Сибирский математический журнал
Июль—август, 2004. Том 45, № 4

УДК 517.54+517.55

КОМПЛЕКСНАЯ ГЕОМЕТРИЯ УНИВЕРСАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА ТЕЙХМЮЛЛЕРА

С. Л. Крушкаль

Аннотация: Доказано, что все инвариантные расстояния на универсальном пространстве Тейхмюллера совпадают и определяются коэффициентами Грунского естественно возникающих конформных отображений. Этот факт имеет различные важные следствия, в частности получены решения некоторых известных геометрических проблем в комплексном анализе и смежных областях.

Ключевые слова: пространство Тейхмюллера, метрика Тейхмюллера, инвариантные расстояния, метрика Кобаяси, метрика Каратеодори, коэффициенты Грунского, функция Грина, плюрисубгармоническая функция.

Посвящается
Юрию Григорьевичу Решетняку
по случаю его 75-летия

1. Основные теоремы

1.1. Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}$ — это пространство квазисимметрических гомеоморфизмов h единичной окружности, факторизованной по модулю мёбиусовых отображений. Его топология и действительная геометрия определяются метрикой Тейхмюллера, которая регулярным образом возникает при продолжении таких h в единичный круг.

Это пространство естественно появляется в разных областях математики и играет там важную роль. Оно содержит копии пространств Тейхмюллера произвольных римановых поверхностей, которые соответствуют гомеоморфизмам h, согласованным с квазиконформными группами.

Пространство $\mathbf{T}$ наделяется также комплексной структурой комплексного банахова многообразия посредством вложения Берса. В такой модели пространство $\mathbf{T}$ есть ограниченная подобласть комплексного банахова пространства $\mathbf{B}$ гиперболически ограниченных голоморфных в диске

$$\Delta^* = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} : |z| > 1\}$$

функций ψ с нормой $\|\psi\|_{\mathbf{B}} = \sup_{\Delta^*}(|z|^2 - 1)^2|\psi(z)|$. Точки ψ этой области представляют *производные Шварца*

$$S_w = \left(\frac{w''}{w'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2$$

однолистных голоморфных в Δ^* функций f, имеющих квазиконформные продолжения на всю риманову сферу $\hat{\mathbb{C}}$.

Чтобы получить пространство $\mathbf{T}$, рассмотрим банахов шар

$$\mathrm{Belt}(\Delta)_1 = \{\mu \in L_\infty(\mathbb{C}) : \mu|\Delta^* = 0\}. \tag{1.1}$$

Каждый гомеоморфизм $\mu \in \mathrm{Belt}(\Delta)_1$ определяет конформную структуру на круге Δ и на сфере $\widehat{\mathbb{C}}$, т. е. векторное поле инфинитезимальных эллипсов или, что то же, класс конформно эквивалентных римановых метрик $ds^2 = l(z)|dz + \mu\, d\bar{z}|^2$, $l(z) > 0$.

Элементами $\mathrm{Belt}(\Delta)_1$ являются *коэффициенты Бельтрами* квазиконформных отображений $w(z)$. Последние определяются как гомеоморфные решения уравнения Бельтрами $\partial_{\bar{z}} w = \mu \partial_z w$ на $\mathbb{C}$ с обобщенными производными $\partial_z w$, $\partial_{\bar{z}} w \in L_{2,\mathrm{loc}}$.

Величины $k(w) = \|\mu\|_\infty$ и $K(w) = (1 + k(w))/(1 - k(w))$ называют соответственно *дилатацией* и *максимальной дилатацией* отображения w. Обе величины оценивают отклонение от конформности.

Чтобы сделать соответствия $\mu \leftrightarrow w$ и $w|\Delta^* \leftrightarrow S_w$ взаимно однозначными, нормируем решения следующим образом:

$$w|\Delta^*(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots; \quad w(0) = 0. \tag{1.2}$$

Нормированные решения будем обозначать через w^μ.

Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}$ получается из шара (1.1) естественным отождествлением, при котором μ и ν из $\mathrm{Belt}(\Delta)_1$ считаются эквивалентными, если $w^\mu|S^1 = w^\nu|S^1$, $S^1 = \partial\Delta$. Классы эквивалентности будем обозначать через $[\mu]$.

На пространстве $\mathbf{T}$ имеются некоторые естественные полные внутренние метрики. Прежде всего это метрика Тейхмюллера

$$\tau_{\mathbf{T}}(\phi_{\mathbf{T}}(\mu), \phi_{\mathbf{T}}(\nu)) = \frac{1}{2} \inf\{\log K(w^{\mu_*} \circ (w^{\nu_*})^{-1}) : \mu_* \in \phi_{\mathbf{T}}(\mu),\ \nu_* \in \phi_{\mathbf{T}}(\nu)\}, \tag{1.3}$$

где $\phi_{\mathbf{T}}$ — каноническая проекция:

$$\phi_{\mathbf{T}}(\mu) = [\mu] : \mathrm{Belt}(\Delta)_1 \to \mathbf{T}.$$

Эта метрика порождается финслеровой структурой на $\mathbf{T}$ (на самом деле, на его касательном расслоении $\mathscr{T}(\mathbf{T})$), которая определяется по формуле

$$\begin{aligned} &F_{\mathbf{T}}(\phi_{\mathbf{T}}(\mu), \phi'_{\mathbf{T}}(\mu)\nu) \\ &\quad = \inf\bigl\{\|\nu_*(1 - \|\mu\|^2)^{-1}\|_\infty : \phi'_{\mathbf{T}}(\mu)\nu_* = \phi'_{\mathbf{T}}(\mu)\nu;\ \mu \in \mathrm{Belt}(\Delta)_1;\ \nu, \nu_* \in L_\infty(\mathbb{C})\bigr\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

С другой стороны, универсальное пространство Тейхмюллера, как и другие комплексные банаховы многообразия, допускает инвариантные метрики и голоморфные сжатия, плюрисубгармонические функции и соответствующие плюрикомплексные потенциалы.

