$, из которой никакого вывода о сравнении расстояний между концами изометричных выпуклых ломаных Q_1 и Q_4 сделать нельзя, хотя внутренние углы в Q_4 больше соответствующих внутренних углов в Q_1.

Заметим, что если разница в значениях углов в сравниваемых выпуклых многоугольниках достаточно мала, то в рассуждениях Коши ошибки не будет, поэтому для доказательства *неизгибаемости* выпуклых многогранников его лемма применима с доказательством самого Коши.

Ошибка в доказательстве Коши была замечена впервые Штейницем, по-видимому, между 1920 и 1928 гг. (по крайней мере, в работе [8] и в нескольких ее последующих переизданиях упоминания об этой ошибке нет), и исправленное им же доказательство этой леммы известно по публикации 1934 г. в [9]. Другие доказательства, оригинальные или модификации доказательства Штейница, см. в тех же упомянутых выше работах [4–6]. Несколько доказательств предложены в [10], одно из которых особенно кратко и изящно изложено в [11] (см. также [7]). По поводу различных обобщений леммы 2 и вообще по истории вопроса приведенная в [3] библиография является, по-видимому, наиболее подробной в известной нам литературе. Здесь же мы дополнительно отметим, что в работе [12] доказательство леммы 1 дано так называемым «методом шарнирного четырехугольника», не требующим использования леммы 2.

Наша цель — предложить другое доказательство леммы 2, которое, будучи аналитическим, в принципе позволяет оценить отличие длин сторон A_1A_n и B_1B_n в зависимости от значений изменений углов в многоугольниках Q_1 и Q_2. Попутно выясняется, почему во всех известных доказательствах леммы Коши в процессе традиционно рассматриваемых преобразований выпуклой ломаной в другую в общем случае нельзя избежать появления нестрогой выпуклости. Затем мы даем другое доказательство известного утверждения о том, что если рассматриваются два строго выпуклых изометричных многоугольника, то переход от одного к другому всегда оказывается возможным изгибаниями (т. е. непрерывными деформациями с сохранением длин сторон) в классе строго выпуклых многоугольников, и используем этот факт для доказательства возможности перехода от одной строго выпуклой ломаной к другой, ей изометричной, изгибаниями в классе строго выпуклых ломаных с (нестрого) монотонным возрастанием расстояния между концами ломаной. В завершение мы предлагаем аналитическое толкование метода доказательства леммы 2, предложенного в [4], прямым использованием индукции и без выхода к нестрого выпуклым ломаным.

2. Справедливость леммы 2 для треугольников на евклидовой плоскости и на сфере легко усматривается из теоремы косинусов и ее сферического аналога.

Напомним, что на сфере радиуса R теорема косинусов имеет вид

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha, \tag{1}$$

где a, b, c ($0 < a \le \pi R$, $0 < b \le \pi R$, $0 < c \le \pi R$, с возможным достижением равенства πR только для одной стороны) — длины сторон треугольника, а α — угол треугольника, противолежащий стороне a. Отсюда видно, что производная a по α больше нуля и поэтому с увеличением угла α длина a противолежащей стороны возрастает. Лемма 2, таким образом, является обобщением соответствующего свойства треугольников, и ее доказательство естественно искать с использованием индукции по числу сторон. В случае, когда хотя бы для одной пары соответствующих углов в многоугольниках Q_1 и Q_2 имеем равенство, индукционный переход осуществляется легко. Действительно, пусть многоугольники Q_1 и Q_2 имеют равные углы при вершинах с некоторым номером k, $2 \le k \le n-1$: $\angle b_{k-1}b_kb_{k+1} = \angle a_{k-1}a_ka_{k+1}$. Тогда Q_1 и Q_2 имеют равные диагонали[3)] $a_{k-1}a_{k+1}$ и $b_{k-1}b_{k+1}$ и поэтому новые $(n-1)$-угольники $Q_1' : a_1 \dots a_{k-1}a_{k+1} \dots a_n$ и $Q_2' : b_1 \dots b_{k-1}b_{k+1} \dots b_n$ (изменения в обозначениях при $k = 2, 3, n-2$ или $n-1$ очевидны) удовлетворяют условиям леммы 2 и тем самым по индукционному предположению $|a_1a_n| > |b_1b_n|$.

Итак, остается обосновать индукционный переход лишь в случае, когда все углы в Q_1 строго больше соответствующих углов в Q_2. Кроме того, можно предполагать, что в многоугольнике Q_2 (в котором внутренние углы меньше) в вершинах b_1 и b_n есть *строгая выпуклость*, т. е. ни одна из троек вершин b_{n-1}, b_n, b_1 и b_n, b_1, b_2 не лежит на одной прямой. Действительно, пусть, например, три вершины b_n, b_1 и b_2 лежат на одной прямой (рис. 4). Применим метод, предложенный в [10]. Рассмотрим $(n-1)$-угольники Q_1' и Q_2' соответственно с вершинами $a_2, a_3, \dots, a_n$ и $b_2, b_3, \dots, b_n$. Для них по индукционному предположению имеем $|a_na_2| > |b_nb_2|$. Далее, $|a_na_1| > |a_na_2| - |a_1a_2| > |b_nb_2| - |a_1a_2| = |b_nb_1| + |b_1b_2| - |a_1a_2| = |b_nb_1|$, что и требовалось показать.

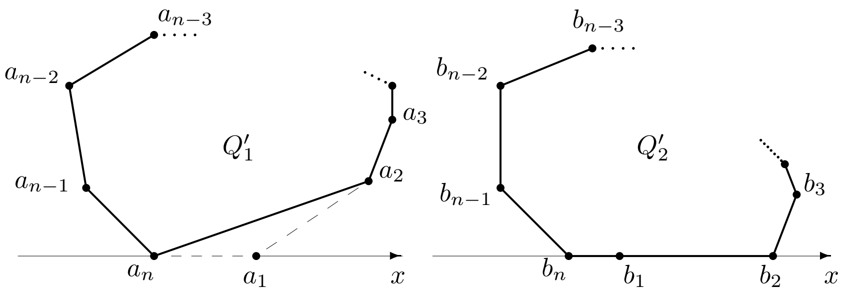

Рис. 4

3. Пусть на плоскости дан некоторый выпуклый n-угольник P с последовательно пронумерованными вершинами $c_1, \dots, c_n, c_{n+1} = c_1$ и с обходом против часовой стрелки. Выберем на плоскости систему координат следующим образом: совместим начало координат O с вершиной c_1, оси Ox и Oy направим так, чтобы все вершины $c_2, \dots, c_{n-1}$ имели неотрицательные ординаты, а вершина c_n располагалась на отрицательной полуоси Ox (рис. 5). Пусть l_i — длина стороны c_ic_{i+1}, $1 \le i \le n-1$, а γ, $0 < \gamma < \pi$, — угол при вершине c_1 между осью

[3)]Если эти углы равны π, то просто удаляем вершину с номером k из списка вершин и заменяем две прилегающие к ней стороны одной стороной с длиной, равной сумме длин этих двух отрезков.

Ox и стороной c_1c_2; θ_i, $1 \le i \le n-1$, — внешние углы при вершинах c_{i+1}, отсчитываемые против часовой стрелки при кратчайших поворотах от продолжения стороны c_ic_{i+1} к стороне $c_{i+1}c_{i+2}$. Тогда координаты (x_i, y_i) вершин c_i имеют следующие значения:

$$
\begin{gathered}
x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \\
x_2 = l_1 \cos\gamma, \quad y_2 = l_1 \sin\gamma, \\
x_3 = x_2 + l_2 \cos(\gamma + \theta_1), \quad y_3 = y_2 + l_2 \sin(\gamma + \theta_1), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-1} = x_{n-2} + l_{n-2} \cos(\gamma + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-3}), \\
y_{n-1} = y_{n-2} + l_{n-2} \sin(\gamma + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-3}), \\
x_n = x_{n-1} + l_{n-1} \cos(\gamma + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-2}) < 0, \\
y_n = y_{n-1} + l_{n-1} \sin(\gamma + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-2}) = 0,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

в которых в силу выпуклости многоугольника углы γ и θ_i удовлетворяют неравенствам

$$0 \le \gamma < \pi, \tag{3}$$

$$0 \le \theta_i < \pi, \quad 1 \le i \le n-2, \tag{4}$$

$$\gamma + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-2} > \pi, \tag{5}$$

$$\gamma + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-2} \le 2\pi \tag{6}$$

(неравенства (5), (6) получаются из условия, что для внешнего угла θ_{n-1} при вершине c_n имеем ограничения $0 \le \theta_{n-1} < \pi$, а сумма всех внешних углов $\gamma + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-1}$ равна 2π).

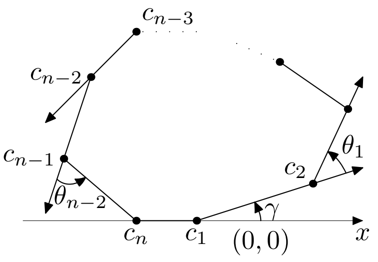

Рис. 5.

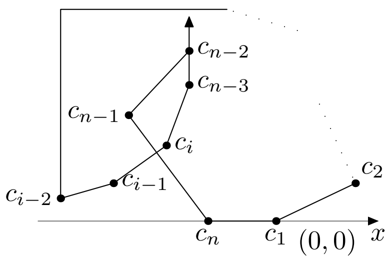

Рис. 6.

Итак, выпуклый n-угольник можно расположить в полуплоскости $y \ge 0$ с соблюдением условий (3)–(6) и соотношений $x_n < 0, y_n = 0$. Покажем, что верно и обратное утверждение.

Лемма 3. *Пусть на плоскости даны n точек с координатами* (2), *в которых углы $\gamma, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}$ удовлетворяют неравенствам* (3)–(6), *а параметры $l_1, \ldots, l_{n-1}$ — некоторые положительные числа, обеспечивающие вместе с γ и $\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}$ выполнение условий $x_n < 0$, $y_n = 0$. Тогда многоугольник P с вершинами в этих точках является выпуклым с расположением выше оси Ox.*

Доказательство. Если бы мы знали, что многоугольник P не имеет самопересечений, то могли бы сослаться на плоский аналог теоремы 1 из [5, гл. III, § 1], доказанной там для сферических многоугольников. Но нам заранее не дано, что в P нет самопересечений, и он априори мог иметь вид, как на рис. 6.

Сначала заметим, что если всюду в (3)–(6) имеем строгие неравенства, то ординаты всех вершин $c_2, \dots, c_{n-1}$ положительны. Действительно, так как $y_n = y_{n-1} + l_{n-1}\sin(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2}) = 0$ и выполнены неравенства (5), (6), то $y_{n-1} > 0$. Допустим, что $y_{n-2} = y_{n-1} - l_{n-2}\sin(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-3}) \le 0$. Тогда $0 < \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-3} < \pi$, поэтому

$$y_{n-3} = y_{n-2} - l_{n-3}\sin(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-4}) < 0, \dots, y_2 < 0,$$

но последнее неравенство неверно. Аналогичное противоречие получится, если мы предположим, что $y_{n-2} > 0$, но $y_{n-3} \le 0$, и т. д. Итак, $y_i > 0$ при всех i, $2 \le i \le n-1$, и поэтому весь многоугольник P лежит выше оси Ox. Если же в (3)–(6) допустимы нулевые значения углов (случай нестрогой выпуклости), то все ординаты y_i неотрицательны, причем среди них есть хотя бы одна положительная.

