*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2004. Том 45, № 4*

*УДК 517.956.2*

# ОЦЕНКИ В $L^2$ И ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

**З. Г. Меджидов**

**Аннотация:** В произвольной области комплексного пространства рассматривается обобщенная система Коши — Римана с нелинейными членами. При выполнении некоторых естественных условий на коэффициенты, а также условий совместности доказана разрешимость этой системы в пространстве локально квадратично интегрируемых функций.

**Ключевые слова:** обобщенная аналитическая функция, система Коши — Римана, интегрируемость, совместность, слоение, пространство Хёрмандера.

*Обобщенными аналитическими функциями* (о.а.ф.) переменных $z_1, \dots, z_n$ называют [1] решения системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} - \overline{a_j u} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{0.1}$$

в которой $u$ — неизвестная, $a_j$ — заданные в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ комплекснозначные функции.

Теория о.а.ф. одной переменной достаточно полно разработана [2].

В настоящей работе мы исследуем соответствующую (0.1) неоднородную систему

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} - \overline{a_j u} = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{0.2}$$

$n > 1$, с заданными в $\Omega$ правыми частями.

А. Кухара [3] указал условия, которые обеспечивают факторизацию о.а.ф. в заданной области, подобную той, которая дана в известной теореме И. Н. Векуа [2]. Эти условия имеют отчасти неявный характер. Можно, однако, записать ряд следствий условий Кухара, которые представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения для коэффициентов. Эти следствия называют условиями интегрируемости (однородной системы (0.1)); они необходимы для того, чтобы в каждой точке пространство локальных решений было бесконечномерным [1].

Системы (0.1) и (0.2) изучались также в работах Л. Г. Михайлова и А. В. Абросимова [4, 5]. В [4] в предположении аналитичности коэффициентов $a_j$ выписаны условия интегрируемости, а также получена общая формула для локальных решений системы (0.1). В [5] предполагается лишь гладкость коэффициентов и для случая $n = 2$ выписываются условия интегрируемости, а также

Работа выполнена при финансовой поддержке МО РФ (код проекта УР 04.01.006).

условия совместности системы (0.2) — дифференциальные соотношения между правыми частями, необходимые для ее разрешимости.

В [6] доказано, что система (0.2) с $a_j \in C^2$ при условии, что пространство локальных решений бесконечномерно, с помощью замен переменных может быть приведена к одному обобщенному уравнению Коши — Римана; выписываются лишь используемые при этом условия совместности.

Случай произвольного $n$ и гладких коэффициентов рассмотрен в работе Г. А. Магомедова и В. П. Паламодова [1]. В ней найдены дифференциальные, а также интегродифференциальные условия для правых частей системы (0.2), необходимые для разрешимости этой системы. Доказано, что при выполнении этих условий, а также условий интегрируемости глобальная разрешимость системы (0.2) эквивалентна глобальной разрешимости некоторой связности типа $(0,1)$ в линейном расслоении на римановой поверхности $\Sigma$, где $\Sigma$ — пространство связных слоев голоморфного слоения коразмерности 1, которое возникает естественным путем из условий интегрируемости. С помощью указанной связности описана также структура решений системы (0.1).

Сейчас мы исследуем задачу разрешимости системы (0.2) в $L^2(\Omega, \mathrm{loc})$ — пространстве функций в $\Omega$ с локально интегрируемым квадратом — в предположении, что коэффициенты $a_j$ суть функции класса $C^2(\Omega)$, а правые части $f_j$ принадлежат $L^2(\Omega, \mathrm{loc})$. Эта задача будет решена в пространстве Хёрмандера $L^2(\Omega, \varphi)$ — пространстве функций в $\Omega$, интегрируемых с квадратом по мере $e^{-\varphi} d\lambda$, где $\varphi$ — непрерывная вещественнозначная функция, $d\lambda$ — мера Лебега. Центральное место в наших рассуждениях занимают оценки в $L^2$, подобные тем, которые применены Л. Хёрмандером в [7, 8] для доказательства разрешимости неоднородной системы Коши — Римана.

Чтобы не допустить превращения системы (0.1) в обычную систему Коши — Римана, мы будем предполагать, что функции $a_1, \dots, a_n$ не обращаются одновременно в нуль ни на каком открытом подмножестве области определения. Мы покажем, что при выполнении условий, указанных в [1], система (0.2) разрешима в $L^2(\Omega, \varphi)$ — пространствах обобщенных функций.

## § 1. Формулировка теоремы

Напомним вначале некоторые факты из [1], необходимые для формулировки основного результата.

Пусть коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ заданы и бесконечно дифференцируемы в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, а также подчинены условию

(H) $a_i(z) \neq 0$ в каждой точке $z \in \Omega$ при некотором $i$.

Тогда для того, чтобы в каждой точке $\Omega$ пространство локальных решений системы (0.1) было бесконечномерным, необходимы следующие условия интегрируемости на коэффициенты $a_j$:

$$\partial a = a \wedge b, \quad \bar{\partial} a = a \wedge c, \quad \partial c = a \wedge l, \quad d(a \wedge \bar{a}) = 0, \tag{1.1}$$

где $a = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k dz_k$, $b$ — некоторая гладкая форма бистепени $(1,0)$, $c$ и $l$ — гладкие формы бистепени $(0,1)$.

При выполнении условий (1.1), а также условия (H) для разрешимости неоднородной системы (0.2) необходимы еще следующие условия совместности на правые части $f_j$:

$$a \wedge \partial \bar{f} = 0, \tag{1.2}$$

$$\bar{\partial}\partial \bar{f} - a \wedge \partial f - \partial a \wedge f - \bar{a} \wedge a \wedge \bar{f} + c \wedge \partial \bar{f} = 0, \tag{1.3}$$

где $f = \sum_{j=1}^{n} f_j d\bar{z}_j$.