Обозначим его метрики Каратеодори и Кобаяси через $c_{\mathbf{T}}(\psi_1, \psi_2)$, $d_{\mathbf{T}}(\psi_1, \psi_2)$ соответственно. Эти метрики представляют собой наименьшую и наибольшую полуметрики d на $\mathbf{T}$, сжимаемые при голоморфных отображениях $h : \Delta \to \mathbf{T}$, т. е. $d(h(z'), h(z'')) \le d_\Delta(z', z'')$, где d_Δ — гиперболическая метрика Пуанкаре единичного круга Δ гауссовой кривизны -4. Более детально,

$$c_{\mathbf{T}}(\psi_1, \psi_2) = \sup\{d_\Delta(h(\psi_1), h(\psi_2)) : h \in \mathrm{Hol}(\mathbf{T}, \Delta)\},$$

а $d_{\mathbf{T}}(\psi_1, \psi_2)$ — наибольшая полуметрика d на $\mathbf{T}$, удовлетворяющая неравенству

$$d(\psi_1, \psi_2) \leq \inf\{d_\Delta(0,t) : h(0) = \psi_1 \text{ и } h(t) = \psi_2 \text{ для некоторого } h \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbf{T})\},$$

где $\mathrm{Hol}(X, Y)$ — множество голоморфных отображений комплексного многообразия X в комплексное многообразие Y.

Мы будем также использовать инфинитезимальные метрики Каратеодори и Кобаяси $\mathscr{C}_{\mathbf{T}}(\psi, v)$ и $\mathscr{D}_{\mathbf{T}}(\psi, v)$ на $\mathscr{T}(\mathbf{T}) = \{(\psi, v)\}$, которые определяются соответственно равенствами

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_{\mathbf{T}}(\psi, v) &= \sup\{|dh(\psi)v| : h \in \mathrm{Hol}(\mathbf{T}, \Delta),\ h(\psi) = 0\}, \\ D_T(\psi, v) &= \inf\{|t| : h \in \mathrm{Hol}(\Delta, \mathbf{T}),\ h(0) = \psi,\ dh(0)t = v\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь v — касательный вектор в точке $\psi \in \mathbf{T}$. Что касается теории инвариантных псевдорасстояний на комплексных пространствах, мы отсылаем читателя, например, к [1–3].

1.2. Приведем некоторые главные результаты данной работы, относящиеся к главным метрикам на $\mathbf{T}$.

Теорема 1. *Метрика Каратеодори $c_{\mathbf{T}}$ универсального пространства Тейхмюллера $\mathbf{T}$ совпадает с его метрикой Тейхмюллера $\tau_{\mathbf{T}}$, а следовательно, все инвариантные метрики на $\mathbf{T}$ равны. В частности, для любых двух точек $\psi_1, \psi_2 \in \mathbf{T}$ имеем равенство*

$$c_{\mathbf{T}}(\psi_1, \psi_2) = d_{\mathbf{T}}(\psi_1, \psi_2) = \tau_{\mathbf{T}}(\psi_1, \psi_2) = \inf d_\Delta(h^{-1}(\psi_1), (h^{-1}(\psi_2)), \tag{1.6}$$

где инфимум берется по всем голоморфным отображениям $h : \Delta \to \mathbf{T}$.

Заметим, что равенство $d_{\mathbf{T}} = \tau_{\mathbf{T}}$ есть специальный случай фундаментальной теоремы Родена — Гардинера, которая утверждает, что метрики Тейхмюллера и Кобаяси совпадают на каждом пространстве Тейхмюллера (см., например, [4–6]). Мы получаем независимое довольно простое доказательство этой теоремы для универсального пространства Тейхмюллера.

Мы докажем также инфинитезимальный аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Инфинитезимальная метрика Каратеодори $\mathscr{C}_{\mathbf{T}}$ универсального пространства Тейхмюллера совпадает с финслеровой структурой $F_{\mathbf{T}}(\psi, \xi)$ этого пространства, при этом для любой точки (ψ, ξ) касательного расслоения $\mathscr{T}(\mathbf{T}) \subset \mathbf{T} \times \mathbf{B}$ пространства $\mathbf{T}$ имеем*

$$\mathscr{C}_{\mathbf{T}}(\psi, \xi) = \mathscr{D}_{\mathbf{T}}(\psi, \xi) = F_{\mathbf{T}}(\psi, \xi). \tag{1.7}$$

Доказательство этих теорем существенно опирается на специфические особенности универсального пространства Тейхмюллера и использует модификацию коэффициентных неравенств Грунского. Оно показывает, что на самом деле инвариантные расстояния на $\mathbf{T}$ определяются коэффициентами Грунского подходящих конформных отображений, которые естественным образом связаны с шварцианом $\psi \in \mathbf{T}$.

1.3. В качестве следствия теоремы 1 получается следующий важный результат (см. [7, 8]).

Следствие 1. *Расстояние Тейхмюллера $\tau_{\mathbf{T}}$ является логарифмически плюрисубгармонической функцией, более того, плюрикомплексная (плюрисубгармоническая) функция Грина универсального пространства Тейхмюллера* $\mathbf{T}$ *равна*

$$g_{\mathbf{T}}(\psi_1, \psi_2) = \log \tanh \tau_{\mathbf{T}}(\psi_1, \psi_2) = \log k(\psi_1, \psi_2), \tag{1.8}$$

где $k(\psi_1, \psi_2)$ — *максимальная дилатация квазиконформных отображений, определяющих расстояние Тейхмюллера между точками* ψ_1 *и* ψ_2 *в* $\mathbf{T}$.

Напомним, что плюрикомплексная функция Грина области D в комплексном банаховом пространстве (или на банаховом многообразии) X определяется так:

$$g_D(x, y) = \sup u_y(x) \quad (x, y \in D),$$

где супремум берется по всем плюрисубгармоническим функциям $u_y(x) : D \to [-\infty, 0)$ таким, что

$$u_y(x) = \log \|x - y\| + O(1) \tag{1.9}$$

в некоторой окрестности точки y (полюса функции g_D); здесь $\| \cdot \|$ — норма на X, а остаточный член $O(1)$ ограничен сверху (см., например, [3, 9]).

Обозначив (полу)метрики Каратеодори и Кобаяси области D через c_D и d_D соответственно, получаем

$$\log \tanh c_D(x, y) \le g_D(x, y) \le \log \tanh d_D(x, y);$$

поэтому представление (1.8) является прямым следствием равенства (1.6).