Предположим снова, что все неравенства (3)–(6) строгие. Тогда, так как сторона $c_{n-1}c_n$ продолжается в полуплоскость $y < 0$ и $x_n < 0$, кратчайшее вращение от этого продолжения в сторону отрезка c_nc_1 идет против часовой стрелки, поэтому для внешнего угла θ_{n-1} при вершине c_n имеем такие же неравенства $0 < \theta_{n-1} < \pi$, как и для всех вершин. Кроме того, сумма $\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-1}$, как сумма ориентированных внешних углов многоугольника, кратна 2π, а так как $0 < \theta_{n-1} < \pi$ и $\pi < \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} < 2\pi$, то

$$\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-1} = 2\pi. \tag{7}$$

Следовательно, при отбрасывании в левой части равенства (7) одного любого слагаемого оставшаяся сумма будет иметь значение строго между π и 2π, как в суммах (5), (6). Воспользуемся этим фактом для доказательства того, что многоугольник P лежит по одну сторону от каждой прямой, определяемой любой его стороной. Действительно, перенесем первый раз начало координат в вершину c_2, направив новую ось $O\tilde{x}$ по продолжению стороны c_1c_2 со стандартным выбором оси $O\tilde{y}$. Учитывая связь между новыми и старыми координатами $\tilde{x} = x\cos\gamma + y\sin\gamma - l_1$, $\tilde{y} = -x\sin\gamma + y\cos\gamma$, получим, что в новых осях вершины многоугольника имеют следующие координаты:

$$\begin{gathered}
\tilde{x}_2 = 0, \quad \tilde{y}_2 = 0,\\
\tilde{x}_3 = l_2\cos\theta_1, \quad \tilde{y}_3 = l_2\sin\theta_1,\\
x_4 = \tilde{x}_3 + l_3\cos(\theta_1 + \theta_2), \quad \tilde{y}_4 = \tilde{y}_3 + l_3\sin(\theta_1 + \theta_2),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} + l_{n-1}\cos(\theta_1 + \dots + \theta_{n-2}),\\
\tilde{y}_n = \tilde{y}_{n-1} + l_{n-1}\sin(\theta_1 + \dots + \theta_{n-2}),\\
\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_1 = \tilde{x}_n + l_n\cos(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1}) = -l_1 < 0,\\
\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_1 = \tilde{y}_n + l_n\sin(\theta_1 + \dots + \theta_{n-1}) = 0,
\end{gathered}$$

где через l_n обозначено значение $-x_n > 0$. Мы находимся в тех же условиях, что и при исследовании системы (2) с выполнением аналогов условий (3)–(6). Следовательно, можем утверждать, как и выше, что $\tilde{y}_i > 0$ при всех i, $3 \le i \le n$, т. е. многоугольник P лежит по одну сторону от прямой, проходящей через сторону c_1c_2. Таким же образом показывается, что это верно для каждой стороны, значит, многоугольник P является выпуклым в целом, что и утверждалось. Для доказательства такого же утверждения в случае нестрогих неравенств (3)–(6)

достаточно убрать из списка вершин все те вершины, при которых соответствующий угол θ_i равен 0, и объединить в одну сторону две инцидентные этой вершине стороны.

Замечание 3. Лемма допускает существенно более короткое доказательство, если считать известным следующее простое утверждение: *если индекс вращения локально выпуклого многоугольника равен* 1, *то этот многоугольник не имеет самопересечений и является выпуклым в целом.* Тогда мы из условий леммы с использованием приведенной в [13] формулы для суммы внутренних углов α_i многоугольника P:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \pi(n - 2\,\mathrm{Ind}_P),$$

где n — число сторон, а Ind_P — индекс вращения многоугольника, вывели бы, что вращение многоугольника равно 1, и этого было бы достаточно для получения его выпуклости в целом.

4. Исследуем теперь, каковы те условия на длины $l_1, \dots, l_{n-1}$ и на углы $\gamma, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}$, которые, как сказано в условиях леммы 3, вместе с неравенствами (3)–(6) обеспечивают выполнение соотношений $y_n = 0,\ x_n < 0$. Совокупность значений $\gamma, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}$, заданных неравенствами

$$0 \le \gamma \le \pi, \quad 0 \le \theta_i \le \pi, \quad 1 \le i \le n-2,$$

определяет в $(n-1)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ переменных $\gamma, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}$ параллелепипед Π, «нижнее» и «верхнее» основания которого ω_0 и ω_π являются $(n-2)$-мерными кубами $0 \le \theta_i \le \pi_i,\ 1 \le i \le n-2$, на которых соответственно $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi$. Условия

$$\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \ge \pi, \quad \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \le 2\pi$$

задают в $\mathbb{R}^{n-1}$ некоторый многогранник Ω, расположенный в параллелепипеде Π между параллельными плоскостями $\Pi_1 : \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = \pi$ и $\Pi_2 : \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = 2\pi$, которые вырезают на основании ω_0 область $\theta_1 + \dots + \theta_{n-1} \ge \pi$, а на основании ω_π область $\theta_1 + \dots + \theta_{n-1} \le \pi$ (см. далее рис. 9 для случая $n = 4$).

Значения переменной γ не свободны, а связаны с $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$ уравнением

$$y_n = l_1 \sin\gamma + l_2 \sin(\gamma + \theta_1) + \dots + l_{n-1} \sin(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2}) = 0,$$

а $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$, в свою очередь, должны обеспечивать неравенство

$$x_n = l_1 \cos\gamma + l_2 \cos(\gamma + \theta_1) + \dots + l_{n-1} \cos(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2}) < 0.$$

Положив $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$, можем записать

$$y_n \equiv f(\gamma, \theta) = A(\theta) \sin\gamma + B(\theta) \cos\gamma = 0, \tag{8}$$

$$x_n \equiv F(\gamma, \theta) = A(\theta) \cos\gamma - B(\theta) \sin\gamma < 0, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} A(\theta) &= l_1 + l_2 \cos\theta_1 + \dots + l_{n-1} \cos(\theta_1 + \dots + \theta_{n-2}), \\ B(\theta) &= l_2 \sin\theta_1 + \dots + l_{n-1} \sin(\theta_1 + \dots + \theta_{n-2}). \end{aligned} \tag{10}$$

Из условия $x_n = F(\gamma, \theta) < 0$ следует, что одновременное выполнение равенств $A(\theta) = 0,\ B(\theta) = 0$ невозможно, поэтому уравнение (8) относительно γ разрешимо и его единственное в промежутке $(0, \pi)$ решение γ представимо в виде

$$\gamma = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{A(\theta)}{B(\theta)} \tag{11}$$

с
$$\cos\gamma = -\frac{A(\theta)}{\sqrt{A^2(\theta)+B^2(\theta)}}, \quad \sin\gamma = \frac{B(\theta)}{\sqrt{A^2(\theta)+B^2(\theta)}}. \tag{12}$$
Эти значения $\cos\gamma$ и $\sin\gamma$ дают
$$x_n = F(\gamma,\theta) = -\sqrt{A^2(\theta)+B^2(\theta)}. \tag{13}$$

Итак, в телесном многограннике Ω рассматриваемым нами выпуклым ломаным соответствуют точки, расположенные на поверхности $S : f(\gamma,\theta) = 0$ с явным уравнением (11). Эта поверхность не может пересекаться с теми открытыми гранями многогранника Ω, на которых $\gamma = \pi$ или $\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = \pi$. Действительно, при $\gamma = \pi$ из условия (6) имеем $\theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \le \pi$, поэтому на грани $\gamma = \pi$ равенство $B(\theta) = 0$ невозможно, что приводит к невыполнению равенства $y_n = 0$. Аналогично на грани $\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = \pi$ имеем то же неравенство $\theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \le \pi$ с таким же следствием $y_n \ne 0$. Из этого мы выводим, что на поверхности S внутри многогранника Ω будет $B(\theta) > 0$, а значения $B(\theta) = 0$, на которых $\sin\gamma = 0$, могут быть только на основании $\omega_0 : \gamma = 0$.

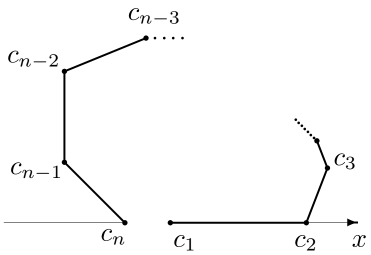

Рис. 7.

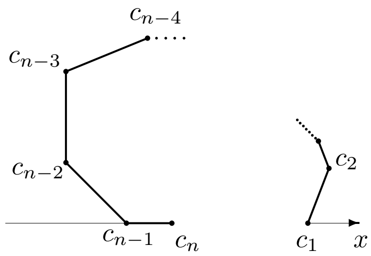

Рис. 8.

Поверхность S однозначно проектируется на нижнее основание ω_0 параллелепипеда Π, и условие $B(\theta) > 0$ определяет на нем некоторую область допустимых значений углов $\theta_1,\dots,\theta_{n-2}$. Найдем вид этой области. Уравнение $B(\theta) = 0$ можно записать в виде
$$A_1(\hat\theta_1)\sin\theta_1 + B_1(\hat\theta_1)\cos\theta_1 = 0,$$
где
$$\begin{gathered} A_1(\hat\theta_1) = A_1(\theta_2,\dots,\theta_{n-2}) = l_2 + l_3\cos\theta_2 + \dots + l_{n-1}\cos(\theta_2+\dots+\theta_{n-2}), \\ B_1(\hat\theta) = B_1(\theta_2,\dots,\theta_{n-2}) = l_3\sin\theta_2 + \dots + l_{n-1}\sin(\theta_2+\dots+\theta_{n-2}). \end{gathered} \tag{14}$$

На поверхности $B(\theta) = 0$, как мы знаем, $\gamma = 0$, а при $\gamma = 0$ многоугольник имеет вид, как на рис. 7, т. е. вершины c_n, c_1 и c_2 находятся на оси Ox. Выберем начало координат в вершине c_2, которую обозначим через $\hat c_1$, остальные вершины c_i обозначим соответственно через $\hat c_{i-1}$, $3 \le i \le n$, а точку c_1 исключим из списка вершин. Тогда угол θ_1 будет играть для выпуклого $(n-1)$-угольника $\hat c_1,\dots,\hat c_{n-1}$ роль γ, кроме того, $\hat y_{n-1} = 0$, $\hat x_{n-1} = x_n - l_1 < 0$, и мы можем получить из уравнения поверхности $B(\theta) = 0$, что
$$\cos\theta_1 = -\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}, \quad \sin\theta_1 = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}$$
или
$$\theta_1 = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{A_1}{B_1}. \tag{15}$$

Так как $\frac{\partial B}{\partial \theta_1} = A - l_1 = \hat{x}_{n-1} < 0$, условию $B(\theta) \geq 0$ на основании ω_0, где задаются углы $\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}$, соответствует область, определяемая неравенством

$$\theta_1 \leq \pi - \operatorname{arcctg} \frac{A_1}{B_1}. \tag{16}$$

Заметим, что эта область содержит, в частности, все точки (θ) с условием $\theta_1 + \cdots + \theta_{n-2} \leq \pi$, так как в них $B(\theta) > 0$.

Рассмотрим теперь условие $\pi < \gamma + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-2} \leq 2\pi$. Мы уже выяснили, что над областью $\theta_1 + \cdots + \theta_{n-2} < \pi$ поверхность $S : f(\gamma, \theta) = 0$ располагается внутри тела Ω между плоскостями $\gamma = \pi - \theta_1 - \cdots - \theta_{n-2}$ и $\gamma = \pi$, поэтому нужно изучить ограничения, накладываемые лишь неравенствами $\theta_1 + \cdots + \theta_{n-2} > \pi$ и $c(\gamma, \theta) \equiv \gamma + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-2} \leq 2\pi$. Учитывая равенство $\gamma + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-2} + \theta_{n-1} = 2\pi$ (где θ_{n-1} — внешний угол при вершине c_n), уравнение (8) можно переписать в виде

$$y_n = g(\theta_{n-1}, \theta) \equiv C(\theta) \sin \theta_{n-1} + D(\theta) \cos \theta_{n-1} = 0$$

с $x_n = C(\theta) \cos \theta_{n-1} - D(\theta) \sin \theta_{n-1} < 0$, где

$$\begin{aligned} C(\theta) &= l_{n-1} + l_{n-2} \cos \theta_{n-2} + \cdots + l_1 \cos(\theta_{n-2} + \cdots + \theta_1), \\ D(\theta) &= l_{n-2} \sin \theta_{n-2} + \cdots + l_1 \sin(\theta_{n-2} + \cdots + \theta_1). \end{aligned} \tag{17}$$

Вариант $D < 0$ приводит к противоречию с условием $x_n < 0$, поэтому уравнение $y_n = 0$ имеет решение

$$\theta_{n-1} = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{C(\theta)}{D(\theta)}$$

с

$$\cos \theta_{n-1} = -\frac{C}{\sqrt{C^2(\theta) + D^2(\theta)}}, \quad \sin \theta_{n-1} = \frac{D}{\sqrt{C^2(\theta) + D^2(\theta)}},$$

откуда следует, что выпуклым ломаным (для которых $0 < \theta_{n-1} < \pi$) в многограннике Ω соответствуют точки с условием $D(\theta) > 0$. Точкам, где $D(\theta) = 0$, соответствует значение $\sin \theta_{n-1} = 0$. Если $\theta_{n-1} = \pi$, то получаем $\gamma + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-2} = \pi$, что, как мы знаем, приводит к запрещенному неравенству $y_n \neq 0$. Следовательно, равенство $D(\theta) = 0$ бывает только в точках $\theta_{n-1} = 0$ или $\gamma + \theta_1 + \cdots + \theta_{n-2} = 2\pi$, которым соответствуют многоугольники, изображенные на рис. 8, у которых вершины c_{n-1}, c_n и c_1 лежат на одной прямой.