Как отмечено в [1], из условий интегрируемости (1.1) и условия (H) следует, что в $\Omega$ определено комплексно-аналитическое слоение $W$ коразмерности 1, касательное расслоение к которому совпадает с пересечением ядер дифференциальных форм $a$ и $\bar{a}$. Пусть $\Sigma$ обозначает множество всех листов, т. е. максимальных связных слоев этого слоения, а отображение $\pi : \Omega \to \Sigma$ переводит всякую точку в содержащий ее лист. Предположим, что выполнено условие

(M) для любой точки $z_0 \in \Omega$ существует голоморфное отображение $s\colon \omega \to \Omega$ некоторой области $\omega \subset \mathbb{C}$ такое, что композиция $\pi s\colon \omega \to \Sigma$ мономорфна (т. е. разные точки переводит в разные) и $s(\xi_0) = z_0$ для некоторой точки $\xi_0 \in \omega$.

Это условие позволяет ввести на $\Sigma$ структуру римановой поверхности, вообще говоря, не хаусдорфовой. Картами на $\Sigma$ служат отображения $(\pi s)^{-1}$. Будем говорить также, что *отображение $s$ задает карту* на $\Sigma$. Наложим на $\Sigma$ условие

(P) топологическое пространство $\Sigma$ регулярно.

Условие (P) обеспечивает отделимость и паракомпактность $\Sigma$.

Напомним, что на каждом слое слоения $W$ определена система дифференциальных уравнений

$$\beta_{ij} u \equiv \nu_{ij} u + b_{ij} u = 0, \quad \bar{\nu}_{ij} u = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \tag{1.4}$$

где $\nu_{ij} = a_j \partial_i - a_i \partial_j$, $b_{ij} = \partial_i(a_j) - \partial_j(a_i)$ (через $\partial_j$ и $\bar{\partial}_j$ мы обозначаем дифференциальные операторы $\partial/\partial z_j$ и $\partial/\partial \bar{z}_j$ соответственно). Она имеет не более одного линейно независимого решения на каждом листе, а всякое нетривиальное решение нигде не обращается в нуль.

Наложим дополнительное условие

(C) на каждом листе слоения $W$ есть нетривиальное решение системы (1.4).

Это условие выполнено, в частности, если все листы односвязны.

Отметим здесь, что все приведенные факты, равно как и другие используемые нами результаты работы [1], остаются в силе и в случае $a_j \in C^2(\Omega)$.

Определение. Назовем функцию $\varphi \in C^2(\Omega)$ *сильно выпуклой на слоях $W_\sigma$, $\sigma \in \Sigma$, слоения $W$*, если для любых $(p_{ij}) \in \Lambda^2 T^*(\mathbb{C}^n)$ и $(q_{ij}) \in \Lambda^2 T^*(\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющих условиям

$$a_i p_{jk} + a_j p_{ki} + a_k p_{ij} = 0, \quad \bar{a}_i q_{jk} + \bar{a}_j q_{ki} + \bar{a}_k q_{ij} = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n,$$

и векторных полей $\gamma_{ij} \in T^{1,0}(W)$, удовлетворяющих условиям

$$a_i \gamma_{jk} + a_j \gamma_{ki} + a_k \gamma_{ij} = 0,$$

справедливо неравенство

$$\sum \{ p_{ij} \bar{p}_{kl} d^2\varphi(\bar{\gamma}_{ij}, \gamma_{kl}) + 2 \operatorname{Re} q_{ij} \bar{p}_{kl} \gamma_{ij} \gamma_{kl}(\varphi) + q_{ij} \bar{q}_{kl} d^2\varphi(\gamma_{ij}, \bar{\gamma}_{kl}) \} \\ \geq c \sum_{i,j=1}^{n} (|p_{ij}|^2 + |q_{ij}|^2)$$

с некоторым $c > 0$, где $d^2\varphi(\gamma_{ij}, \gamma_{kl})$ обозначает скалярное произведение векторных полей $\gamma_{ij}$ и $\gamma_{kl}$ в метрике, порожденной квадратичной формой $d^2\varphi$ на $T^*(\Omega)$, а суммирование в левой части (как и всюду в дальнейшем, когда отсутствуют индексы суммирования) ведется по индексам $i$, $j$, $k$, $l$ от 1 до $n$.

**Теорема 1.1.** *Пусть $\Omega$ — область в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. Предположим, что каждая компонента римановой поверхности $\Sigma$ некомпактна, в области $\Omega$ существует сильно выпуклая на слоях $W_\sigma$ слоения $W$ функция, $a_j \in C^2(\Omega)$, $f_k$, $\bar\partial_j f_k$, $\partial_i\bar\partial_j f_k \in L^2(\Omega, \mathrm{loc})$ для всех $i$, $j$, $k = 1, \dots, n$, в каждой точке $\Omega$ выполнены условия интегрируемости* (1.1), *условия совместности* (1.2), (1.3), *а также условия* (H), (M), (P) *и* (C). *Тогда система* (0.2) *имеет решение $u \in L^2(\Omega, \mathrm{loc})$ в смысле теории распределений.*

Теорему существования для случая компактной поверхности $\Sigma$ мы сформулируем в конце.