Представление (1.8) обеспечивает следующие свойства функции Грина $g_{\mathbf{T}}$:

(a) $g_{\mathbf{T}}$ симметрична относительно ее аргументов: $g_{\mathbf{T}}(\psi_1, \psi_2) = g_{\mathbf{T}}(\psi_2, \psi_1)$ для каждой пары $\psi_1, \psi_2 \in \mathbf{T}$ (в общем случае такое свойство не выполняется даже для ограниченных областей в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ с вещественно аналитическими границами, см. [10]);

(b) для каждого фиксированного полюса ψ_2 имеем $\lim\limits_{\psi_1 \to \partial \mathbf{T}} g_{\mathbf{T}}(\psi_1, \psi_2) = 0$;

(c) $g_{\mathbf{T}}(\psi_1, \psi_2) = \inf\{g_{\mathrm{Belt}(\Delta)_1}(\mu, \nu) : \phi_{\mathbf{T}}(\mu) = \psi_1,\ \phi_{\mathbf{T}}(\nu) = \psi_2\}$.

Отметим, что функция Грина g_D, остающаяся инвариантной при биголоморфных гомеоморфизмах области D, индуцирует плюрисубгармоническую инвариантную метрику Климека $k_D(x, y)$ на D, принимающую значения между c_D и d_D (см. [3, 11]).

Используя плюрисубгармонические функции, можно определить в области D и другие инвариантные псевдорасстояния, например инфинитезимальные полиметрики Сибони $s_D(x; \xi)$ и Азукавы $a_D(x; \xi)$ соответственно, так что

$$\mathscr{C}_D(x, \xi) \le s_D(x; \xi) \le a_D(x; \xi) \le \mathscr{D}_D(x, \xi)$$

(см., например, [2, 12]). Ввиду теорем 1 и 2 все такие метрики на $\mathbf{T}$ должны совпадать либо с метрикой Тейхмюллера, либо с ее инфинитезимальной формой.

1.4. В следующих разделах мы используем теорему 1 для решения некоторых известных проблем геометрии пространств Тейхмюллера и геометрической теории функций, связанных с квазиконформным продолжением конформных отображений и голоморфной динамикой. Другим приложением указанных выше ключевых результатов является новая характеризация экстремальных квазиконформных отображений, основанная на плюрисубгармоничности. Теорема 1 имеет и различные другие приложения. Мы не приводим их в данной статье.

1.5. Замечание 1. Метрика Каратеодори на пространствах Тейхмюллера исследовалась многими авторами, начиная с [13, 14]. Один из вопросов ставится так: совпадает ли эта метрика с основной метрикой Тейхмюллера? В работах автора [15, 16] утверждается, что для конечномерных пространств $\mathbf{T}(\Gamma)$ ответ на этот вопрос отрицателен. Рассуждения, намеченные во втором доказательстве, содержат пробел. Неизвестно, для каких пространств Тейхмюллера, отличных от $\mathbf{T}$, эти метрики совпадают.

1.6. Замечание 2. В недавних работах [17, 18] установлено, что метрика Каратеодори на комплексных многообразиях в отличие от метрики Кобаяси допускает стягиваемость в более сильной форме. Теорема 1 обеспечивает выполнение такого свойства для универсального пространства Тейхмюллера.

2. Коэффициенты Грунского

Матрица Грунского определена на классах нормированных однолистных функций и служит мощным инструментом в решении многих проблем, исследуемых с привлечением методов геометрической теории функций. Ниже, при доказательстве главных теорем, мы свяжем ее с инвариантными расстояниями на пространстве $\mathbf{T}$.

2.1. Напомним, что для всякого голоморфного отображения

$$f(z) = z + \mathrm{const} + O(|z|^{-1}), \quad z \to \infty,$$

окрестности $V(f)$ бесконечности $z = \infty$ можно определить его матрицу Грунского $\mathscr{G} = (\alpha_{mn})$, элементы которой α_{mn} определяются из разложения

$$\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = - \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} z^{-m} \zeta^{-n} : V(f) \times V(f) \to \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

где берется однозначная ветвь логарифмический функции, которая обращается в нуль при $z = \zeta \to \infty$. Величины α_{mn} называются *коэффициентами Грунского* функции f. Роль $\mathscr{G}$ выявляется критерием однолистности Грунского [19], который утверждает, что $f(z) \neq 0$ допускает инъективное голоморфное продолжение на круг Δ^* тогда и только тогда, когда коэффициенты α_{mn} удовлетворяют неравенствам

$$\left| \sum_{m,n=1}^{\infty} \sqrt{mn}\, a_{mn} x_m x_n \right| \leq \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{1}^{\infty} |x_n|^2 \tag{2.2}$$

для каждой последовательности $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ из гильбертова пространства l^2.

Класс таких $\widehat{\mathbb{C}}$-голоморфных однолистных функций $f : \Delta^* \to \widehat{\mathbb{C}}$ обозначим через Σ, и пусть $\Sigma(k)$ — его подкласс, состоящий из функций, которые имеют k-квазиконформные продолжения $\widehat{w}$ на сферу $\widehat{\mathbb{C}}$ с $\widehat{w}(0) = 0$, т. е. вида (1.2). Тогда можно написать $\alpha_{mn} = \alpha_{mn}(f) = \alpha_{mn}(\psi)$ и, более того, коэффициенты $\alpha_{mn}(\psi)$ зависят от шварцианов $\psi = S_f \in \mathbf{T}$ голоморфно, поскольку каждый α_{mn} есть полином от первых тейлоровских коэффициентов $b_1, \dots, b_p$, $p \leq \min(m, n)$, которые являются голоморфными функциями от ψ.

Определим теперь величину

$$\varkappa(f) = \varkappa(\psi) := \sup \left\{ \left| \sum_{m,n=1}^{\infty} \sqrt{mn}\, \alpha_{mn}(\psi) x_m x_n \right| : \mathbf{x} \in l^2, \ \|\mathbf{x}\| = 1 \right\}, \tag{2.3}$$

которая называется *постоянной Грунского* отображения f.