Найдем теперь область изменения значений $\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}$, соответствующих области $D(\theta) > 0$. В уравнении $D(\theta) = 0$ выделяем переменную θ_{n-2} и, решая его аналогично уравнению $B(\theta) = 0$, получаем, что решением уравнения будет функция

$$\theta_{n-2} = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{C_1}{D_1},$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= C_1(\theta_1, \ldots, \theta_{n-3}) = l_{n-2} + l_{n-3} \cos \theta_{n-3} + \cdots + l_1 \cos(\theta_{n-3} + \cdots + \theta_1), \\ D_1 &= D_1(\theta_1, \ldots, \theta_{n-3}) = l_{n-3} \sin \theta_{n-3} + \cdots + l_1 \sin(\theta_{n-3} + \cdots + \theta_1). \end{aligned}$$

Так как на поверхности $D(\theta) = 0$ имеем

$$\frac{\partial D}{\partial \theta_{n-2}} = x_n - l_{n-1} < 0,$$

область $D(\theta) \geq 0$ на грани ω_0 дается неравенством

$$\theta_{n-2} \leq \pi - \operatorname{arcctg} \frac{C_1}{D_1}. \tag{18}$$

Итак, мы доказали следующее

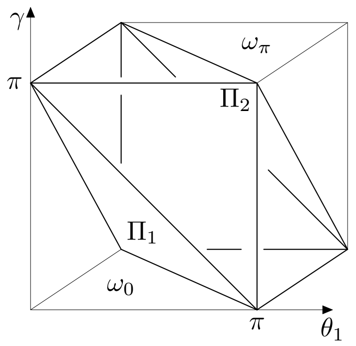

Рис. 9.

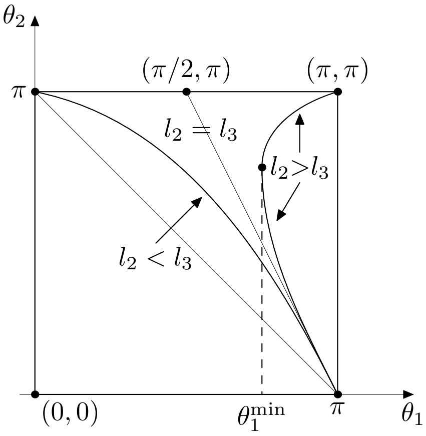

Рис. 10.

Утверждение 1. *Выпуклые ломаные из леммы* 3 *при данных длинах сторон* $l_1, \dots, l_{n-1}$ *имеют углы* θ_i, $1 \le i \le n-2$, *соответствующие тем точкам куба* ω_0

$$0 \le \theta_1 < \pi, \dots, 0 \le \theta_{n-2} < \pi,$$

которые расположены в области $T \subset \omega_0$, *определяемой неравенствами* (16) *и* (18).

Очевидно, точки для строго выпуклых многоугольников определяются соответствующими строгими неравенствами.

Таким образом, мы описали все выпуклые ломаные с данными длинами сторон. Отметим, в частности, что в область существования этих ломаных входят все точки, удовлетворяющие неравенству $\theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \le \pi$.

5. Подытожим это исследование наглядными иллюстрациями для случая $n = 4$. В этом случае имеем два изменяющихся угла θ_1 и θ_2. Многогранник Ω в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ изображен на рис. 9. На рис. 9 и 10 изображены области, определяемые на нижней грани ω_0 параллелепипеда P соответственно неравенствами $B(\theta) > 0$ и $D(\theta) > 0$. Кривая $B(\theta) = l_2 \sin\theta_1 + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0$ или

$$\theta_1 = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{l_2 + l_3 \cos\theta_2}{l_3 \sin\theta_2}$$

имеет три разных формы в зависимости от соотношения между значениями l_2 и l_3. При $l_2 > l_3$ это будет выпуклая кривая, идущая от точки $(\pi, 0)$ к точке (π, π) с минимальным значением $\theta_1^{\min} = \frac{3\pi}{2} - \theta_2^0 > \frac{\pi}{2}$, достигаемым при $\theta_2^0 = \pi - \arccos\frac{l_3}{l_2} > \frac{\pi}{2}$. При значениях $l_2 = l_3$ уравнению $B(\theta) = 0$ соответствует прямая $2\theta_1 + \theta_2 = 2\pi$, а при $l_2 < l_3$ получается выпуклая (вверх) кривая, идущая от точки $(0, \pi)$ к точке $(\pi, 0)$. Во всех случаях эти линии располагаются выше прямой $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ (рис. 10).

Кривая $D(\theta) = l_2 \sin\theta_2 + l_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0$ или

$$\theta_2 = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{l_2 + l_1 \cos\theta_1}{l_1 \sin\theta_1}$$

тоже имеет три разных формы в зависимости от соотношения между значениями l_2 и l_1. При $l_2 > l_1$ это будет выпуклая кривая, идущая от точки $(0, \pi)$ к точке (π, π) с минимальным значением $\theta_2^{\min} = \frac{3\pi}{2} - \theta_1^0 > \frac{\pi}{2}$, достигаемым при

$\theta_1^0 = \pi - \arccos \frac{l_1}{l_2} > \frac{\pi}{2}$. При значениях $l_2 = l_3$ уравнению $D(\theta) = 0$ соответствует прямая $\theta_1 + 2\theta_2 = 2\pi$, а при $l_2 < l_1$ получается выпуклая (вверх) кривая, идущая от точки $(0, \pi)$ к точке $(\pi, 0)$. Во всех случаях эти линии располагаются выше прямой $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ (рис. 11). Заметим, что кривые $B(\theta) = 0$ и $D(\theta) = 0$ при всех соотношениях между длинами l_1, l_2, l_3 или вовсе не пересекаются внутри квадрата или могут пересечься там только в одной точке.

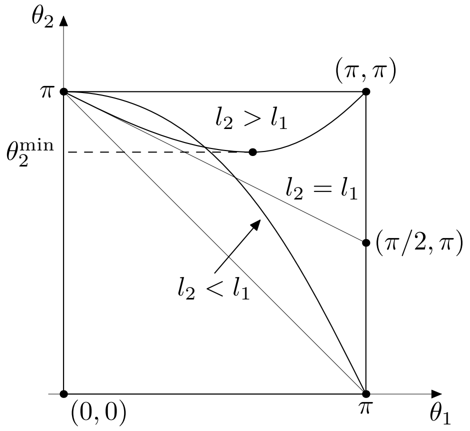

Рис. 11.

6. Мы, наконец, готовы приступить к доказательству леммы 2. Пусть данные многоугольники Q_1 и Q_2 расположены, как в условиях леммы 3, соответственно с углами $\alpha, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}$ и $\beta, \psi_1, \dots, \psi_{n-2}$, для которых выполнены условия вида (3)–(6). Включим Q_1 и Q_2 в семейство выпуклых многоугольников $Q(\gamma, \theta)$ с координатами вершин, данными формулами (2). При этом будем предполагать, что выполнены неравенства

$$0 \le \phi_i \le \theta_i \le \psi_i < \pi, \quad \phi_i < \psi_i, \quad 1 \le i \le n-2, \tag{19}$$

а γ определяется через $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$ по формуле (11). Обозначим вершины многоугольников Q_1, Q_2 и $Q(\gamma, \theta)$ соответственно через $a_1, a_2, \dots, a_n,\ b_1, b_2, \dots, b_n$ и $c_1, c_2, \dots, c_n$. Значения углов $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$ при заданных длинах сторон $l_1, \dots, l_{n-1}$ заполняют в кубе ω_0 пересечение описанной выше в утверждении 1 области T и прямоугольного параллелепипеда P, заданного неравенствами (19). Обозначим это пересечение через T_0. Область в многограннике Ω, лежащую над T_0, обозначим через Ω_0.

Расстояние между вершинами c_1 и c_n многоугольников $Q(\gamma, \theta)$ равно взятому со знаком $(-)$ значению функции $F(\gamma, \theta)$, определенной формулами (9), (10) и (13). Нам надо показать, что[4)]

$$F(\alpha, \phi) < F(\beta, \psi) \tag{20}$$

(напомним, что увеличение внешних углов θ_i соответствует уменьшению внутренних углов многоугольника).

Сравниваемым многоугольникам Q_1 и Q_2 в области $\Omega_0 \subset \Omega \subset \Pi$ соответствуют точки $M_1 = (\alpha, \phi_1, \dots, \phi_{n-2})$ и $M_2 = (\beta, \psi_1, \dots, \psi_{n-2})$. В соответствии с

[4)] На самом деле с использованием формулы (13) мы можем написать *точное* значение разности $F(\alpha, \phi) - F(\beta, \psi)$, из которого, однако, трудно увидеть знак этой разности.

предположением, сформулированным в конце п. 2, считаем, что в точке M_2 выполнены неравенства $\beta > 0$ и $\beta + \psi_1 + \dots + \psi_{n-2} > \pi$. Для перехода от ломаной Q_2 к ломаной Q_1, т. е. от точки $M_2 \in \Omega_0$ к точке $M_1 \in \Omega_0$, нам нужно знать поведение градиента функции $F(\gamma, \theta)$. Имеем

$$\operatorname{grad} F(\gamma, \theta) = \{-f, -f + y_2, \dots, -f + y_{n-1}\}. \tag{21}$$

Так как для выпуклых ломаных все ординаты вершин y_i, $2 \le i \le n-1$, положительны, получаем, что в точках поверхности $S : f(\gamma, \theta) = 0$ градиент функции $F(\gamma, \theta)$ направлен в сторону возрастания углов $\theta_1, \dots, \theta_{n-2}$. С учетом этого рассмотрим в Ω_0 путь L, начинающийся в точке M_2, лежащий на поверхности $S : f = 0$ и проектирующийся на основание ω_0 на отрезок Γ с уравнениями $\theta_i(t) = t\phi_i + (1-t)\psi_i$, $1 \le i \le n-2$. Вблизи своего начала, при достаточно малых t, этот путь идет строго внутри Ω_0 и вдоль него

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n-2} y_{i+1}(\phi_i - \psi_i) < 0,$$

поэтому функция $F(\gamma, \theta)$ вдоль L убывает и остается отрицательной, а неравенство $F \ne 0$ обеспечивает возможность продолжения пути L вдоль поверхности $S : f = 0$ с сохранением представимости S уравнением $\gamma = \gamma(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$. Если путь L при изменении t от 0 до 1 нигде не выходит на границу области Ω_0 (так будет, если, например, прямоугольный параллелепипед (19) целиком лежит в области T), то он при $t = 1$ придет в точку M_1 с постоянным убыванием F вдоль L, и тогда получаем требуемое неравенство (20). При этом приращение $F(t)$ можно найти или хотя бы оценить по формуле

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n-2} (\phi_i - \psi_i) y_{i+1}(t)\, dt, \tag{22}$$

в которой с учетом формул (2) и (12) подынтегральные функции могут быть выписаны явно как некоторые элементарные функции от t. В частности, если точка M_2 имеет «горизонтальные» координаты, удовлетворяющие неравенству $\psi_1 + \dots + \psi_{n-2} \le \pi$, то обе точки M_1 и M_2 будут находиться в области, в которой путь L не сможет выйти к границе области Ω_0, и для этого случая доказательство леммы закончено.