При доказательстве этих теорем будет использована следующая

**Лемма 1.2** [7, 8]. *Пусть $T$ — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения из одного гильбертова пространства $H_1$ в другое $H_2$, и пусть $P$ — замкнутое подпространство в $H_2$, содержащее множество значений $R_T$ оператора $T$. Тогда $P = R_T$ в том и только в том случае, если*

$$\|f\|_{H_2} \le C\|T^* f\|_{H_1}, \quad f \in P \cap D_{T^*}, \tag{1.5}$$

*где $C$ — некоторая константа, $T^*$ — сопряженный оператор, $D_{T^*}$ — его область определения.*

## § 2. Разрешимость в пространствах $L^2(\Omega, \varphi)$

1. Доказательство теоремы 1.1 проведем в два этапа. Первым шагом докажем разрешимость в $L^2(\Omega, \mathrm{loc})$ системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\beta_{ij} u = g_{ij}, \quad \bar\nu_{ij} u = f_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$

которая является следствием системы (0.2), если положить

$$g_{ij} = \partial_j \bar f_i - \partial_i \bar f_j, \quad f_{ij} = \bar a_j f_i - \bar a_i f_j.$$

Для этого нам будут нужны записанные в координатном виде условия интегрируемости и совместности. При выполнении условия (H) соотношения (1.1) можно записать соответственно в виде

$$\begin{gathered} a_i \bar\partial_k(a_j) = a_j \bar\partial_k(a_i), \quad a_l \bar\partial_k(b_{ij}) = b_{ij} \bar\partial_k(a_l), \\ \beta_{ij}(\bar a_k) = 0, \quad a_k b_{ij} + a_i b_{jk} + a_j b_{ki} = 0, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Равенство (1.2) влечет два набора условий:

$$\beta_{ij} g_{kl} - \beta_{kl} g_{ij} - b_{ij} g_{kl} - \partial_k(a_i) g_{jl} + \partial_k(a_j) g_{il} - \partial_l(a_i) g_{kj} + \partial_l(a_j) g_{ki} = 0, \tag{2.3}$$

$$\bar\nu_{ij} f_{kl} - \bar\nu_{kl} f_{ij} - \bar b_{ij} f_{kl} - \overline{\partial_k(a_i)} f_{jl} + \overline{\partial_k(a_j)} f_{il} - \overline{\partial_l(a_i)} f_{kj} + \overline{\partial_l(a_j)} f_{ki} = 0, \tag{2.4}$$

а соотношения

$$\beta_{kl} f_{ij} - \bar\nu_{ij} g_{kl} - \bar b_{ij} g_{kl} + b_{kl} f_{ij} = 0 \tag{2.5}$$

являются следствиями условий (1.3). В обозначениях

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} \beta_{ij} \\ \bar\nu_{ij} \end{pmatrix}_{i,j=1}^{n}, \quad F = \begin{pmatrix} g_{ij} \\ f_{ij} \end{pmatrix}_{i,j=1}^{n}$$

систему (2.1) можно переписать в виде

$$\widetilde{T}u = F. \tag{2.6}$$

Через $[L^2(\Omega, \varphi)]^N$ мы обозначим гильбертово пространство $N$-компонентных вектор-функций с нормой

$$\|f\|_\varphi^2 = \int\limits_\Omega |f|^2 e^{-\varphi}\, dl, \quad \text{где } |f| = |f_1|^2 + \dots + |f_N|^2.$$

В частности, при $N = 1$ получаем гильбертово пространство $L^2(\Omega, \varphi)$.

Оператор $\widetilde{T}$ определяет замкнутый линейный оператор с плотной областью определения

$$T : L^2(\Omega, \varphi) \to [L^2(\Omega, \varphi)]^{2n^2};$$

функция $u \in L^2(\Omega, \varphi)$ принадлежит $D_T$, если вектор-функция $\widetilde{T}u$, определяемая в смысле теории распределений, принадлежит $[L^2(\Omega, \varphi)]^{2n^2}$, и тогда мы полагаем $Tu = \widetilde{T}u$. Замкнутость оператора $T$ следует из того, что дифференцирование — непрерывная операция в теории распределений; плотность области определения вытекает из того, что она содержит $D(\Omega)$ (обозначение для $C_0^\infty(\Omega)$).

Будем применять лемму 1.2 к пространствам $L^2(\Omega, \varphi)$ и $[L^2(\Omega, \varphi)]^{2n^2}$ в качестве $H_1$ и $H_2$ соответственно, оператору $T$ и подпространству $P$ — множеству всех $F \in [L^2(\Omega, \varphi)]^{2n^2}$ таких, что $SF = 0$, где оператор

$$S : [L^2(\Omega, \varphi)]^{2n^2} \to [L^2(\Omega, \varphi)]^{3n^4}$$

каждой вектор-функции $F$ ставит в соответствие вектор-функцию, состоящую из левых частей соотношений (2.3)–(2.5). Тем самым мы хотим доказать, что при надлежащем выборе функции $\varphi$ множество значений оператора $T$ состоит из всех $F \in [L^2(\Omega, \varphi)]^{2n^2}$ таких, что $SF = 0$. Неравенство (1.5) в наших обозначениях примет вид

$$\|F\|_\varphi^2 \le C^2 \|T^*F\|_\varphi^2, \quad F \in D_{T^*} \cap \operatorname{Ker} S. \tag{2.7}$$

Это неравенство достаточно доказать для $F \in [D(\Omega)]^{2n^2}$, так как верна

**Лемма 2.1.** *Пространство $[D(\Omega)]^{2n^2}$ образует плотное подмножество в $D_{T^*} \cap D_S$ по норме графика*

$$F \to \|F\|_\varphi + \|T^*F\|_\varphi + \|SF\|_\varphi.$$

Доказательство этой леммы ничем не отличается от доказательства леммы 5.2.1 из [7], если выбрать фигурирующие там функции $\eta_\lambda \in D(\Omega)$ так, чтобы $|\nu(\eta_\nu)|^2 \le 1$ в $\Omega$, где $\nu = \begin{pmatrix} \nu_{ij} \\ \bar{\nu}_{ij} \end{pmatrix}_{i,j=1}^{n}$.

Итак, пусть $F \in [D(\Omega)]^{2n^2}$. Легко дать явное выражение для оператора $T^*$:

$$T^* f = \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij}(g_{ij}) + \gamma_{ij}(f_{ij})),$$

где $\delta_{ij} = -\bar{\nu}_{ij} + \bar{\nu}_{ij}(\varphi)$, $\gamma_{ij} = -\beta_{ij} + \nu_{ij}(\varphi)$.