2.2. Напомним известные результаты, касающиеся связи между функционалом (2.3) и квазиконформными продолжениями однолистных на Δ^* функций.

(a) *Каждая однолистная в Δ^* функция f, допускающая квазиконформное продолжение на $\mathbb{C}$, удовлетворяет неравенству*

$$\varkappa(f) \le k(f), \tag{2.4}$$

где $k(f)$ — наименьшая дилатация среди всех возможных продолжений w^μ функции f; более того, имеются f, для которых это неравенство строгое (см. [20, 21], а также [22] и примеры в разд. 2.7).

(b) *Каждое голоморфное отображение $f : \Delta^* \to \widehat{\mathbb{C}}$ с $\varkappa(f) < 1$ допускает k'-квазиконформное продолжение в круг Δ с дилатациями $k' \ge \varkappa(f)$* (см. [23, гл. 9; 24, с. 82–84]).

(c) Рассмотрим случай, когда неравенство Грунского является одновременно необходимым и достаточным условием для существования k-квазиконформного продолжения.

Следующий результат, установленный в [22, 25], и его обобщение будут играть ключевую роль в доказательстве теорем 1 и 2. Чтобы привести его формулировки, введем некоторые обозначения.

Пусть L — ориентированная замкнутая жорданова кривая на римановой сфере $\widehat{\mathbb{C}}$ с внутренней и внешней областями $D = D(L)$ и $D^* = D^*(L)$. Будем рассматривать функции $\mu \in L_\infty(D)$ и $\varphi \in L_1(D)$ соответственно как $(-1, 1)$-формы Бельтрами и интегрируемые квадратичные дифференциалы с носителями в D и определим для голоморфного отображения g единичного круга Δ в D индуцируемые измеримые формы на Δ:

$$g^*\mu = (\mu \circ g)\overline{g'}/g', \quad g^*\varphi = (\varphi \circ g)(g')^2. \tag{2.5}$$

Это сохраняет инвариантность формы $\mu(z)\varphi(z)\,dxdy$ с точностью до кратности отображения g, то же самое верно и для спаривания

$$\langle \mu, \varphi \rangle_D = \iint\limits_D \mu(z)\varphi(z)\,dxdy.$$

Пусть $A_1(D)$ — подпространство голоморфных функций в $L_1(D)$ и

$$A_1^2(D) = \{\varphi \in A_1(D) : \varphi = \omega^2\} \tag{2.6}$$

(это множество состоит из интегрируемых голоморфных в D функций с нулями четного порядка), и пусть $A_1(D \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$ — подпространство в $L_1(D)$, состоящее из интегрируемых мероморфных функций в области D, которые могут иметь простые полюсы в выделенных точках $a_1, \dots, a_n \in D$ и не имеют других особенностей в D.

Теорема A [22]. *Равенство*

$$\varkappa(f) = \inf\{\|\mu\|_\infty : w^\mu|\Delta^* = f\}$$

выполняется в том и только в том случае, если функция f является ограничением на Δ^* квазиконформного отображения w^{μ_0} сферы $\widehat{\mathbb{C}}$, у которого коэффициенты Бельтрами $\mu_0(z) = \partial_{\bar z} w/\partial_z w$, и удовлетворяет в единичном круге Δ условию

$$\|\mu_0\|_\infty = \sup |\langle \mu_0, \varphi \rangle_\Delta|, \tag{2.7}$$

где супремум берется по всем голоморфным функциям $\varphi \in A_1^2(\Delta)$ *с* $\|\varphi\|_{A_1} = 1$.

Геометрически это означает, что метрика Каратеодори на голоморфном экстремальном диске

$$\Delta_{\mu_0} = \{\phi_{\mathbf{T}}(t\mu_0/\|\mu_0\|) : t \in \Delta\} \tag{2.8}$$

в универсальном пространстве Тейхмюллера $\mathbf{T}$ равна $(1/2)\log[(1+\|\mu_0\|)/(1-\|\mu_0\|)]$ и совпадает с внутренней метрикой Тейхмюллера этого пространства.

2.3. Применив равенство Парсеваля к функциям $\omega(z) = \sum_0^\infty c_k z^k \in L_2(\Delta)$, квадраты которых $\varphi = \omega^2 \in A_1^2(\Delta)$ появляются в (2.7), получаем представление таких φ в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{m+n=2}^{\infty} \sqrt{mn}\, x_m x_n z^{m+n-2} \tag{2.9}$$

с $\mathbf{x} = (x_n) \in l^2$, $\|\mathbf{x}\| = 1$. Это представление также будет использоваться в дальнейшем.

Идея доказательства теоремы A в [22] состоит в том, что коэффициенты Грунского $\alpha_{mn}(\psi)$ порождают голоморфные отображения

$$h_{\mathbf{x}}(\psi) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sqrt{mn}\,\alpha_{mn}(\psi) x_m x_n : \mathbf{T} \to \Delta, \quad \mathbf{x} = (x_n), \tag{2.10}$$

и расстояние Каратеодори $c_{\mathbf{T}}(\mathbf{0}, \psi_0)$ достигается на этих отображениях, как раз когда ψ_0 определяет функцию $f_0 \in \Sigma$ с квазиконформным продолжением, удовлетворяющим равенству (2.7).

Та же идея является определяющей и в доказательствах теорем 1 и 2, которые основаны на распространении теоремы A на голоморфные квадратичные дифференциалы с полюсами нечетных порядков.

2.4. Определим преобразования, сохраняющие классы Σ и $\Sigma(k)$.

Для фиксированного a, $0 < |a| < 1$, рассмотрим конформный автоморфизм

$$\gamma_a(z) = \frac{\bar a}{a}\frac{z+a}{1+\bar a z} \tag{2.11}$$

сферы $\widehat{\mathbb{C}}$; он сохраняет каждый из дисков Δ и Δ^*. Композиция с $f \in \Sigma$ дает

$$f \circ \gamma_a(z) = f\left(\frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{\bar a z}}\right) = f\left(\frac{1}{a}\right) + \left(1 - \frac{1}{|a|^2}\right) f'\left(\frac{1}{a}\right)\frac{1}{z} + \dots .$$

Поэтому преобразование

$$\mathscr{L}_a : f(z) \mapsto f_a(z) = \frac{(1-1/|a|^2)f'(1/a)}{f\circ\gamma_a(z) - f(1/a)} + \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{|a|^2}\right)\frac{f''(1/a)}{f'(1/a)} - \frac{2}{a}\right] + \dots$$
$$= z + \frac{b_{1,a}}{z} + \dots \tag{2.12}$$

оставляет множество Σ инвариантным. Положим

$$\log\frac{f_a(z) - f_a(\zeta)}{z - \zeta} = -\sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn}^a z^{-m}\zeta^{-n}$$

и $\varkappa_a(f) = \varkappa(f_a)$.