А в общем случае может быть, что путь L при некотором $t = t_0 < 1$ впервые попадет на границу области Ω_0. Попасть в точки вертикальных боковых граней над границей параллелепипеда ω_0 он не может, так как его проекция на ω_0 проходит по диагонали этого параллелепипеда. Из п. 4 мы знаем, что этого не может быть также в точках «крышки» ω_π, где $\gamma = \pi$, и в точках плоскости $\Pi_1 : \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = \pi$. Остаются две возможности: 1) путь L впервые выходит к границе Ω_0 в некоторой точке нижнего основания ω_0, где $\gamma = 0$, или 2) первый выход L к границе происходит в некоторой точке плоскости $\Pi_2 : \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = 2\pi$, причем в обоих случаях соответствующее значение параметра t доступно прямому вычислению.

Случай $n = 4$ разберем отдельно, а сейчас считаем, что $n > 4$. Пусть путь L вышел к границе области Ω_0 в точке $M^{(1)}\bigl(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \dots, \theta_{n-2}^{(1)}\bigr)$ на основании ω_0, в которой $B(\theta) = 0$. Так как проекция Γ пути L на основание ω_0 идет по диагонали параллелепипеда ω_0, имеем

$$\psi_1 > \theta_1^{(1)} > \phi_1, \psi_2 > \theta_2^{(1)} > \phi_2, \dots, \psi_2 > \theta_{n-2}^{(1)} > \phi_{n-2}.$$

Точкам $(n-3)$-мерной поверхности $B(\theta)=0$ в параллелепипеде ω_0 соответствуют ломаные, у которых вершины c_n, c_1 и c_2 расположены на одной прямой (см. рис. 7). Рассмотрим новые выпуклые ломаные с $n-1$ вершинами $c_2, c_3, \dots, c_n$, из которых c_2 и c_n лежат на оси Ox с началом координат в вершине c_2. Теперь для них роль аналога $(n-1)$-мерного параллелепипеда Π играет $(n-2)$-мерный параллелепипед ω_0, роль поверхности $S: f(\gamma,\theta)=0$ — поверхность $S_1: B(\theta)=0$, роль угла γ — угол θ_1, роль основания ω_0 — $(n-3)$-мерный параллелепипед $\omega_1: 0 \le \theta_2 < \pi, \dots, 0 \le \theta_{n-2} < \pi$, а вместо функции F теперь будет функция $F_1 = F(0,\theta) - l_1$, которая в точке $M^{(1)}$ меньше нуля. Продолжим путь L в ω_0 как путь L_1, лежащий на поверхности $S_1: B(\theta)=0$ и проектирующийся на основание ω_1 на отрезок Γ_1 с уравнениями $\theta_i(t_1) = t_1\phi_i + (1-t_1)\theta_i^{(1)}$, $2 \le i \le n-2$, $0 \le t_1 \le 1$. Путь L_1 не может выйти к точке поверхности $D(\theta)=0$, на которой $\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = 2\pi$, так как для $\gamma = 0$ это привело бы к равенству $\theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = 2\pi$, что невозможно в силу неравенства $\theta_1 + \dots + \theta_{n-2} < \psi_1 + \dots + \psi_{n-2} < 2\pi$. Углы $\theta_1, \dots \theta_{n-2}$ удовлетворяют аналогам условий (5), (6), т. е. $\pi < \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} \le 2\pi$. В полной аналогии с вышерассмотренным получаем, что вдоль пути L_1 функция F_1, а вместе с ней и F убывают, оставаясь отрицательными. При движении вдоль пути L_1 может быть так, что наступит момент, когда $\theta_1 = \theta_1(\theta_2, \dots, \theta_{n-2})$ станет равным ϕ_1, или же этого момента не будет до прихода Γ_1 — проекции L_1 на основание ω_1 — в точку $(\phi_2, \dots, \phi_{n-2})$. В первом случае мы получаем нестрого выпуклую ломаную $c_1c_2\dots c_n$, имеющую с исходной изометричной ломаной Q_1 равный внутренний угол при вершине c_2. Как показано в п. 2, в силу индукционного предположения этого достаточно, чтобы утверждать, что $|a_na_1| > |c_nc_1| > |b_nb_1|$. Во втором случае получаем, что изменяющаяся ломаная Q и исходная ломаная Q_1 будут иметь по $n-3$ общих угла и этого тоже достаточно для получения, как и выше, требуемого неравенства $|a_na_1| > |b_nb_1|$.

Осталось разобрать случай, когда путь L выходит к границе области Ω_0 в какой-либо точке плоскости $\Pi_2: \gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{n-2} = 2\pi$, проектирующейся на основание ω_0 в некоторую точку $M^{(2)}\bigl(\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}, \dots, \theta_{n-2}^{(2)}\bigr)$ с $D(\theta)=0$. Тогда мы можем провести такие же рассуждения, как и в рассмотренном выше случае, и преобразовать ломаную Q в ломаную, имеющую с Q_1 либо один общий угол $\theta_2 = \phi_2$, либо $n-3$ общих углов, причем в ходе преобразования расстояние между концами ломаной будет монотонно возрастать. Этого, как известно, достаточно для получения нужного неравенства.

Итак, мы получили доказательство леммы 2, показав, что один из сравниваемых многоугольников Q_2 можно непрерывно и изометрично продеформировать или в другой сравниваемый многоугольник Q_1, сохраняя в ходе деформации существующие неравенства внутренних углов, или же преобразовать Q_2 в нестрого выпуклый многоугольник, имеющий с Q_1 один или $n-3$ равных внутренних угла, с монотонно растущим в ходе деформации расстоянием между концевыми точками ломаной. Естественно задаться вопросом о возможности непрерывного перехода от Q_2 к Q_1 во всех случаях. В книге [5, гл. III, § 1] на с. 151 в скобках замечено, что две выпуклые изометричные ломаные всегда можно непрерывно перевести друг в друга с сохранением соотношения углов (т. е. в одной из ломаных внутренние углы не убывают, оставаясь меньше соответствующих углов в другой ломаной) и с монотонным возрастанием расстояния между концевыми точками ломаных. Мы сейчас рассмотрим подробно случай ломаных с четырьмя вершинами и покажем, что это утверждение из [5]

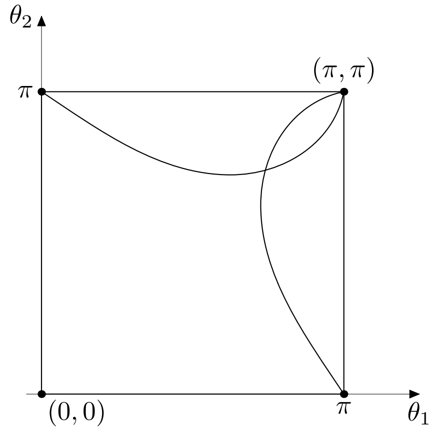

Рис. 12.

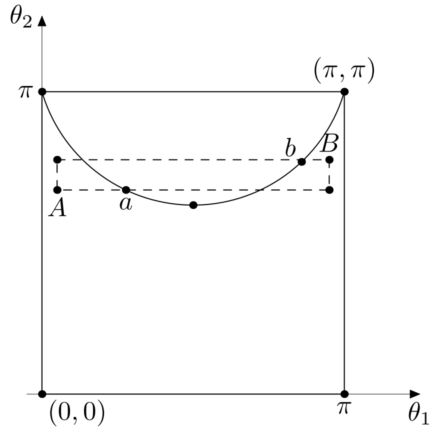

Рис. 13.

неверно.

В п. 5 установлено, что в квадрате $0 \le \theta_1 < \pi$, $0 \le \theta_2 < \pi$ выпуклым ломаным соответствует область T, определяемая неравенствами (16) и (18). Если имеем случай $l_1 = l_2 = l_3$, то T будет выпуклым четырехугольником и любые две его точки соединимы отрезком прямой, т. е. любые две выпуклые ломаные[5)] такого вида соединимы непрерывным семейством с монотонным убыванием углов и монотонным изменением расстояния между концевыми вершинами ломаной. Так же будет и во всех остальных случаях, кроме случая, когда $l_2 > l_3$ и/или $l_2 > l_1$. В этом случае область T имеет вид, изображенный на рис. 12 (ограничивающие область T кривые могут иметь пересечение в одной или в двух точках — всегда в точке (π, π) и, возможно, еще в одной точке). Если рассмотреть две ломаные[6)], одну с углами $\theta_1 = \theta_1' < \theta_1^0$, $\theta_2 = \theta_2' > \theta_2^{\min}$, другую с углами $\theta_1 = \theta_1'' > \theta_1^0$, $\theta_2 = \theta_2'' > \theta_2'$, то в пределах прямоугольника $P : \theta_1' \le \theta_1 \le \theta_1''$, $\theta_2' \le \theta_2 \le \theta_2''$ нельзя перейти непрерывно из точки $A(\theta_1', \theta_2')$ в точку $B(\theta_1'', \theta_2'')$ (рис. 13; для большей наглядности иллюстрации на рисунке масштаб не соблюден). Непрерывный переход можно будет сделать по следующей траектории: отрезок Bb: $\theta_2 = \mathrm{const} = \theta_2''$, затем по дуге кривой $D(\theta) = 0$ до точки a, далее по отрезку aA: $\theta_2 = \mathrm{const} = \theta_2'$. Знак производной функции $F(0, \theta)$ вдоль дуги кривой $D(\theta) = 0$ определяется из следующего выражения (см. формулы (10), (13), (17)):

$$\frac{d}{d\theta_1}(A^2 + B^2) = -2l_1 B(\theta) < 0,$$

т. е. $\frac{d}{d\theta_1} F(0, \theta) > 0$ (потому что все происходит в области $B(\theta) > 0$). Так как вдоль дуги ba переменная θ_1 убывает и $F < 0$, то $|F(0, \theta)|$ вдоль этой дуги возрастает, что и нужно. Переход из точки B в точку A осуществился *только с выходом за пределы прямоугольника* P.

Рис. 14.

---

5) О применяемых обозначениях θ_1° и $\theta_2^{\min}$ см. рис. 11 и соответствующий текст.

6) Мы имеем в виду ломаные, соответствующие точкам внутри Ω_0.

Конкретным примером двух ломаных, не переводимых друг в друга непрерывно в своем классе (т. е. с условием сохранения соответствующих неравенств внутренних углов), являются ломаные на рис. 14. Для них $l_2 = 2l_1 = 2l_3$. Для нижней ломаной $\theta_1 = 156°$, $\theta_2 = 24°$; для верхней $\theta_1 = 168°$, $\theta_2 = 168°$. Непосредственно можно проверить, что если мы захотим непрерывно перевести верхнюю ломаную в нижнюю, то конфигурации с $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ и со значением $\theta_1 \geq 156°$ не будет.

Ниже в п. 9 покажем, что и в случае общего n любые две изометричные строго выпуклые ломаные можно соединить непрерывным семейством строго выпуклых ломаных с неубывающим расстоянием между концевыми вершинами (но без информации о поведении углов).

Замечание 4. При доказательстве леммы 2 можно обойтись рассмотрением движения вдоль линии L до *первого* ее выхода к границе области Ω_0, когда в изменяющемся многоугольнике появляются три вершины, лежащие на одной прямой (т. е. угол γ или θ_{n-1} становится равным нулю), а потом применить рассуждение, приведенное в конце п. 2. Но мы хотели показать, что если не в один, то хотя бы в два хода можно применить доказательство, основанное на возможности приведения ломаной в положение, когда она имеет угол, равный соответствующему углу в другом сравниваемом многоугольнике.

7. Доказательство леммы 2 можно также получить, рассматривая следующую задачу нахождения условного экстремума: найти в области Ω_0 минимум функции $F(\gamma,\theta)$ при условии связи $f(\gamma,\theta) = 0$. Для этого сначала покажем, что во внутренних точках области экстремума не может быть. Составим функцию Лагранжа $\Lambda = F(\gamma,\theta) + \lambda f(\gamma,\theta)$ и рассмотрим систему из необходимых условий экстремума:

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial \theta_1} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial \theta_{n-2}} + \lambda\frac{\partial f}{\partial \theta_{n-2}} = 0, \quad f(\gamma,\theta) = 0. \tag{23}$$

Из (21) с учетом формулы $\operatorname{grad} f(\gamma,\theta) = \{F, F - x_2, \dots, F - x_{n-1}\}$ и последнего уравнения системы (23) получаем, что в точке экстремума $\lambda F = 0$. Рассмотрим возможные случаи.