Оценим теперь снизу величину $\|T^*F\|^2_\varphi$. Имеем

$$\|T^*F\|^2_\varphi = \sum \int [(\delta_{ij}(g_{ij})\overline{\delta_{kl}(g_{kl})} - \beta_{kl}(g_{ij})\overline{\beta_{ij}(g_{kl})})$$
$$+ (\delta_{ij}(g_{ij})\overline{\gamma_{kl}(f_{kl})} - \bar\nu_{kl}(g_{ij})\overline{\beta_{ij}(f_{kl})}) + (\gamma_{ij}(f_{ij})\overline{\delta_{kl}(g_{kl})} - \beta_{kl}(f_{ij})\nu_{ij}(\overline{g}_{kl}))$$
$$+ (\gamma_{ij}(f_{ij})\overline{\gamma_{kl}(f_{kl})} - \bar\nu_{kl}(f_{ij})\nu_{ij}(\bar f_{kl}))]e^{-\varphi}\, d\lambda + \sum \int (\beta_{kl}(g_{ij})\overline{\beta_{ij}(g_{kl})}$$
$$+ \bar\nu_{kl}(g_{ij})\overline{\beta_{ij}(f_{kl})} + \beta_{kl}(f_{ij})\nu_{ij}(\bar g_{kl}) + \bar\nu_{kl}(f_{ij})\nu_{ij}(\bar f_{kl}))e^{-\varphi}\, d\lambda = \Sigma_1 + \Sigma_2;$$

здесь и далее интегрирование ведется по области $\Omega$.

Преобразуем первую сумму (обозначим ее через $\Sigma_1$). Для этого заметим, что операторы $\delta_{ij}$ и $\gamma_{ij}$ сопряжены операторам $\beta_{ij}$ и $\bar\nu_{ij}$ соответственно в том смысле, что

$$\begin{gathered}\int w_1\overline{\beta_{ij}(w_2)}e^{-\varphi}\, d\lambda = \int \delta_{ij}(w_1)\overline{w}_2 e^{-\varphi}\, d\lambda,\\ \int w_1\nu_{ij}(\overline{w}_2)e^{-\varphi}\, d\lambda = \int \gamma_{ij}(w_1)\overline{w}_2 e^{-\varphi}\, d\lambda, \quad w_1, w_2 \in D(\Omega).\end{gathered} \tag{2.8}$$

Поэтому $\Sigma_1$ равна

$$\sum \int (g_{ij}\overline{[\beta_{ij}, \delta_{kl}](g_{kl})} + g_{ij}\overline{[\beta_{ij}, \gamma_{kl}](f_{kl})}$$
$$+ f_{ij}\overline{[\bar\nu_{ij}, \delta_{kl}](g_{kl})} + f_{ij}\overline{[\bar\nu_{ij}, \gamma_{kl}](f_{kl})})e^{-\varphi}\, d\lambda$$

(через $[\lambda, \gamma]$ мы обозначаем коммутатор дифференциальных операторов $\lambda$ и $\gamma$). Имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{gathered}[\beta_{ij}, \delta_{kl}] = \lambda^1_{ijkl} + \nu_{ij}\bar\nu_{kl}(\varphi) + \bar\nu_{kl}(b_{ij}),\\ [\beta_{ij}, \gamma_{kl}] = \lambda^2_{ijkl} + \nu_{ij}\nu_{kl}(\varphi) + \nu_{kl}(b_{ij}) - \nu_{ij}(b_{kl}),\\ [\bar\nu_{ij}, \delta_{kl}] = \bar\lambda^2_{ijkl} + \bar\nu_{ij}\bar\nu_{kl}(\varphi), \quad [\bar\nu_{ij}, \gamma_{kl}] = \bar\lambda^1_{ijkl} + \bar\nu_{ij}\bar\nu_{kl}(\varphi),\end{gathered} \tag{2.9}$$

где

$$\lambda^1_{ijkl} = -\bar b_{kl}\nu_{ij} + b_{ij}\bar\nu_{kl},$$
$$\lambda^2_{ijkl} = -b_{ij}\nu_{kl} - \partial_k(a_i)\nu_{jl} + \partial_k(a_j)\nu_{il} - \partial_l(a_i)\nu_{kj} + \partial_l(a_j)\nu_{ki}.$$

**Лемма 2.2.** *Для любых индексов $i$, $j$, $k$, $l$ справедливы формулы*

$$\bar\nu_{kl}(b_{ij}) = -\bar b_{kl}b_{ij}, \tag{2.10}$$

$$\int w_1\lambda^2_{ijkl}(w_2)e^{-\varphi}d\lambda$$
$$= \int \big[-w_2\lambda^2_{ijkl}(w_1) + w_1w_2(\lambda^2_{ijkl}(\varphi) + \nu_{ij}(b_{kl}) - \nu_{kl}(b_{ij}))\big]e^{-\varphi}\, d\lambda. \tag{2.11}$$

Доказательство. Допустим, что в данной точке $a_p \neq 0$. Последовательно используя второе и третье равенства (2.2), имеем

$$\bar\nu_{kl}(b_{ij}) = \frac{b_{ij}}{a_p}\bar\nu_{kl}(a_p) = -\frac{b_{ij}\bar b_{kl}a_p}{a_p} = -b_{ij}\bar b_{kl}.$$

Равенство (2.11) устанавливается интегрированием по частям, если показать, что разность между $\lambda^2_{ijkl}$ как комбинацией операторов $\nu_{pq}$ и аналогичной комбинацией операторов $\beta_{pq}$, возникающей в силу второй из формул (2.8), равна $\nu_{ij}(b_{kl}) - \nu_{kl}(b_{ij})$. Указанная разность равна

$$b_{kl}b_{ij} + b_{jl}\partial_k(a_i) - b_{il}\partial_k(a_j) + b_{kj}\partial_l(a_i) - b_{ki}\partial_l(a_j). \tag{2.12}$$

Из последнего соотношения (2.2) следуют равенства

$$-\partial_l(-a_k b_{ij} + a_i\partial_k(a_j) - a_i\partial_j(a_k) - a_j\partial_k(a_i) + a_j\partial_i(a_k)) = 0,$$
$$-\partial_k(a_l b_{ij} + a_i\partial_j(a_l) - a_i\partial_l(a_j) - a_j\partial_i(a_l) + a_j\partial_l(a_i)) = 0.$$

Если здесь раскрыть скобки, сложить с (2.12) и привести подобные члены, то получим требуемое.