Отметим, что, когда f допускает квазиконформное продолжение на $\widehat{\mathbb{C}}$, то же самое верно и для f_a; более того, ввиду конформной инвариантности решений уравнения Бельтрами $\bar{\partial} w = \nu(z)\partial w$ отображения $f \circ \gamma_a$ и f_a имеют одинаковый коэффициент Бельтрами $\gamma_a^* \mu = (\mu \circ \gamma_a)\overline{\gamma_a'}/\gamma_a'$ (равный нулю на Δ^*).

Следующее преобразование имеет вид

$$\mathscr{M} : f(z) \mapsto f_2(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + \frac{b_1}{2z^3} + \ldots \tag{2.13}$$

и определяет нечетную функцию из Σ. Будем использовать обозначения

$$f_{a,2}(z) = \sqrt{f_a(z^2)}, \quad \varkappa_{a,2}(f) = \varkappa(f_{a,2}), \quad \varkappa_{0,2}(f) = \varkappa(f_2).$$

Отметим, что квадратное отображение

$$\mathscr{M}_0 : z \mapsto z^2$$

представляет собой разветвленное голоморфное накрывающее отображение $\widetilde{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, где $\widetilde{\mathbb{C}}$ — двулистная сфера, разветвленная над точками 0 и ∞; это накрытие является неразветвленным над $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Отметим также, что отображение $\mathscr{M} f$ естественно определяется и для каждого $f \in \bigcup\limits_k \Sigma(k)$, поскольку все квазиконформные продолжения $\hat{f}^\mu$ такого f нормированы посредством $\hat{f}^\mu(0) = 0$. Более того, это послойное отображение, т. е. оно коммутирует с проекцией $\mathscr{M}_0$. Ограничение его на один лист поверхности $\widetilde{\mathbb{C}}$ (после выбора ветви квадратного корня согласно (2.13)) дает инъективное квазиконформное отображение самой сферы $\widehat{\mathbb{C}}$. Обозначим полученное таким путем отображение сферы через $f^{\tilde{\mu}}$. Оно удовлетворяет равенству $f^{\tilde{\mu}}(-z) = -f^{\tilde{\mu}}(z)$ для всех z, поэтому является нечетной функцией на $\widehat{\mathbb{C}}$. Коэффициент Бельтрами $\tilde{\mu}$ такого отображения, как показывает прямой подсчет, является четной функцией.

2.5. Согласно общей формуле для неинъективной замены при интегрировании если $u(y) = u(y_1, \ldots, y_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — заданная неотрицательная локально интегрируемая функция, а $g = (g_1, \ldots, g_n)$ — непрерывное отображение ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$ с границей ∂G, имеющей нулевую $(n-1)$-мерную меру Лебега, и g принадлежит пространству Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(G)$, т. е. имеет обобщенные первые частные производные $\partial_{x_k} g_l \in L_{n,\mathrm{loc}}(G)$, то

$$\int\limits_G u \circ g(x) |J_g(x)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y) N(y, g, G)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y) \mu(y, g, G)\, dy. \tag{2.14}$$

Здесь $J_g(x)$ — якобиан отображения g в точке $x \in G$ и $N(y, g, G)$ — кратность отображения g в точке y, определяемая как число точек множества $g^{-1}\{y\} \cap G$ (конечное или бесконечное), а $\mu(y, g, G)$ — топологическая степень отображения g относительно точки x и области G (см. [26; 27, с. 40–50]). Это равенство продолжается стандартным образом на произвольные локально интегрируемые функции u.

Например, в случае квадратного отображения $z \mapsto z_* = z^2$ круга Δ, имеющего кратность $N = 2$ во всех точках, (2.14) дает

$$4 \iint\limits_\Delta u(z^2)|z|^2\, dxdy = 2 \iint\limits_\Delta u(z_*)\, dx_* dy_* \quad (z_* = x_* + iy_*). \tag{2.15}$$

Интеграл в левой части берется по двулистному кругу $\widetilde{\Delta}$ поверхности с краем, имеющей две граничные компоненты, а $z \mapsto z^2$ является накрывающим отображением $\widetilde{\Delta} \to \Delta$, не разветвленным над проколотым кругом $\Delta \setminus \{0\}$.

2.6. Предыдущие преобразования дают характеристику отображений, максимизирующих величину $\varkappa_{a,2}(f)$ на $\Sigma(k)$.

Теорема 3. *Равенство $\varkappa_{a,2}(f) = k(f)$ для $f \in \Sigma$ выполняется в том и только том случае, когда функция f есть ограничение на Δ^* квазиконформного отображения w^{μ_0} сферы $\widehat{\mathbb{C}}$, у которого коэффициент Бельтрами $\mu_0(z)$ удовлетворяет в Δ соотношению*

$$\|\mu_0(z)\|_\infty = \left\|\gamma_a^*\mu_0(z^2)\right\|_\infty = 2\sup\left|\iint\limits_{\Delta} \gamma_a^*\mu_0(z^2)\gamma_a^*\varphi(z^2)|z|^2\, dxdy\right|, \tag{2.16}$$

где точная верхняя граница берется по множеству функций $\varphi \in A_1(\Delta \setminus \{a\})$ таких, что $\gamma_a^*\varphi(z^2)z^2 \in A_1^2(\Delta)$ и

$$\left\|\gamma_a^*\varphi(z^2)z^2\right\|_{A_1(\Delta)} = \frac{1}{2}\|\varphi\|_{A_1(\Delta\setminus\{a\})} = \frac{1}{2}.$$

Множители 2 и $1/2$ появляются в соответствии с кратностью 2 квадратного отображения $z \mapsto z^2$.