Пусть $F = 0$. Тогда

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_i} = y_{i+1} - \lambda x_{i+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n-2,$$

откуда при $i = 1$ имеем $\sin\gamma - \lambda\cos\gamma = 0$, а для остальных i, $2 \leq i \leq n-2$, получаем

$$\begin{aligned} y_{i+1} - \lambda x_{i+1} &= y_i - \lambda x_i + l_i(\sin(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{i-1}) - \lambda\cos(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{i-1}) \\ &= l_i(\sin(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{i-1}) - \lambda\cos(\gamma + \theta_1 + \dots + \theta_{i-1}) = 0, \end{aligned}$$

откуда приходим к невыполнимой системе

$$\sin\gamma - \lambda\cos\gamma = 0, \quad \cos\gamma + \lambda\sin\gamma = 0.$$

Следовательно, в ожидаемой внутренней точке экстремума $F \neq 0$, $\lambda = 0$. Но если $\lambda = 0$, то

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta_i} = y_{i+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n-2,$$

что внутри Ω_0 невозможно.

Итак, оба экстремальных значения функции $F(\gamma,\theta)$ в D должны достигаться на границе Ω_0. С гранями $\gamma=\pi$ и $\gamma+\theta_1+\cdots+\theta_{n-2}=\pi$ поверхность $S: f=0$ не пересекается. Значения F на пересечениях S с гранями $\gamma=0$ или $\gamma+\theta_1+\cdots+\theta_{n-2}=2\pi$ сравниваются с $F(\alpha,\phi)$, как выше, а на гранях $\theta_i=\mathrm{const}(=\phi_i$ или $\psi_i)$ «работает» индукционное предположение.

8. Переходим к многоугольникам на сфере. Чтобы не усложнять изложение слишком частыми уточнениями, будем предполагать, что рассматриваемые многоугольники и ломаные являются строго выпуклыми, хотя все утверждения верны, когда рассматриваются нестрого выпуклые невырожденные фигуры. По аналогии с плоским случаем расположим данный выпуклый многоугольник некоторым специальным образом. Именно, считаем, что на единичной сфере $x^2+y^2+z^2=1$ многоугольник P с вершинами $c_1,\dots,c_n$ расположен на полусфере $x\ge 0$, вершина c_1 имеет координаты $(0,0,1)$. Для вычислений иногда полезно задавать положение точки на сфере в координатах долготы и широты:

$$x=\sin\phi\sin\psi,\quad y=-\cos\phi\sin\psi,\quad z=\cos\psi,\quad 0\le\phi\le\pi,\ 0\le\psi\le\pi. \tag{24}$$

Пусть известны длина l_i ребра c_ic_{i+1} и угол $\theta_i, 0<\theta_i<\pi$, при вершине c_{i+1}, $1\le i\le n-2$. Будем предполагать, что первая сторона c_1c_2 идет по полуокружности $x=0$, на которой $\phi=0$; тогда вершина c_2 имеет координаты $(0,-\sin l_1,\cos l_1)$. Для получения координат остальных вершин поступим следующим образом. Введем новую систему координат $Ox^{(1)},y^{(1)},z^{(1)}$, направив ось $Oz^{(1)}$ по внешней нормали к сфере в точке c_2, ось $Oy^{(1)}$ — по касательной к дуге c_1c_2 в точке c_2 с ориентацией ее внутрь дуги. Тогда в новой системе координат вершина c_3 имеет координаты $\left(x_3^{(1)},y_3^{(1)},z_3^{(1)}\right)=(\sin\theta_1\sin l_2,-\cos\theta_1\sin l_2,\cos l_2)$, а связь между старыми и новыми координатами будет даваться следующим соотношением:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=M(\theta_0,l_1)\begin{pmatrix}x^{(1)}\\y^{(1)}\\z^{(1)}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}x^{(1)}\\y^{(1)}\\z^{(1)}\end{pmatrix}=M^{-1}(\theta_0,l_1)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},$$

где ортогональная матрица M имеет вид

$$M(\theta_0,l_1)=\begin{pmatrix}\cos\theta_0 & -\sin\theta_0\cos l_1 & \sin\theta_0\sin l_1\\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0\cos l_1 & -\cos\theta_0\sin l_1\\ 0 & \sin l_1 & \cos l_1\end{pmatrix} \tag{25}$$

с $\theta_0=0$. Аналогично для получения координат вершины c_4 нужно ввести систему координат $Ox^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$, направив ось $Oz^{(2)}$ по внешней нормали к сфере в точке c_3, а ось $Oy^{(2)}$ — по внутренне ориентированной касательной к дуге c_2c_3 в точке c_3. Повторяя такую замену координат, получаем следующее общее правило нахождения координат вершин:

$$c_{m+1}^{(0)}=M(\theta_0,l_1)M(\theta_1,l_2)\dots M(\theta_{m-1},l_m)c_{m+1}^{(m)}, \tag{26}$$

где $c_{m+1}^{(0)}$ — искомый вектор-столбец из координат вершины c_{m+1} в исходной системе координат $Oxyz$, матрицы $M(\theta_k,l_{k+1})$, $0\le k\le m-1$, задаются формулой вида (25) с соответствующей заменой аргументов, а

$$c_{m+1}^{(m)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

— координаты вершины c_{m+1} в системе координат $Ox^{(m)}y^{(m)}z^{(m)}$, вводимой аналогично описанным выше системам $Ox^{(1)}y^{(1)}z^{(1)}$ и $Ox^{(2)}y^{(2)}z^{(2)}$. Формула (26) позволяет записать координаты вершин в любой из систем координат. В частности, для вершин c_1 и c_n в системе $Ox^{(m)}y^{(m)}z^{(m)}$ имеем координаты

$$c_1^{(m)} = M^{-1}(\theta_{m-1}, l_m)\dots M^{-1}(\theta_0, l_1)c_1^{(0)}, \tag{27}$$

$$c_n^{(m)} = M(\theta_m, l_{m+1})\dots M(\theta_{n-2}, l_{n-1})c_n^{(n-1)}, \tag{28}$$

или

$$c_n^{(m)} = \begin{pmatrix} \cos\theta_m & -\sin\theta_m \cos l_{m+1} & \sin\theta_m \sin l_{m+1} \\ \sin\theta_m & \cos\theta_m \cos l_{m+1} & -\cos\theta_m \sin l_{m+1} \\ 0 & \sin l_{m+1} & \cos l_{m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^{(m+1)} \\ y_n^{(m+1)} \\ z_n^{(m+1)} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Из этих формул получаем, что $z_1^{(m)}$ и $z_n^{(m)}$ от θ_m не зависят.

В каждой системе координат $Ox^{(m)}y^{(m)}z^{(m)}$ координата по z любой произвольно взятой точки A сферы равна косинусу расстояния от вершины c_{m+1} до точки A, а это расстояние реализуется длиной дуги меридиана, идущего от c_{m+1} до A. Поэтому согласно вышесказанному расстояния от c_{m+1} до c_1 и c_n не зависят от θ_m и с использованием формул (27) и (28) они допускают явное вычисление через длины сторон и углы θ_i, $1 \le i \le m-1$, для $d_{1,m+1}$ и θ_i, $m+1 \le i \le n-2$, для $d_{n,m+1}$.

Исследуем зависимость расстояния $d_{1,n}$ между c_1 и c_n от изменения угла θ_m при фиксированных значениях остальных углов θ_i. Пусть $m \ne 1$ и $n-2$. Рассмотрим треугольник с вершинами в точках c_1, c_{m+1} и c_n. По формуле (1) имеем

$$\cos d_{1,n} = \cos d_{1,m+1} \cos d_{m+1,n} + \sin d_{1,m+1} \sin d_{m+1,n} \cos\alpha_m, \tag{30}$$

где α_m — угол между диагоналями c_1c_{m+1} и $c_{m+1}c_n$, а $d_{i,j}$ здесь и далее везде обозначает расстояние между вершинами c_i и c_j. Расстояния $d_{1,m+1}$ и $d_{m+1,n}$ известны и постоянны, так как они не зависят от θ_m. Угол α_m равен $\pi - \theta_m - \beta_1 - \beta_2$, где β_1 — положительно ориентированный угол в точке c_{m+1} между дугами $c_{m+1}c_1$ и $c_{m+1}c_m$, а β_2 — положительно ориентированный угол между дугами $c_{m+1}c_{m+2}$ и $c_{m+1}c_n$. Дифференцируя (30) по θ_m, получаем

$$-\sin d_{1,n}\ d'_{1,n} = \sin d_{1,m+1} \sin d_{m+1,n} \sin\alpha_m > 0,$$

откуда после некоторых элементарных преобразований имеем

$$\frac{\partial d_{1,n}}{\partial\theta_m} = \frac{x_n y_{m+1} - x_{m+1} y_n}{\sqrt{1-z_n^2}} < 0. \tag{31}$$

Если $m = 1$ или $n-2$, то в предыдущих вычислениях изменится только формула для α_m (при $m = 1$ не будет угла β_1, а при $m = n-2$ не будет угла β_2), а окончательный ответ будет таким же, как в (31).

Теперь докажем лемму 2 для многоугольников на сфере, для чего применим индукцию по числу вершин n. При $n = 3$ лемма верна. Пусть она верна для выпуклых многоугольников с $n-1$ вершинами, и пусть нам даны два выпуклых n-угольника Q_1 и Q_2, удовлетворяющих условиям леммы. Пусть внешние углы многоугольников Q_1 и Q_2 в вершинах с номером i равны соответственно α_i и β_i, $\alpha_i < \beta_i$, $1 \le i \le n-2$. Рассмотрим на сфере многоугольники $Q(\theta)$ с внутренними углами θ_i при вершинах c_{i+1}, $1 \le i \le n-2$, такими, что

$$0 < \alpha_i \le \theta_i \le \beta_i < \pi, \text{ причем } \alpha_i < \beta_i,\ 1 \le i \le n-2. \tag{32}$$

Считаем, что все многоугольники расположены так, как описано выше в начале этого пункта: вершины $a_1 \in Q_1$, $b_1 \in Q_2$ и $c_1(\theta) \in Q(\theta)$ совпадают с полюсом $(0,0,1)$, а $a_2 \in Q_1$, $b_2 \in Q_2$, $c_2(\theta) \in Q_(\theta)$ совпадают с точкой $(0, -\sin l_1, \cos l_1)$. Долгота ϕ вершин выпуклых многоугольников Q_1 и Q_2 в представлении (24) является монотонно растущей функцией от длины ломаной, начинающейся в общей вершине $(0,0,1)$. В частности, $\phi_1 = \phi_2 = 0$ и $\phi_i < \phi_{i+1}$, $2 \le i \le n-1$, для обоих многоугольников. Расстояние $d_{1,n}$ между вершинами c_1 и $c_n(\theta)$ является функцией от $n-2$ переменных $(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$, определенной на параллелепипеде Π, заданном неравенствами (32). Выберем в Π путь L с уравнением $\theta_i = t\alpha_i + (1-t)\beta_i$, $0 \le t \le 1$. Многоугольник Q_2 строго выпуклый, поэтому при достаточно малых значениях t многоугольники $Q(\theta(t))$ остаются строго выпуклыми. Так как все компоненты вектора $\operatorname{grad} d_{1,n}(\theta)$ по доказанному выше отрицательны, при движении вдоль L от точки $M(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \in \Pi$ к точке $N(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}) \in \Pi$ значение $d_{1,n}$ возрастает, пока многоугольники $Q(\theta(t))$ остаются строго выпуклыми. Пусть это так для всего пути L. Тогда лемма доказана и

$$d_{1,n}(\alpha) - d_{1,n}(\beta) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial d_{1,n}(\theta(t))}{\partial \theta_i} (\alpha_i - \beta_i)\, dt > 0,$$

где производные $d_{1,n}$ вычисляются по формуле (31). Пусть при некотором $t = t_0$ многоугольник $Q(\theta(t))$ впервые перестал быть строго выпуклым. Так как $Q(\theta(t_0))$ является пределом строго выпуклых многоугольников, он тоже будет выпуклым, но в нестрогом смысле. Это значит, что по крайней мере при одной его вершине внешний угол будет равен нулю. Но путь L проходит внутри параллелепипеда Π, поэтому в вершинах $c_2, \dots, c_{n-1}$ такое невозможно. Значит, внешний угол равен нулю или при вершине c_n, или при вершине c_1 (или при обоих). Пусть он равен нулю в вершине c_n. Тогда вершины c_{n-1}, c_n, c_1 будут располагаться на одной прямой и можно будет применить такое же рассуждение, как в плоском случае. Аналогично рассматривается и второй случай.