Подставим выражения (2.9) в $\Sigma_1$ и слагаемые $g_{ij}\bar b_{ij}\nu_{kl}(\bar g_{kl})$, $g_{ij}\overline{\lambda^2}_{ijkl}(f_{kl})$, $f_{ij}b_{ij}\bar\nu_{kl}(\bar f_{kl})$, возникающие в результате, проинтегрируем по частям с помощью формул (2.8) и (2.11). После приведения подобных членов с использованием (2.10) это дает

$$\begin{aligned}\Sigma_1 = \sum\int\big[&g_{ij}\bar g_{kl}(\bar\nu_{ij}\nu_{kl}(\varphi) + \bar b_{ij}\nu_{kl}(\varphi)) + g_{ij}\bar f_{kl}(\bar\nu_{ij}\bar\nu_{kl}(\varphi) + \overline{\lambda^2}_{ijkl}(\varphi))\\ &+ f_{ij}\bar g_{kl}\nu_{ij}\nu_{kl}(\varphi) + f_{ij}\bar f_{kl}(\nu_{ij}\bar\nu_{kl}(\varphi) + b_{ij}\bar\nu_{kl}(\varphi))\\ &- 2\operatorname{Re}(g_{ij}b_{kl}\bar\beta_{ij}(\bar g_{kl}) - f_{ij}\lambda^2_{ijkl}(\bar g_{kl}) + f_{ij}\bar b_{kl}\nu_{ij}(\bar f_{kl}))\big]e^{-\varphi}\,d\lambda.\end{aligned}$$

Сумма $\bar\nu_{ij}\bar\nu_{kl}(\varphi) + \overline{\lambda^2}_{ijkl}(\varphi)$ равна $\bar\nu_{kl}\bar\nu_{ij}(\varphi)$ в силу доказанного в [1] равенства $[\nu_{ij}, \nu_{kl}] = \lambda^2_{ijkl}$. Далее, заметим, что

$$\sum f_{ij}\lambda^2_{ijkl}(\bar g_{kl}) = \sum[2f_{ij}\partial_i(a_j)\nu_{kl}(\bar g_{kl}) + 4f_{ij}\partial_k(a_i)\nu_{jl}(\bar g_{kl})]$$

в силу равноправности индексов. Следовательно,

$$\begin{aligned}\Sigma_1 = \sum\int L_\varphi e^{-\varphi}\,d\lambda - 2\operatorname{Re}\sum\int[&g_{ij}b_{kl}\bar\beta_{ij}(\bar g_{kl}) + f_{ij}(2\partial_i(a_j)\nu_{kl}(\bar g_{kl})\\ &+ 4\partial_k(a_i)\nu_{jl}(\bar g_{kl}) + \bar b_{kl}\nu_{ij}(\bar f_{kl}))]e^{-\varphi}\,d\lambda = \Sigma_1' + \Sigma_1'',\end{aligned}$$

где

$$L_\varphi = \sum(g_{ij}\bar g_{kl}d^2\varphi(\bar\nu_{ij}, \nu_{kl}) + 2\operatorname{Re} f_{ij}\bar g_{kl}\nu_{ij}\nu_{kl}(\varphi) + f_{ij}\bar f_{kl}d^2\varphi(\nu_{ij}, \bar\nu_{kl})).$$

В равенствах (2.3)–(2.5) члены нулевого порядка перенесем вправо и возведем в квадрат обе части. Затем проинтегрируем полученные равенства и просуммируем по всем индексам от 1 до $n$. В результате получим

$$\begin{aligned}&\sum\int(|\beta_{ij}(g_{kl})|^2 + |\bar\nu_{ij}(f_{kl})|^2 + |\beta_{kl}(f_{ij})|^2 + |\bar\nu_{ij}(g_{kl})|^2\\ &-(1/2)(|G_{ijkl}|^2 + |F_{ijkl}|^2) - |b_{kl}|^2(|g_{ij}|^2 + |f_{ij}|^2) + 2\operatorname{Re} b_{kl}b_{ij}f_{ij}\bar g_{kl})e^{-\varphi}\,d\lambda - \Sigma_2 = 0;\end{aligned}$$

здесь через $G_{ijkl}$ и $F_{ijkl}$ обозначены суммы членов нулевого порядка в равенствах (2.3) и (2.4) соответственно.

Сложим левую часть полученного равенства с $\Sigma_1'' + \Sigma_2$ и выделим полные квадраты:

$$\begin{aligned}\Sigma_1'' + \Sigma_2 = \int\Big[&R - \sum((1/2)(|G_{ijkl}|^2 + |F_{ijkl}|^2) + 2|b_{kl}|^2|g_{ij}|^2\\ &+ 2|f_{ij}|^2(|b_{kl}|^2 + 4n^2|\partial_i(a_j)|^2 + 16n|\partial_k(a_i)|^2) - 2\operatorname{Re} b_{kl}f_{ij}\bar g_{kl})\Big]e^{-\varphi}\,d\lambda;\end{aligned}$$

через $R$ обозначена сумма квадратов. Вторая сумма представляет собой вещественнозначную квадратичную форму относительно $f_{ij}$ и $g_{ij}$, которую можно оценить снизу величиной $-A|F|^2$ с некоторой непрерывной функцией $A$.