Доказательство. Сначала рассмотрим голоморфные квадратичные дифференциалы $\varphi = \varphi(\zeta)d\zeta^2$ с $\varphi \in A_1(\Delta \setminus \{0\})$, имеющие простой полюс в начале координат, т. е. вида

$$\varphi(\zeta) = \sum_{j=-1}^{\infty} d_j\zeta^j. \tag{2.17}$$

Положив $\zeta = h(z) := z^2$, определим квадратичные дифференциалы

$$h^*\varphi(z)dz^2 = \varphi(h(z))h'(z)^2dz^2 = 4(d_{-1} + d_0z^2 + d_1z^4 + d_2z^6 + \dots)dz^2.$$

Обратно, каждый $\varphi \in A_1^2(\Delta)$ может быть представлен в виде $\varphi = h^*\psi$ с $\psi \in A_1(\Delta \setminus \{a\})$.

Предположение, что определяющие функции

$$h^*\varphi(z) = 4(d_{-1} + d_0z^2 + d_1z^4 + \dots)$$

принадлежат $A_1^2(\Delta)$, влечет тот факт, что исходные функции $\varphi(z)$ могут иметь в проколотом круге $\Delta \setminus \{0\}$ нули только четного порядка.

С другой стороны, цепное правило (2.5) для коэффициентов Бельтрами дает, что если f принадлежит $\Sigma(k)$ и поэтому имеет квазиконформные продолжения, то

$$\mu_{f_2}(z) = \mu_{f\circ h}(z) = \mu_f(z^2)\bar{z}/z =: h^*\mu_f,$$

а следовательно,

$$h^*\mu(z)h^*\varphi(z)\, dxdy = \mu(h(z))\varphi(h(z))|h'(z)|^2\, dxdy. \tag{2.18}$$

Сопоставляя это с теоремой А и формулой (2.15), получаем равенство (2.16) для $a = 0$.

В общем случае, когда $h = \mathscr{M} \circ \mathscr{L}_a$, получается равенство, аналогичное (2.18), после чего утверждение теоремы 3 вытекает из тех же самых аргументов.

2.7. Примеры. Пусть

$$f_{[p]}(z) = z\left(1 - \frac{t}{z^p}\right)^{2/p}, \quad z \in \Delta^*,\ p = 2, 3, \dots,\ |t| < 1. \tag{2.19}$$

Каждое отображение $f_{[p]}$ принадлежит $\Sigma(|t|)$ и имеет $|t|$-квазиконформное продолжение на $\overline{\Delta}$ вида

$$\hat{f}_{[p]}(z) = z\left[1 - t\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{p/2}\right]^{2/p}$$

с коэффициентом Бельтрами

$$\mu_{\hat{f}_{[p]}}(z) = t(\bar{z}/z)^{p-2}, \quad |z| \le 1.$$

Для четных p имеем равенство $\varkappa(f_{[p]}) = |t|$ (например, по теореме A), тогда как ситуация для нечетных p совершенно отличная. Именно, согласно [28] и [25] для каждого нечетного $p \ge 3$ имеем строгое неравенство

$$\varkappa(f_{[p]}) < |t| = k(f_{[p]}).$$

Из теоремы 3 следует, что для каждого отображения (2.19) выполняется равенство

$$\varkappa(f_{[p],2}) = k(f_{[p]}) \quad \big(f_{[p],2}(z) = f_{[p]}(z^2)^{1/2}\big).$$

Отметим также, что в случае конформных отображений f диска Δ^* на области с асимптотически конформными границами (т. е. жордановыми кривыми L, удовлетворяющими условию

$$\max_{w \in L(a,b)} \frac{|a-w| + |w-b|}{|a-b|} \to 1 \quad \text{при} \quad |a-b| \to 0,$$

для любой упорядоченной пары (a, b) на L и произвольного w, лежащего между a и b), равенство $\varkappa(f) = \kappa(f)$ необходимо и достаточно для того, чтобы f могло быть продолжено с коэффициентом Бельтрами $\mu = k(f)|\varphi|/\varphi$, $\varphi \in A_1^2(\Delta)$.

В частности, все гладкие кривые асимптотически конформны, однако кусочно гладкие кривые, содержащие углы, не обладают таким свойством.

3. Устранение нулей нечетного порядка

3.1. Как отмечено в п. 2.3, решающий шаг в доказательстве наших основных теорем состоит в устранении нулей нечетного порядка у голоморфных квадратичных дифференциалов. Это нужно для применения техники неравенств Грунского. Такое устранение осуществляется посредством поднятия дифференциала с использованием разветвленного накрытия.

Простейшая ситуация возникает в случае единственного нуля нечетного порядка. Тогда можно применить преобразования (2.12) и (2.13), рассмотренные ранее. Наша конструкция состоит фактически в их обобщении на произвольное конечное число таких нулей и манипулирует всеми нулями одновременно. Мы слегка модифицируем рассуждения, использованные в [29]. Другой алгоритм был применен в [8].

3.2. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ — заданный набор $n \ge 1$ различных точек единичного круга Δ. Предположим сначала, что все a_j отличны от 0.

Перейдем от Δ к верхней полуплоскости $H = \{\zeta : \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ посредством отображения
$$z \mapsto \sigma(z) = i(1+z)/(1-z).$$
Обозначим $\sigma(a_j) = a'_j, \mathbf{a}' = \bigl(a'_1, \dots, a'_n\bigr)$ и заметим, что $\sigma(1/\bar{a}_j) = \bar{a}'_j$.

3.3. Рассмотрим гиперэллиптическую риманову поверхность $X_{\mathbf{a}'}$ (двулистную разветвленную накрывающую сферы $\widehat{\mathbb{C}}$) алгебраической функции, определенной уравнением
$$Z^2 = \bigl(\zeta - a'_1\bigr)\bigl(\zeta - \bar{a}'_1\bigr) \dots \bigl(\zeta - a'_n\bigr)\bigl(\zeta - \bar{a}'_n\bigr).$$
Это замкнутая поверхность рода $n-1$. Переменную ζ можно рассматривать как локальную комплексную координату в окрестности любой точки, отличной от $a'_1, \bar{a}'_1, \dots, a'_n, \bar{a}'_n$, в то время как локальными параметрами в двулистных окрестностях точек ветвления a_j и $\bar{a}'_j$ служат $\sqrt{\zeta - a_j}$ и $\sqrt{\zeta - \bar{a}'_j}$ соответственно. Все эти точки a'_j и $\bar{a}'_j$ являются точками Вейерштрасса поверхности $X_{\mathbf{a}'}$.