9. В п. 6 мы видели, что вопрос о возможности соединения двух изометричных строго выпуклых ломаных изгибанием в том же классе ломаных остался пока открытым ввиду сложности установления связности открытого множества T, на котором заданы все допустимые значения углов θ_i (см. утверждение 1). Мы решим этот вопрос положительно, предварительно доказав следующую теорему, имеющую и самостоятельный интерес.

Теорема 1. *Пусть на евклидовой плоскости даны два строго выпуклых изометричных n-угольника с одинаковой ориентацией. Тогда их можно непрерывно продеформировать один в другой в том же классе многоугольников с сохранением длин сторон.*

Доказательство[7]. Обозначим через $\mathbf{Q}$ множество всех строго выпуклых n-угольников со сторонами данной длины $l_1, \dots, l_n$ (нумерация циклическая с употреблением индексов по модулю n), имеющих одинаковую ориентацию. Пусть γ_k — внутренний угол при вершине с номером k, являющейся общей вершиной сторон с длинами l_{k-1} и l_k. Тогда для $\sup_{\mathbf{Q}} \gamma_k = \gamma_k^0$ возможны следующие варианты:

[7] Другое доказательство этого утверждения дано, например, в [12].

1) $\gamma_k^0 = \pi$ с достижением верхней грани для непрерывного семейства нестрого выпуклых многоугольников (при $l_{k-1} + l_k < l_1 + \cdots + l_{k-2} + l_{k+1} + \cdots + l_n$, рис. 15a);

2) $\gamma_k^0 = \pi$ с достижением верхней грани только для одного нестрого выпуклого многоугольника (при $l_{k-1} + l_k = a \equiv l_1 + \cdots + l_{k-2} + l_{k+1} + \cdots + l_n$, рис. 15b);

3) $\gamma_k^0 < \pi$ с достижением верхней грани только для одного нестрого выпуклого многоугольника (при $l_{k-1} + l_k > a \equiv l_1 + \cdots + l_{k-2} + l_{k+1} + \cdots + l_n$, рис. 15c) и со значением $\gamma_k^0 = \arccos \frac{l_{k-1}^2 + l_k^2 - a^2}{2l_{k-1}l_k}$.

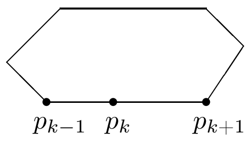

Рис. 15a.

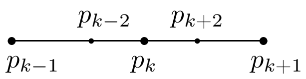

Рис. 15b.

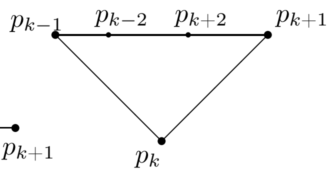

Рис. 15c.

Пусть P и Q — два многоугольника из множества $\mathbf{Q}$, и пусть их внутренние углы при вершине с номером k равны соответственно α_k и β_k. Допустим, что $\alpha_k < \beta_k$. Покажем, что многоугольник P можно изгибанием в множестве $\mathbf{Q}$ перевести в многоугольник, в котором внутренний угол в вершине с номером k будет равен β_k. В дальнейшем вершины в многоугольнике Q обозначаем через q_i, а в P и его деформациях — через p_i.

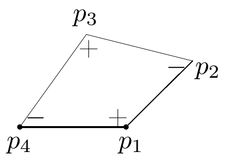

Рис. 16a.

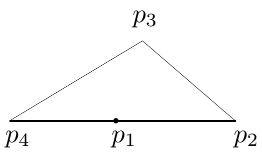

Рис. 16b.

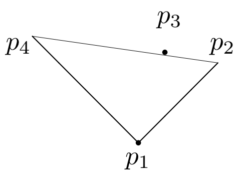

Рис. 16c.

Рассмотрим сначала многоугольники с числом сторон $n = 4$ и будем считать, что рассматриваемая вершина имеет номер $k = 1$. Расположим многоугольник P, как на рис. 16a, т. е. пусть сторона p_4p_1 идет по горизонтальной прямой, а вершины p_2 и p_3 находятся выше. По лемме 1 при возрастании угла в вершине p_1 распределение знаков будет, как на рис. 16a, т. е. углы в p_4 и p_2 убывают, а в p_3 угол возрастает. Пусть сторона p_4p_1 закреплена, а сторона p_1p_2 вращается по часовой стрелке, увеличивая угол в p_1. Четырехугольник может перестать быть выпуклым только после того, как одна из вершин p_3 или p_1 окажется на диагонали p_2p_4. Если p_1 окажется на этой диагонали раньше или одновременно с p_3 (рис. 16b), то $\sup\limits_{\mathbf{Q}} \gamma_1 = \pi$; если же на диагонали раньше окажется p_3 (рис. 16c), то $\sup\limits_{\mathbf{Q}} \gamma_1 < \pi$. В любом варианте угол α_1 в вершине p_1 можно сделать сколь угодно близким к $\sup\limits_{\mathbf{Q}} \gamma_1$, поэтому он может сравняться с β_1 при любом данном $\beta_1 < \sup\limits_{\mathbf{Q}} \gamma_1$.

Перейдем теперь к случаю общего n. Снова считаем, что рассматривается угол при вершине с номером $k = 1$. Пусть многоугольник P расположен, как на рис. 17, т. е. сторона p_np_1 идет горизонтально, весь многоугольник находит-

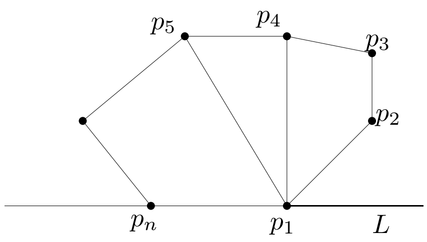

Рис. 17.

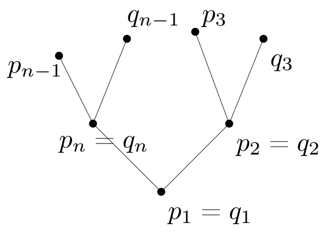

Рис. 18.

ся выше прямой L, определяемой стороной p_np_1, с нумерацией вершин против хода часовой стрелки. Будем увеличивать внутренний угол α_1 при вершине p_1 в несколько приемов. На первом шаге проведем диагональ p_1p_4 и увеличим внутренний угол в p_1 в четырехугольнике P_4: $p_1p_2p_3p_4p_1$ при фиксированном положении отрезка p_1p_4. Тогда внутренний угол в p_3 будет увеличиваться (как в рассмотренном выше случае $n = 4$), не нарушая сначала выпуклости в целом всего многоугольника P. При вращении стороны p_1p_2 по часовой стрелке или p_2 достигнет прямой L и тогда ясно, что угол α_1 в P при вершине p_1 может принять любое данное значение $\beta_1 < \pi$, или же внутренний угол в p_3 станет равным π с нарушением строгой выпуклости многоугольника P в ходе его изгибаний. В этом случае мы остановим вращение в момент, когда этот угол станет равным $\pi-\varepsilon$ с малым $\varepsilon > 0$ (значение которого можно оценить позже). Пусть диагональ p_2p_4 составит при этом со стороной p_3p_4 угол ε_1. Легко вычислить, что $\varepsilon_1 \sim c_1\varepsilon$, $c_1 = \frac{l_2}{l_2+l_3}$, а $d_{24} = (l_2 + l_3) + o(1)$, $\varepsilon \to 0$. Будем продолжать вращать сторону p_1p_2, считая теперь неподвижной диагональ p_1p_5, а длину диагонали p_2p_4 постоянной, т. е. будет происходить изгибание четырехугольника P_5: $p_1p_2p_4p_5p_1$ с неподвижным отрезком p_1p_5. При этой деформации треугольник $p_2p_3p_4$ перемещается как твердое тело, поэтому угол $\pi - \varepsilon$ в вершине p_3 не изменяется. Снова получим, что либо вершина p_2 попадет на прямую L и тогда в ходе вращения стороны p_1p_2 угол α_1 можно сделать равным $\beta_1 < \pi$, либо угол при вершине p_4 в многоугольнике P_5 станет равным π. В последнем случае мы остановим вращение стороны p_1p_2 в момент, когда этот угол стал равным $\pi-\varepsilon-\varepsilon_1$. В этот момент внутренний угол при вершине p_4 в самом многоугольнике P будет равен $\pi-\varepsilon$, т. е. строгая выпуклость многоугольника P сохранится, а угол между диагональю p_2p_5 и стороной p_5p_4 станет равным $\varepsilon_2 \sim c_2(1 + c_1)\varepsilon, c_2 = \frac{l_2+l_3}{l_2+l_3+l_4}$, а $d_{25} = (l_2 + l_3 + l_4) + o(1)$, $\varepsilon \to 0$. Продолжая такие вращения, получим, что или на каком-то шаге угол α_1 в вершине p_1 при достаточно малом ε станет как угодно близким к π (и тогда его можно сделать равным $\beta_1 < \pi$), или же при сколь угодно малом ε приходим к некоторому строго выпуклому многоугольнику с фиксированным положением стороны p_1p_n и с суммой внутренних углов $(n - 3)(\pi - \varepsilon) + \alpha_1 + \delta_2 + \delta_n = (n - 2)\pi$, где δ_2 и δ_n — внутренние углы соответственно при вершинах p_2 и p_n, а $d_{2n} = (l_2+\dots+l_{n-1})+o(1)$, $\varepsilon \to 0$. Следовательно, $\alpha_1 + \delta_2 + \delta_n = \pi + (n-3)\varepsilon \to \pi$, $\varepsilon \to 0$. Так как всегда $d_{2n} < l_1 + l_n$, имеем $l_1 + l_n \geq (l_2 + \dots + l_{n-1})$. Пусть p_2^0 — предельное положение вершины p_2 при $\varepsilon \to 0$ (тогда все внутренние углы при вершинах $p_3, \dots, p_{n-1}$ равны π). Если $l_1 + l_n = l_2 + \dots + l_{n-1}$, то треугольник $p_np_1p_2^0$ будет вырожденным, ибо $\left|p_np_2^0\right| = \lim d_{2n} = l_n + l_1 = |p_np_1| + \left|p_1p_2^0\right|$. Это значит, что предельное значение угла α_1 равно π, поэтому при достаточно малом ε этот угол можно сделать равным $\beta_1 < \pi$ в строго выпуклом многоугольнике. Если же $l_1 + l_n > l_2 + \dots + l_{n-1}$, то p_2^0 не может оказаться на прямой L и поэтому отрезки $p_np_1, p_1p_2^0, p_2^0p_n$ образуют невырожденный треугольник, в котором $\alpha_1^0 = \sup_{\mathbf{Q}} \alpha_1$, т. е. в этом случае угол α_1 в P при достаточно малом $\varepsilon > 0$ может принять значение, равное $\beta_1 < \sup_{\mathbf{Q}} \alpha_1$.

Итак, многоугольник P непрерывной деформацией можно перевести в некоторый многоугольник $P_1^{(0)} \in \mathbf{Q}$ с внутренним углом при заданной вершине, равным значению угла в многоугольнике Q в этой же вершине. Покажем, как использовать этот факт для доказательства самой теоремы.