Таким образом, если отбросить $R \geq 0$, то получаем оценку

$$\|T^*F\|^2_\varphi \geq \int (L_\varphi - A|F|^2)e^{-\varphi}\, d\lambda, \quad F \in [D(\Omega)]^{2n^2} \cap \operatorname{Ker} S. \tag{2.13}$$

**Теорема 2.3.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда система* (2.1) *имеет решение* $u \in L^2(\Omega, \mathrm{loc})$ *в смысле теории распределений.*

Доказательство. Пусть $\varphi$ — сильно выпуклая на слоях $W$ функция из условия теоремы. Тогда

$$L_\varphi \geq \gamma|F|^2, \quad \gamma > 0.$$

Пусть, далее, $\chi$ — выпуклая возрастающая функция класса $C^\infty$. Заменим функцию $\varphi$ на $\chi(\varphi)$. Имеем

$$L_{\chi(\varphi)} \geq \chi'(\varphi)\gamma|F|^2.$$

Поэтому из (2.13) следует оценка

$$\|T^*F\|^2_{\chi(\varphi)} \geq \int |F|^2(\gamma\chi'(\varphi) - A)e^{-\chi(\varphi)}\, d\lambda, \quad F \in [D(\Omega)]^{2n^2} \cap \operatorname{Ker} S.$$

Если функцию $\chi$ выбрать столь быстро растущей, что

$$\gamma\chi'(\varphi) - A \geq 1, \tag{2.14}$$

то, применяя лемму 2.1, получим неравенство (2.7) с $C = 1$:

$$\|F\|^2_{\chi(\varphi)} \leq \|T^*F\|^2_{\chi(\varphi)}, \quad F \in D_{T^*} \cap \operatorname{Ker} S.$$

Как показывает лемма 1.2, при выполнении последнего неравенства уравнение (2.6) (или, что то же самое, система (2.1)) имеет решение $u \in L^2(\Omega, \chi(\varphi))$ для всякой вектор-функции $F \in [L^2(\Omega, \chi(\varphi))]^{2n^2}$, удовлетворяющей уравнению $SF = 0$. Для завершения доказательства остается заметить, что функцию $\chi$ можно выбрать так, чтобы любая заданная вектор-функция $F \in [L^2(\Omega, \mathrm{loc})]^{2n^2}$ принадлежала $[L^2(\Omega, \chi(\varphi))]^{2n^2}$.

2. Для дальнейших рассуждений нам понадобятся дополнительные сведения из работы [1]. При выполнении условия (C) каждой точке $\sigma \in \Sigma$ соответствует одномерное комплексное пространство $L_\sigma$ решений системы (1.4).

**Предложение 2.4** [1]. *На множестве* $L = \bigcup\limits_\Sigma L_\sigma$ *имеется структура комплексно-аналитического линейного расслоения с базой* $\Sigma$ *и структурным отображением* $\rho : L_\sigma \to \sigma$.

На сечениях $u$ расслоения $L$ определен $\mathbb{R}$-линейный дифференциальный оператор первого порядка $B_\Sigma$, переводящий $u$ в сечение расслоения $L \otimes A^{0,1}$, где $A^{0,1}$ — расслоение дифференциальных форм типа $(0,1)$ на $\Sigma$. В тривиализации указанных расслоений, порожденной отображением $s$, он имеет вид

$$B_s u = \frac{\partial v(\xi)}{\partial \bar\xi}\, d\bar\xi - \sum_{k=1}^n \bar a_k(s(\xi)) \overline{\frac{\partial s_k(\xi)}{\partial \xi}}\, \bar v(\xi)\, d\bar\xi,$$

где $v(\xi) = u(s(\xi))$ — координатное выражение сечения $u$.

Основной результат работы [1] состоит в том, что при выполнении условий совместности и условий интегрируемости глобальная разрешимость системы (0.2) эквивалентна глобальной разрешимости для оператора $B_\Sigma$. Здесь мы напомним прием, позволяющий явно строить решение $u \in L^2(\Omega, \mathrm{loc})$ системы (0.2) при условии, что уравнение

$$B_\Sigma u = f \tag{2.15}$$

имеет решение $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Sigma, L)$ (в смысле теории распределений) для любого $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Sigma, L \otimes A^{0,1})$, где $L^2_{\mathrm{loc}}(\Sigma, \cdot)$ — линейное пространство локально квадратично суммируемых сечений на $\Sigma$.

Зафиксируем открытое множество $G \subset \Sigma$, положим $\Lambda(G) = L^2(\pi^{-1}(G), \mathrm{loc})$, а через $\Pi(G)$ обозначим подпространство в $[L^2(\pi^{-1}(G), \mathrm{loc})]^n$, образованное наборами функций $\{f_k\}$, удовлетворяющими (2.3)–(2.5). Из теоремы 2.3 следует, что определен оператор $B$: $\Lambda(G) \to \Pi(G)$, переводящий функцию $u$ в набор $\{\bar\partial_k u - \overline{a_j u}\}$. Его ядро есть пространство решений системы (0.1) в $\pi^{-1}(G)$, а образ — пространство правых частей системы (0.2), для которых эта система разрешима. Пусть, далее, $\Lambda_0(G)$ — подпространство $\Lambda(G)$, образованное функциями, удовлетворяющими (1.4), а $\Pi_0(G)$ — подпространство $\Pi(G)$, выделенное условиями

$$\bar a_j f_i = \bar a_i f_j, \quad \bar\partial_j f_i = \bar\partial_i f_j, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{2.16}$$

Применяя доказательство предложения 5.8 из [1] с чисто формальными изменениями, можно показать, что определена коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda(G) & \xrightarrow{B} & \Pi(G) \\
\cup & & \cup \\
\Lambda_0(G) & \xrightarrow{B_0} & \Pi_0(G) \\
\wr| & & \wr| \\
L^2_{\mathrm{loc}}(G, L) & \xrightarrow{B_\Sigma} & L^2_{\mathrm{loc}}(G, L \otimes A^{0,1}),
\end{array}$$

где $B_0$ — ограничение $B$.