Существует мероморфная ($\widehat{\mathbb{C}}$-голоморфная) функция $g_{\mathbf{a}'}$ степени два, отображающая $X_{\mathbf{a}'}$ голоморфно на $\widehat{\mathbb{C}}$. Это означает, что $g_{\mathbf{a}'}$ имеет либо двойной полюс (полюс второго порядка) в одной из точек a'_j, либо два простых полюса в других точках $X_{\mathbf{a}'}$. Функция $g_{\mathbf{a}'}$ определяет голоморфное накрывающее отображение $X_{\mathbf{a}'} \to \widehat{\mathbb{C}}$. Обратное отображение $g_{\mathbf{a}'}^{-1}$ — так называемая *линейно полиморфная* функция. Она имеет кратность два во всех точках сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ и является локальным гомеоморфизмом на проколотой сфере $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigl\{a'_1, \bar{a}'_1, \dots, a'_n, \bar{a}'_n, \bigr\}$. Функция $g_{\mathbf{a}'}$ определена с точностью до дробно-линейного преобразования сферы $\widehat{\mathbb{C}}$. Такое преобразование можно выбрать так, чтобы $g_{\mathbf{a}'}$ сохраняла точки $0, 1$ и ∞ неподвижными.

Мы утверждаем, что так нормированная функция $g_{\mathbf{a}'}$ должна быть вещественной на вещественной оси $\mathbb{R}$. Чтобы это доказать, определим $g^*_{\mathbf{a}'} = \overline{g_{\mathbf{a}'}(\bar{\zeta})}$. Данная функция также мероморфна на $X_{\mathbf{a}}$ и имеет степень два. Кроме того, она оставляет точки 0, 1 и ∞ неподвижными. Отсюда ввиду единственности $g^*_{\mathbf{a}'} = g_{\mathbf{a}'}$.

3.4. Вернувшись назад от H к Δ, получаем соответствующую мероморфную функцию $g_{\mathbf{a}} = \sigma \circ g_{\mathbf{a}'} \circ \sigma^{-1}$, которая определяет разветвленное голоморфное накрывающее отображение $X_{\mathbf{a}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, при этом $g_{\mathbf{a}}(1/\bar{z}) = 1/\overline{g_{\mathbf{a}}(z)}$. Поэтому $g_{\mathbf{a}}^{-1}(\Delta)$ и $g_{\mathbf{a}}^{-1}(\Delta^*)$ представляют собой поверхности с краем, накрывающие диски Δ и Δ^* (с ветвлением над 0 и ∞) соответственно. Алгебраическая функция, определяющая поверхность $X_{\mathbf{a}}$, задается уравнением
$$\mathscr{Z}^2 = (z - a_1)(z - 1/\bar{a}_1) \dots (z - a_n)(z - 1/\bar{a}_n). \tag{3.1}$$
Перенормируем проекцию $g_{\mathbf{a}}$, положив
$$\mathscr{M}_{\mathbf{a}}(z) = \frac{g_{\mathbf{a}}(z) - g_{\mathbf{a}}(0)}{1 - \overline{g_{\mathbf{a}}(0)} g_{\mathbf{a}}(z)}. \tag{3.2}$$
Полученное отображение обладает следующими свойствами: $\mathscr{M}_{\mathbf{a}}$ — мероморфное накрывающее отображение $X_{\mathbf{a}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ с точками ветвления $a_1, \frac{1}{\bar{a}_1}, \dots, a_n, \frac{1}{\bar{a}_n}$, при этом $|\mathscr{M}_{\mathbf{a}}(e^{i\theta})| = 1$ для всех $\theta \in [0, 2\pi]$ и
$$\mathscr{M}_{\mathbf{a}}(z) = \begin{cases} z + O(z) & \text{при } z \to 0, \\ z + O(1/z) & \text{при } z \to \infty. \end{cases} \tag{3.3}$$

В окрестностях точек ветвления $a_j \in X_{\mathbf{a}}$ имеем разложения

$$\mathscr{M}_{\mathbf{a}}(z) - \mathscr{M}_{\mathbf{a}}(a_j) = \sum_{m=1}^{\infty} d_{m,j}(z-a_j)^{2m}. \tag{3.4}$$

3.5. Предположим теперь, что точки $a_1, \ldots, a_n$ являются нулями нечетного порядка заданного интегрируемого голоморфного квадратичного дифференциала φ в Δ. Рассмотрим соответствующий квазиконформный гомеоморфизм $f^{k\mu_0} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ в $\Sigma(k)$ с коэффициентом Бельтрами

$$\mu_0(z) = \begin{cases} k|\varphi(z)|/\varphi(z), & z \in \Delta, \\ 0, & z \in \Delta^*. \end{cases}$$

Подняв это отображение на накрывающую поверхность $X_{\mathbf{a}}$ с помощью проекции $\mathscr{M}_{\mathbf{a}}$, получим два-один квазиконформное отображение

$$f^{\tilde{\mu}_0} = f_0^{\mu} \circ \mathscr{M}_{\mathbf{a}}(z) : X_{\mathbf{a}} \to \widehat{\mathbb{C}}$$

с коэффициентом Бельтрами

$$\tilde{\mu}_0 = k\frac{\left|\mathscr{M}_{\mathbf{a}}^*(\varphi)\right|}{\mathscr{M}_{\mathbf{a}}^*(\varphi)} \tag{3.5}$$

на двулистном диске $\mathscr{M}_{\mathbf{a}}^{-1}(\Delta) \subset X_{\mathbf{a}}$, накрывающем Δ, такое, что его ограничение на окрестности бесконечно удаленных точек на обоих листах поверхности $X_{\mathbf{a}}$ имеет вид

$$f^{\mu_0} \circ \mathscr{M}_{\mathbf{a}}(z) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots. \tag{3.6}$$