Пусть в многоугольнике $Q \in \mathbf{Q}$, изометричном P, внутренний угол при вершине с номером 1 больше угла при той же вершине в P. По доказанному выше деформируем P в новый многоугольник $P_1^{(0)}$, в котором угол при указанной вершине имеет то же значение, что и в Q. Расположим теперь многоугольники Q и $P_1^{(0)}$ с совмещением их в вершине $p_1 = q_1$ и по сторонам $p_np_1 = q_np_1$ и $p_1p_2 = p_1q_2$ (рис. 18; по договоренности мы сохраняем за вершинами в многоугольнике $P_1^{(0)}$ те же обозначения, которые они имели в P). Проведем в них общую диагональ p_np_2 и рассмотрим $(n-1)$-угольники P_1: $p_2p_3\ldots p_{n-1}p_np_2$ и Q_1: $p_2q_3\ldots q_{n-1}p_np_2$. Пусть эти многоугольники имеют при общей вершине p_2 неравные внутренние углы α_2 и β_2, и пусть для определенности $\alpha_2 < \beta_2$ (если $\alpha_2 > \beta_2$, мы делаем с Q_1 то же самое, что сейчас будем делать с P_1). Повторим для P_1 предыдущее построение и переведем его в новый многоугольник P_1', имеющий в p_2 внутренний угол, равный такому же углу в Q_1, и те же вершины p_n, p_2 и q_3. При этом добавление к деформируемому многоугольнику P_1 неподвижного треугольника $p_np_1p_2$ в ходе его деформации дает n-угольник, который изометричен P и который все время будет строго выпуклым в целом, так как в нем все внутренние углы остаются меньше π с суммой 2π (или же это можно усмотреть из того, что треугольник $p_np_1p_2$ все время остается внутри части плоскости, ограниченной отрезком p_np_1 и лучами, являющимися продолжениями сторон $p_{n-1}p_n$ и p_3p_2). В частности, добавление этого треугольника к P_1' даст строго выпуклый многоугольник $P_1^{(1)}$. Таким образом, после прихода к равенству углов в вершине p_2 мы получим два изометричных многоугольника Q и $P_1^{(1)}$ с совпадением уже по четырем вершинам p_n, p_1, p_2, p_3 и по трем сторонам. Проведя диагональ p_3p_n, продолжим дальше аналогичное рассмотрение с $(n-2)$-угольниками $p_3p_4\ldots p_{n-1}p_np_3$ и $p_3q_4\ldots q_{n-1}p_np_3$, получим строго выпуклый многоугольник $P_1^{(2)}$, совпадающий с Q уже по пяти вершинам и четырем сторонам, и т. д. Таким образом, мы получим две последовательности многоугольников $P_1^{(i)}$ и $Q_1^{(j)}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n-m$ (где m равно числу вершин, в которых внутренние углы в P меньше внутренних углов в Q), такие, что $P_1^{(m)} = Q_1^{(n-m)}$. Проделав в последовательности, скажем, $Q_1^{(j)}$, обратные переходы, получим непрерывный переход от P к Q в классе строго выпуклых многогранников. Теорема доказана.

Замечание 5. В выпуклых многоугольниках с данными длинами сторон для каждого внутреннего угла γ_k существует $\inf_{\mathbf{Q}} \gamma_k$ и аналогично достижимости $\sup_{\mathbf{Q}} \gamma_k$ изгибаниями можно достигнуть и $\inf_{\mathbf{Q}} \gamma_k$. Применяя этот факт, при доказательстве теоремы можно преобразовывать только многоугольники $P_1^{(i)}$ и построить цепочку перехода $P, P_1^{(1)}, \ldots, P_1^{(n)} = Q$.

10. Воспользуемся теперь теоремой 1 для доказательства возможности непрерывного изометрического перехода (т. е. изгибания) от одной выпуклой ломаной к другой в классе строго выпуклых ломаных с монотонным изменением расстояния между концевыми вершинами ломаных. Идея следующая. Пусть нам даны две строго выпуклые ломаные Q_1 и Q_2 с n вершинами, с равными длинами соответствующих сторон и с одинаковой ориентацией[8)]. Если ломаные имеют одинаковые расстояния между своими концевыми точками, то, дополняя каждую ломаную до замкнутого выпуклого многоугольника, получаем два изометричных строго выпуклых многоугольника, которые по теореме 1 можно перевести друг в друга изгибанием в классе строго выпуклых многоугольников; это же изгибание даст и изгибание ломаных друг в друга. Пусть расстояния между концевыми вершинами ломаных разные, скажем, расстояние в Q_2 больше расстояния в Q_1. Мы покажем, что тогда ломаную Q_1 можно непрерывно и изометрично преобразовать в некоторую ломаную Q_3 в классе строго выпуклых ломаных так, чтобы расстояние между концевыми вершинами Q_1 увеличивалось и стало равным соответствующему расстоянию в Q_2, а затем уже можно применить предыдущее рассуждение и получить совпадение продеформированной ломаной Q_3 с Q_2.

Итак, пусть нам даны две изометричные строго выпуклые ломаные Q_1 и Q_2 с разными расстояниями между своими концевыми вершинами. Наибольшее возможное расстояние между концевыми точками не превосходит величины $s = l_1 + \dots + l_{n-1}$ и может быть сколь угодно близко к этой сумме. Пусть это расстояние в Q_1 меньше, чем в Q_2. Расположим ломаную Q_1, как в лемме 3, и покажем, что ее можно продеформировать так, чтобы расстояние между концевыми точками стало сколь угодно близко к s. Мы докажем это утверждение индукцией по числу сторон. Пусть $n = 4$. Имеем следующие возможности расположения вершин четырехугольника: 1) угол между стороной c_3c_4 (как вектором) и осью Ox не меньше чем $\pi/2$ (рис. 19a); 2) угол между стороной c_3c_4 и осью Ox меньше $\pi/2$, а угол γ не больше чем $\pi/2$ (рис. 19b); 3) угол между стороной c_3c_4 и осью Ox меньше $\pi/2$, а угол γ больше $\pi/2$ (рис. 19c).

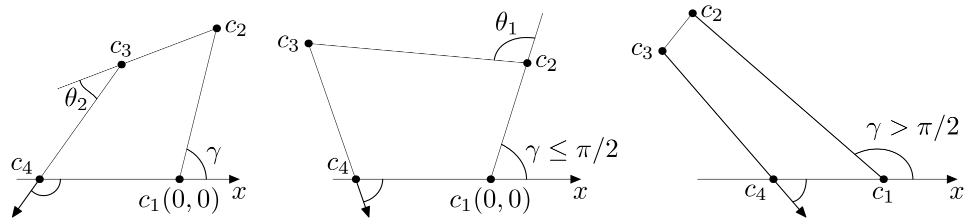

Рис. 19a. Рис. 19b. Рис. 19c.

Разберем первый случай (рис. 19a). Мы можем повернуть сторону c_3c_4 вокруг вершины c_3 по часовой стрелке, уменьшая угол θ_2 до некоторого значения ε, сколь угодно близкого к нулю, а затем повернуть всю ломаную вокруг вершины c_1 против часовой стрелки до момента, когда точка c_4' — новое положение вершины c_4 — не окажется на оси Ox. Это можно делать, конечно, одновременно, уменьшая угол θ_2 и соответственно изменяя (увеличивая) угол γ, вычисляемый по формуле (11). При этих деформациях длина диагонали c_1c_3 не изменяется, поэтому расстояние $|c_1c_4|$, вычисляемое по теореме косинусов из треугольника $c_1c_3c_4$, увеличивается с достижением значения, сколь угодно

[8)]Это значит, что при обходе ломаных с вершины с номером 1 до вершины с номером n внешние углы, определяемые в каждой вершине кратчайшим поворотом с продолжения приходящей стороны к исходящей стороне, в обеих ломаных имеют одинаковые знаки.

близкого к $\sqrt{(l_2+l_3)^2+l_1^2-2l_1(l_2+l_3)\cos\theta_1}$. Зафиксировав некоторое значение $\varepsilon>0$ для угла θ_2, мы затем можем сдвигать вершину c_4 по оси Ox налево, увеличивая расстояние $|c_1c_4|$ и одновременно поворачивая сторону c_1c_2 против часовой стрелки до положения, сколь угодно близкого к моменту превращения четырехугольника $c_1c_2c_3c_4$ в нестрого выпуклый (рис. 20a). Соответствующее значение γ легко вычисляется и получается, что сторону c_1c_2 можно вращать до значений

$$\gamma<\gamma_0=\pi-\varepsilon+\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{F^2-(l_1+l_2)^2\sin^2\varepsilon}}{(l_1+l_2)\sin\varepsilon},$$

где

$$F^2=|c_1c_4|^2=(l_1+l_2+l_3)^2-4l_3(l_1+l_2)\sin^2\frac{\varepsilon}{2}.$$

Видно, что при достаточно малых значениях ε расстояние $|c_1c_4|$ становится как угодно близким к своей верхней грани $l_1+l_2+l_3$, поэтому мы можем добиться, чтобы в четырехугольнике Q_1 в ходе указанной деформации расстояние $|c_1c_4|$ стало равным соответствующему расстоянию в Q_2.

Теперь рассмотрим случай 2, рис. 19b. В его условиях имеем

$$\frac{3\pi}{2}<\gamma+\theta_1+\theta_2<2\pi. \tag{33}$$

Вершины c_3 и c_2 находятся по разные стороны от вертикальной прямой $x=x_4$. Повернем две стороны c_4c_3 и c_3c_2 вокруг вершины c_2 по часовой стрелке, оставляя сторону c_1c_2 неподвижной, а после этого опустим сторону c_4c_3 вниз вновь до оси Ox, поворачивая ее по часовой стрелке вокруг вершины c_3. В ходе указанных вращений произойдет уменьшение углов θ_1 и θ_2 с сохранением, однако, соотношения (33), обеспечивающего выполнение условий леммы 3 и тем самым строгую выпуклость получаемых ломаных. При этом расстояние $|c_1c_4|$ будет монотонно увеличиваться: в первый раз в силу увеличения угла в вершине c_2 треугольника $c_1c_2c_4$ при неизменных длинах $|c_1c_2|=l_1$ и $|c_4c_2|$; во второй раз за счет увеличения угла в вершине c_3 треугольника $c_1c_3c_4$ при неизменных длинах $|c_1c_3|$ и $|c_3c_4|=l_3$ (а можно просто сослаться на лемму 2 при $n=4$, так как у рассматриваемой ломаной в новом положении внутренние углы больше). Эту деформацию ломаной Q_1 можно делать не в два приема, а одновременно уменьшая углы θ_1 и θ_2 так, чтобы вершина c_4 оставалась на оси Ox. При продолжении деформации наступит момент, когда $\theta_1+\theta_2+\gamma=\frac{3\pi}{2}$. Действительно, описанную выше деформацию можно делать до тех пор, пока один из углов θ_1 или θ_2 не станет равным нулю или же y_3 не станет равным l_3. Вариант, что первым настанет момент $\theta_1=0$, невозможен, так как, прежде чем сторона c_2c_3 станет продолжением неподвижной стороны c_1c_2, имея для вершины с$_3$ абсциссу $x_3>0$, нужно, чтобы абсцисса вершины c_3 прошла со значения $x_3<x_4<0$ через значение $x_3=x_4<0$, а как раз в этот момент мы и имеем $y_3=l_3$ или $\theta_1+\theta_2+\gamma=\frac{3\pi}{2}$. Вариант $\theta_2=0$ тоже исключается, так как, пока $x_3<x_4$, будет $\gamma+\theta_1+\theta_2>\frac{3\pi}{2}$, а тогда при $\theta_2=0$ имели бы $\gamma+\theta_1>\frac{3\pi}{2}$, что невозможно при $\gamma\le\frac{\pi}{2}$ и $\theta_1<\pi$. Следовательно, первым наступит момент $y_3=l_3$, и начиная с этого момента мы будем находиться в условиях рассмотренного ранее случая 1 и можем далее увеличивать значение длины $|c_1c_4|$, приближаясь к ее верхней грани (значение θ_1, соответствующее критическому моменту $\theta_1+\theta_2+\gamma=\frac{3\pi}{2}$, можно вычислить из уравнения $l_1\sin\gamma+l_2\sin(\gamma+\theta_1)=l_3$, получаемого из условия $y_3=l_3$).

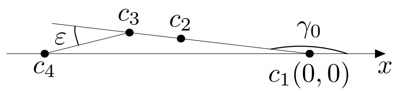

Рис. 20a.

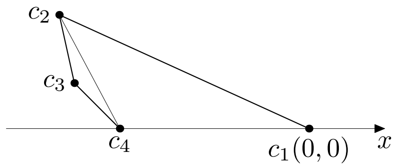

Рис. 20b.

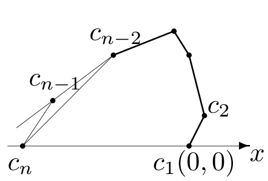

Рис. 21a.