Возьмем $F \in \Pi(\Sigma)$. Согласно теореме 2.3 существует функция $\tilde u \in \Lambda(\Sigma)$, удовлетворяющая (2.1). Вектор-функция $\widetilde F = F - B\tilde u$ удовлетворяет (2.16), т. е. является элементом $\Pi_0(\Sigma)$. Если уравнение (2.15) разрешимо для всех правых частей $f$, то из диаграммы мы видим, что уравнение $B_0 u = F$ имеет решение $\tilde{\tilde u} \in \Lambda_0(\Sigma)$. Легко видеть, что $u = \tilde u + \tilde{\tilde u}$ — решение системы (0.2).

Задачу разрешимости в $L^2_{\mathrm{loc}}(\Sigma, L)$ уравнения (2.15) мы снова будем решать в пространстве $L^2_\psi(\Sigma, L)$ сечений расслоения $L$, интегрируемых с квадратом по мере $e^{-\psi}\, d\lambda$, где $d\lambda$ — мера Лебега на $\Sigma$, при условии, что $f \in L^2_\psi(\Sigma, L \otimes A^{0,1})$. Чтобы применить лемму 1.2, по оператору $B_\Sigma$ определим, как в п. 1, линейный замкнутый оператор с плотной областью определения

$$T : L^2_\psi(\Sigma, L) \to L^2_\psi(\Sigma, L \otimes A^{0,1}).$$

Превратим фигурирующие здесь пространства в гильбертовы, определив в них скалярное произведение следующим образом. Если $\lambda_{s\tilde s}(\xi)$ — функция перехода в расслоении $L$, то имеет место факторизация

$$|\lambda_{s\tilde s}|^2 = \lambda_s \lambda_{\tilde s}^{-1}, \quad \lambda_s > 0, \quad \lambda_{\tilde s} > 0, \quad \lambda_s \in C^\infty(U_s), \quad \lambda_{\tilde s} \in C^\infty(U_{\tilde s}),$$

где $U_s$ и $U_{\tilde s}$ — области определения карт $(\pi s)^{-1}$ и $(\pi \tilde s)^{-1}$ соответственно. Это следует из того, что пучок $A^*$ ростков положительных функций класса $C^\infty$ тонкий [9, с. 78, 205].

Таким образом, на $U_s \cap U_{\tilde{s}}$ имеет место равенство

$$u_s\bar{v}_s\lambda_s = u_{\tilde{s}}\bar{v}_{\tilde{s}}\lambda_{\tilde{s}}, \quad u_s, v_s \in L^2_\psi(U_s, L), \quad u_{\tilde{s}}, v_{\tilde{s}} \in L^2_\psi(U_{\tilde{s}}, L).$$

Аналогично устанавливается формула

$$\omega_s d\xi \wedge d\bar{\xi} = \omega_{\tilde{s}} d\eta \wedge d\bar{\eta}, \quad \eta = \psi_{s\tilde{s}}(\xi) = (\pi\tilde{s})^{-1}(\pi s)(\xi),$$

где $\omega_s > 0$, $\omega_{\tilde{s}} > 0$, $\omega_s \in C^\infty(U_s)$, $\omega_{\tilde{s}} \in C^\infty(U_{\tilde{s}})$, а $\psi_{s\tilde{s}}$ — связывающее отображение для карт $(\pi s)^{-1}$ и $(\pi\tilde{s})^{-1}$. Тем самым на $\Sigma$ инвариантно определено произведение

$$u_s\bar{v}_s\lambda_s\omega_s\, d\xi \wedge d\bar{\xi}.$$

Положим

$$(u, v)_\psi = \mathrm{Re} \sum_s \int h_s u_s \bar{v}_s \lambda_s \omega_s e^{-\psi}\, d\xi \wedge d\bar{\xi},$$

где $\{h_s\}$ — разбиение единицы, соответствующее покрытию $\{U_s\}$.

В рассматриваемом случае также справедливо утверждение, аналогичное лемме 2.1, поэтому мы можем пока предполагать, что $f = f_s d\xi \in D(U_s, L \otimes A^{0,1})$, где $D(U, \cdot)$ есть подпространство $\Gamma(U, \cdot)$, состоящее из сечений с компактным носителем, лежащим в $U$.

Из равенства

$$\begin{aligned}(T^*f, u)_\psi &= \mathrm{Re} \int T^* f \bar{u} \rho_s e^{-\psi} d\xi \wedge d\bar{\xi} = (f, Tu)_\psi \\ &= \mathrm{Re} \int \bar{u} \left( -\frac{\partial f_s}{\partial \xi} \rho_s - f_s \frac{\partial \rho_s}{\partial \xi} + f_s \rho_s \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \bar{f}_s \bar{a}_s \rho_s \right) e^{-\psi}\, d\xi \wedge d\bar{\xi},\end{aligned}$$

где $\rho_s = \lambda_s \omega_s$, $a_s = \sum\limits_{k=1}^n \bar{a}_k(s(\xi)) \frac{\partial \bar{s_k}(\xi)}{\partial \xi}$, находим

$$T^* f = -\frac{\partial f_s}{\partial \xi} - f_s \rho_s^{-1} \frac{\partial \rho_s}{\partial \xi} + f_s \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \bar{f}_s \bar{a}_s.$$

Совершив некоторые преобразования с использованием интегрирования по частям, мы можем написать

$$\|T^* f\|^2_\psi \geq \int \rho_s |f_s|^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} - \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right| \cdot |a_s| + Q_s \right) e^{-\psi}\, d\xi \wedge\, d\bar{\xi}, \qquad (2.17)$$

где

$$Q_s = |a_s|^2 + \rho_s^{-3} \left| \frac{\partial \rho_s}{\partial \xi} \right|^2 - \rho_s^{-1} \frac{\partial^2 \rho_s}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} - \left| \frac{\partial a_s}{\partial \xi} - \rho_s^{-1} \frac{\partial \rho_s}{\partial \xi} a_s \right|, \quad f \in D(U_s, L \otimes A^{0,1}).$$

**Теорема 2.5.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда уравнение* (2.15) *имеет решение* $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Sigma, L)$ *для любого сечения* $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Sigma, L \otimes A^{0,1})$.