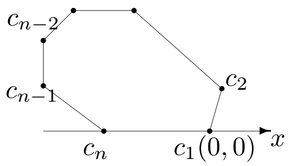

Рис. 21b.

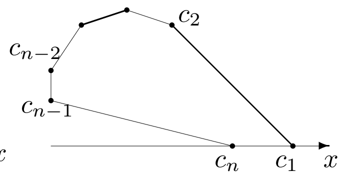

Рис. 21c.

Рассмотрим теперь случай 3, рис. 19c. В этом случае мы сначала повернем всю ломаную вокруг вершины c_1 по часовой стрелке, а затем опустим вниз до оси Ox вершину c_4 поворотом стороны c_4c_3 вокруг вершины c_3 по часовой стрелке. При этом будет происходить уменьшение углов γ и θ_2 с постоянством угла θ_1 и с сохранением неравенства (33), обеспечивающего при $\theta_2 > 0$ строгую выпуклость получаемых ломаных. Если до достижения равенства $y_3 = l_3$ (при котором $\theta_1 + \theta_2 + \gamma = \frac{3\pi}{2}$) или равенства $\theta_2 = 0$ угол γ примет значение, меньшее или равное $\pi/2$, мы тогда сможем применить рассуждения случая 2 и получить требуемый результат. Если же при $\gamma > \pi/2$ и $\theta_2 > 0$ мы достигаем равенство $y_3 = l_3$, то приходим к случаю 1; если же равенство $\theta_2 = 0$ достигается раньше или одновременно с равенством $y_3 = l_3$, то, дойдя до некоторого малого значения $\varepsilon > 0$ угла θ_2, станем работать дальше с двухзвенной ломаной $c_1c_2c_4$ (рис. 20b), сдвигая вершину c_4 влево вдоль оси Ox. При этом угол γ сначала будет уменьшаться до значения

$$\gamma_0 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{l_1^2 - d_\varepsilon^2}},$$

где $d_\varepsilon = |c_4c_2| < l_1$, а затем γ будет приближаться к π сколь угодно близко в зависимости от малости выбранного значения ε (см. рис. 20b в аналогичном рассуждении). Случай ломаной с четырьмя вершинами полностью рассмотрен.

Для ломаной Q_1 с $n > 4$ вершинами тоже различаем три случая:

1) угол между стороной $c_{n-1}c_n$ (как вектором) и осью Ox не меньше чем $\pi/2$ (рис. 21a);

2) угол между стороной $c_{n-1}c_n$ и осью Ox меньше $\pi/2$, но $\gamma \le \pi/2$ (рис. 21b);

3) угол между стороной $c_{n-1}c_n$ и осью Ox меньше $\pi/2$, а $\gamma > \pi/2$ (рис. 21c).

В первом случае мы повернем сторону c_nc_{n-1} вокруг вершины c_{n-1} по часовой стрелке, уменьшая угол θ_{n-2} до произвольно малого значения $\varepsilon > 0$ и поворачивая затем всю ломаную вокруг вершины c_1 с тем, чтобы опустить вершину c_n вновь на ось Ox. После этой деформации расстояние $|c_1c_n|$ увеличится, а дальнейшие рассмотрения можно вести для ломаной с вершинами $c_1 \dots c_{n-2}c_n$, в которой сторона $c_{n-2}c_n$ имеет постоянную длину (как сторона треугольника $c_nc_{n-2}c_{n-1}$ с фиксированным внешним углом $\theta_{n-2} = \varepsilon$ при вершине c_{n-1}). По индукционному предположению эту ломаную можно «развернуть» так, чтобы расстояние между ее концами было как угодно близко к максимально возможной его величине, причем ε можно выбрать столь малым, чтобы строгая выпуклость рассматриваемых $(n-1)$-угольников не нарушалась при добавлении к ним треугольника $c_n c_{n-2} c_{n-1}$.

Аналогично в остальных случаях мы проводим те же рассуждения, заменяя либо стороны $c_n c_{n-1}$, $c_{n-1} c_{n-2}$ достаточно близкой к ним диагональю $c_n c_{n-2}$, либо стороны $c_1 c_2, c_2 c_3$ достаточно близкой к ним диагональю $c_1 c_3$. Для полученных $(n-1)$-угольных ломаных применимо индукционное предположение, а при достаточной близости вышеупомянутых диагоналей к заменяемым ими сторонам добавление выброшенных треугольников не изменяет выпуклости рассматриваемых ломаных.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Любые две строго выпуклые изометричные ломаные можно продеформировать друг в друга изгибанием в классе строго выпуклых ломаных с монотонным (в нестрогом смысле) изменением расстояния между концевыми вершинами ломаных.*

Следствие. *Область T в кубе $0 < \theta_1 < \pi, \ldots, 0 < \theta_{n-2} < \pi$, в которой располагаются точки, соответствующие выпуклым ломаным с данными длинами сторон и с внешними углами $\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}$, является линейно связной.*

11. Обратим внимание на то, что при доказательстве теоремы 2 мы во всех случаях использовали на первом шаге преобразование, изменяющее только углы θ_1 и θ_{n-2} или только θ_{n-2}, причем всегда происходило их уменьшение, которое могло быть сделано до сколь угодно малого значения θ_{n-2}.

Это наблюдение приводит нас к той же идее геометрического доказательства леммы 2, которое предложено в [4] и которое сводится к прямому применению индукции без всяких дополнительных вычислений. Начнем со следующего очевидного утверждения.

Утверждение 2. *Пусть дана строго выпуклая ломаная с тремя сторонами c_1c_2, c_2c_3, c_3c_4 (рис. 22). Тогда стороны c_1c_2 и c_4c_3 можно повернуть соответственно вокруг вершин c_2 и c_3 так, чтобы в конце поворота поворачиваемые стороны ломаной оказались сколь угодно близкими к прямой, проходящей через неподвижную сторону c_2c_3, и чтобы при этом в ходе деформации ломаная оставалась строго выпуклой с монотонным увеличением внутренних углов при вершинах c_2 и c_3 (и соответственно с монотонным увеличением расстояния между концевыми вершинами c_1 и c_4).*

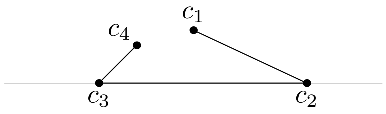

Рис. 22.

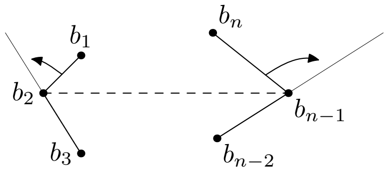

Рис. 23.

С использованием этого утверждения доказательство леммы 2 проводится следующим образом. Рассмотрим в ломаной Q_2 (в которой внутренние углы меньше, чем в Q_1) ломаную $L : b_1b_2b_{n-1}b_n$ (рис. 23). Зафиксируем вершины

b_2 и b_{n-1} и применим к ломаной L утверждение 2. Тогда при вращении стороны b_1b_2 вокруг b_2 и стороны $b_{n-1}b_n$ вокруг b_{n-1} с увеличением углов $\angle b_1b_2b_{n-1}$ и $\angle b_2b_{n-1}b_n$ наступит момент, когда один из углов $\angle b_1b_2b_3$ или $\angle b_{n-2}b_{n-1}b_n$ станет равным соответствующему углу в ломаной Q_1, причем это произойдет до того, как сторона b_2b_1 или $b_{n-1}b_n$ пересечет соответственно луч b_3b_2 или $b_{n-2}b_{n-1}$, и тем самым до этого момента и в этот момент вся ломаная Q_2 будет оставаться строго выпуклой. В ходе такой деформации расстояние d_2 между концевыми вершинами b_1 и b_n ломаной Q_2 монотонно увеличивается, а в положении Q_{new}, когда один из внутренних углов ломаной станет равным соответствующему внутреннему углу в Q_1, это расстояние d_{new} по индукционному предположению меньше расстояния d_1 в Q_1 и в итоге имеем $d_2 < d_{new} < d_1$, что и требовалось показать.

Аналитически возможность перехода от строго выпуклой ломаной Q_2 к строго выпуклой ломаной Q_{new} может быть получена так. Если $n = 4$, то с использованием результатов п. 5 получаем, что в пересечении любого прямоугольника $P(\phi,\psi)$: $\phi_1 \le \theta_1 \le \psi_1$, $\phi_2 \le \theta_2 \le \psi_2$ с областью $T \subset \omega_0$ существует путь (на самом деле его можно выбрать как прямолинейный отрезок), ведущий от точки (ψ_1,ψ_2) к одной из сторон $\theta_1 = \phi_1$ или $\theta_2 = \phi_2$ прямоугольника $P(\phi,\psi)$, минуя линии $B(\theta) = 0$ и $D(\theta) = 0$. Проверяется это простым перебором всех возможных строений края области T, лежащего внутри квадрата $0 < \theta_1, \theta_2 < \pi$, с учетом вида кривых $B(\theta) = 0$ и $D(\theta) = 0$ (см. рис. 10 и 11). При $n > 4$ в $(n-2)$-мерном параллелепипеде ω_0 надо провести двумерную плоскость $\Pi(\psi)$: $\theta_2 = \psi_2, \dots, \theta_{n-3} = \psi_{n-3}$, проходящую через точку $(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-3},\psi_{n-2})$. Пересечения этой плоскости с поверхностями $B(\theta) = 0$ и $D(\theta) = 0$ будут кривыми на плоскости изменения переменных θ_1 и θ_{n-2}, вид которых зависит от соотношений между длинами сторон ломаной и значениями углов $\psi_1,\dots,\psi_{n-2}$. Снова можно убедиться в том, что на плоскости $\Pi(\psi)$ в пределах области

$$B(\theta_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-3},\theta_{n-2}) > 0, \quad D(\theta_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-3},\theta_{n-2}) > 0$$

всегда есть путь, ведущий от точки $(\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_{n-2})$ к прямой $\theta_1 = \phi_1$ или к прямой $\theta_2 = \phi_2$. Но, конечно, приводить здесь эти большие вычисления не имеет смысла.

Итог этого пункта следующий: лемму 2 можно доказать, как и Коши, индукцией по числу сторон, но при этом в общем случае нужно применять деформацию ломаной, изменяющую значения ее двух углов, а не одного, как это было у Коши.

В заключение выражаю благодарность рецензенту, замечания которого позволили, на мой взгляд, существенно улучшить изложение материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cauchy A. L.* Sur les polygones et polyèdres, Second mémoire // J. de l'Ecole Polythéchnique. 1813. V. 9. P. 87–98.
2. *Legendre A.-M.* Eléments de géométrie. Première edition. Paris, 1794. Note XII. P. 321–334.
3. *Connelly R.* Rigidity // Handbook of convex geometry. Amsterdam; London; New York; Tokyo: Elsevier Sci. Publ.; North-Holland, 1993. P. 223–271.
4. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. М.: Учпедгиз, 1958. Ч. II.
5. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
6. *Люстерник Л. А.* Выпуклые фигуры и многогранники. М.: ГИТТЛ, 1956.
7. *Berger M.* Géométrie. Paris: Cédic/Fernand Nathan, 1979. V. 2. (русский перевод: Берже М. Геометрия. М.: Мир, 1984. Т. 2).

8. *Steinitz E.* Polyeder und Raumeinteilungen // Encyklopädie der math. Wiss. Leipzig, 1916. Bd 3. S. 1–139.
9. *Steinitz E., Rademacher H.* Vorlesungen über die Theorie der Polyeder. Berlin: Springer-Verl., 1934.
10. *Schoenberg I. J., Zaremba S. K.* On Cauchy's lemma concerning convex polygons // Canad. J. Math. 1967. V. 19. P. 1062–1071.
11. *Aigner M., Ziegler G.* Proofs from THE BOOK. Berlin etc.: Springer-Verl., 1998.
12. *Милка А. Д.* Что такое геометрия «в целом». М.: Знание, 1986.
13. *Сабитов И. Х.* Чему равна сумма углов многоугольника // Квант. 2001. № 3. С. 7–12.

Статья поступила 25 декабря 2003 г.

Сабитов Иджад Хакович
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, 119992 ГСП-2 Москва
isabitov@mail.ru