Доказательство. Без уменьшения общности предположим, что поверхность $\Sigma$ связна. Поскольку она еще и некомпактна, то мы можем заключить, что $\Sigma$ есть многообразие Штейна. Хорошо известно [7], что на таких многообразиях существует строго плюрисубгармоническая функция.

Выберем в качестве $\psi$ строго плюрисубгармоническую функцию класса $C^2(\Sigma)$ такую, что

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \bar{\xi}} > m_s, \quad m_s > 0, \quad |a_s| \cdot \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right| < m_s$$

в каждой локальной системе координат.

Пусть $\chi$ — выпуклая возрастающая функция класса $C^\infty(\mathbb{R})$. Рассматривая $\chi(\psi)$ вместо функции $\psi$, из (2.17) получим неравенство

$$\|T^*f\|^2_{\chi(\psi)} \geq \int \rho_s |f_s|^2 \left[ \left( m_s - \left| \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \right| \cdot |a_s| \right) \chi'(\psi) + Q_s \right] e^{-\psi}\, d\xi \wedge d\bar{\xi},$$

$$f \in D(U_s, L \otimes A^{0,1}).$$

Легко подобрать непрерывные на $U_s$ функции $C_s$ так, чтобы имела место оценка

$$2\|T^*f\|^2_{\chi(\psi)} \geq \sum_s \int h_s \rho_s |f_s|^2 \left[ \left( m_s - \left| \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \right| \cdot |a_s| \right) \chi'(\psi) + Q_s - C_s \right] e^{-\psi}\, d\xi \wedge d\bar{\xi},$$

$$f \in D(\Sigma, L \otimes A^{0,1}).$$

Функцию $\chi$ выберем настолько быстро растущей, что при любом $s$ выполняется неравенство

$$\left( m_s - \left| \frac{\partial\psi}{\partial\xi} \right| \cdot |a_s| \right) \chi'(\psi) + Q_s - C_s > 1. \tag{2.18}$$

Тогда применение аналога леммы 2.1 дает нам оценку

$$\|f\|^2_{\chi(\psi)} \leq 2\|T^*f\|^2_{\chi(\psi)}, \quad f \in D_{T^*}.$$

Если $\chi$ удовлетворяет условию (2.18), то лемма 1.2 показывает, что уравнение (2.15) имеет решение $u \in L^2_{\chi(\psi)}(\Sigma, L)$ для всякого сечения $f \in L^2_{\chi(\psi)}(\Sigma, L \otimes A^{0,1})$. Функцию $\chi$ выберем так, чтобы любое заданное сечение $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Sigma, L \otimes A^{0,1})$ принадлежало $L^2_{\chi(\psi)}(\Sigma, L \otimes A^{0,1})$.

Теорема 2.5 и, следовательно, теорема 1.1 доказаны.

В заключение сформулируем фактически уже доказанную теорему, описывающую разрешимость в случае компактной римановой поверхности $\Sigma$.

**Теорема 2.6.** *Пусть $\Omega$ — область в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. Предположим, что риманова поверхность $\Sigma$ компактна, в области $\Omega$ существует сильно выпуклая на слоях $W_\sigma$ функция $\varphi$, $a_j \in C^2(\Omega)$, $f_k$, $\bar{\partial}_j f_k$, $\partial_i \bar{\partial}_j f_k \in L^2(\Omega, \chi(\varphi))$ для всех $i, j, k = 1, \dots, n$, где $\chi$ — произвольная выпуклая возрастающая функция класса $C^\infty$, удовлетворяющая неравенству* (2.14). *Предположим, что выполнены условия* (1.1)–(1.3), *а также условия* (H), (M), (P) *и* (C). *Тогда при выполнении еще конечного числа некоторых линейных условий на правые части $f_j$* (*см. ниже замечание*) *система* (0.2) *имеет решение $u \in L^2(\Omega, \chi(\varphi))$ в смысле теории распределений.*

Замечание. Линейные условия на правые части $f_j$, о которых идет речь в данной теореме, можно записать в виде равенства нулю интегралов от некоторой дифференциальной формы степени 1, коэффициенты которой линейно зависят от функций $f_j$, взятых по базисным циклам $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ римановой поверхности $\Sigma$, где $g$ — род этой поверхности.

### *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Магомедов Г. А., Паламодов В. П.* Обобщенные аналитические функции многих переменных // Мат. сб. 1978. Т. 106, № 4. С. 515–543.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
3. *Koohara A.* Similarity principle of the generalized Cauchy–Riemann equations for several complex variables // J. Math. Soc. Japan. 1971. V. 23. P. 213–249.
4. *Михайлов Л. Г., Абросимов А. В.* О некоторых переопределенных системах уравнений с частными производными // Докл. АН Тадж. ССР. 1971. Т. 14, № 6. С. 9–13.
5. *Михайлов Л. Г., Абросимов А. В.* Обобщенная система Коши — Римана с многими независимыми переменными // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210, № 1. С. 26–29.
6. *Михайлов Л. Г.* Об условиях совместности и многообразии решений обобщенной системы Коши — Римана с многими переменными // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 6. С. 1313–1317.
7. *Хёрмандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
8. *Хёрмандер Л.* Оценки в $L^2$ и теоремы существования для оператора $\bar{\partial}$ // Математика. 1966. Т. 10, № 2. С. 59–116.
9. *Чжень Ш.-Ш.* Комплексные многообразия. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.


*Статья поступила 26 апреля 2001 г.*

*Меджидов Зияудин Гаджиевич*
*Дагестанский гос. университет, математический факультет,*
*кафедра теории функций и функционального анализа,*
*ул. М. Гаджиева, 43а, Махачкала 367001*
`ziya@mail.dgu.ru`