Обозначим $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n; 1/\bar{a}_1, \ldots, 1/\bar{a}_n) = (a_j; 1/\bar{a}_j)$ и

$$f^{\mu} \circ \mathscr{M}_{\mathbf{a}}(a_j) = A_j(\mu), \quad f^{\mu} \circ \mathscr{M}_{\mathbf{a}}(1/\bar{a}_j) = A_{n+j}(\mu),\ j = 1, \ldots, n;$$
$$\mathbf{A}(\mu) = (A_1(\mu), \ldots, A_{2n}(\mu)).$$

Мы построим для каждого $f^{\mu} \in \Sigma(k)$ соответствующее накрывающее послойное отображение

$$F_{\mathbf{a},\mathbf{A}}^{\tilde{\mu}} = \mathscr{M}_{\mathbf{A}}^{-1} \circ f^{\tilde{\mu}_0} \circ \mathscr{M}_{\mathbf{a}} : X_{\mathbf{a}} \to X_{\mathbf{A}(\mu)} \quad (\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mu)) \tag{3.7}$$

такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathbf{a}} & \xrightarrow{F_{\mathbf{a},\mathbf{A}}^{\tilde{\mu}}} & X_{\mathbf{A}(\mu)} \\ {\scriptstyle \mathscr{M}_{\mathbf{a}}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{M}_{\mathbf{A}}} \\ \widehat{\mathbb{C}} & \xrightarrow{f^{\mu}} & \widehat{\mathbb{C}} \end{array} \tag{3.8}$$

коммутативна.

Каждое накрывающее отображение (3.7), будучи согласованным с обеими проекциями $\mathscr{M}_{\mathbf{a}}$ и $\mathscr{M}_{\mathbf{A}}$, имеет гомеоморфное ограничение (сечение) на каждый лист накрывающей поверхности $X_{\mathbf{a}}$. Возьмем такое сечение, выбрав ветви корней в окрестностях всех точек a_j в соответствии с (3.6). Оно определяется сначала для неразветвленного накрытия над $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, 1/\bar{a}_1, \ldots, a_n, 1/\bar{a}_n\}$, а затем продолжается по непрерывности на $\widehat{\mathbb{C}}$. Сохраним для этого сечения то же самое обозначение $F_{\mathbf{a},\mathbf{A}}^{\mu}$.

Из (3.3) и (3.6) вытекает, что

$$F^{\tilde{\mu}}_{\mathbf{a},\mathbf{A}}(z) = z + O(1/z) \quad \text{при } z \to \infty,$$

а значит, данное сечение определяет отображение, принадлежащее $\Sigma(k)$.

3.6. Теперь наша цель — установить, что накрывающие отображения (3.7) зависят голоморфно от варьируемых комплексных параметров $\mathbf{A}(\mu)$. Для этого мы покажем, что их производные Шварца

$$S_{F^{\tilde{\mu}}_{\mathbf{a},\mathbf{A}}}(z), \quad z \in \Delta^*,$$

являются голоморфными функциями этих параметров.

Лемма 1. *Для фиксированного вектора* $\mathbf{a} = (a_j; 1/\bar{a}_j)$ *соответствующие векторы* $\mathbf{A}(\mu) = (f^\mu \circ \mathscr{M}_\mathbf{a}(a_j); f^\mu \circ \mathscr{M}_\mathbf{a}(1/\bar{a}_j))$ *зависят голоморфно от шварцианов* S_{f^μ} *отображений* $f^\mu \in \bigcup\limits_k \Sigma(k)$.

Доказательство следует из известных свойств квазиконформных отображений и цепного правила для производных Шварца

$$S_{f^\mu \circ \mathscr{M}_\mathbf{a}} = (S_{f^\mu} \circ \mathscr{M}_\mathbf{a})(\mathscr{M}'_\mathbf{a})^2 + S_{\mathscr{M}_\mathbf{a}}.$$

Последнее равенство показывает, что если $\mathbf{a}$ (а вместе с ним и $\mathscr{M}_\mathbf{a}$) фиксировано и S_{f^μ} пробегает область в банаховом пространстве шварцианов, то $S_{f^\mu \circ \mathscr{M}_\mathbf{a}}$ изменяется голоморфно вместе с S_{f^μ}.

С другой стороны, отображение $\mu \to S_{w^\mu} : \mathrm{Belt}(\Delta)_1 \to \mathbf{T}$ имеет локальные голоморфные сечения, т. е. каждая точка $S_{f_0} \in \mathbf{T}$ имеет окрестность $\{\|S_f - S_{f_0}\|_\mathbf{B} < \varepsilon\} \subset \mathbf{T}$ такую, что (конформные) ограничения $f|\Delta^*$ допускают такие квазиконформные продолжения f^μ на $\widehat{\mathbb{C}}$, что их коэффициенты Бельтрами μ голоморфны по S_f. Это определяет голоморфные функции $\mu \mapsto f^\mu(z)$ на единичном шаре $L_\infty(\mathbb{C})_1$ пространства $L_\infty(\mathbb{C})$ со значениями в $\mathbb{C}$, когда $z \in \mathbb{C}$ фиксировано, или даже для z из множеств, компактных в сферической метрике на $\widehat{\mathbb{C}}$. В частности,

$$\mathbf{A}(\mu) = (f^\mu \circ \mathscr{M}_\mathbf{a}(a_j); f^\mu \circ \mathscr{M}_\mathbf{a}(1/\bar{a}_j)) \tag{3.9}$$

также голоморфная вектор-функция от обоих аргументов $\psi(\mu) := S_{f^\mu} \in \mathbf{T}$ и $\mu \in L_\infty(\mathbb{C})_1$.

Лемма 2. *Для фиксированного вектора* $\mathbf{a}$ *линейно полиморфные функции* $\mathscr{M}^{-1}_\mathbf{A}(z)$ *зависят голоморфно от векторного параметра* $\mathbf{A}$ *(при z фиксированном).*

Доказательство. Униформизируем поверхность $X_\mathbf{a}$ конечно порожденной фуксовой группой $\Gamma_\mathbf{a}$ первого рода и без кручения, действующей разрывно на Δ и Δ^*. Тогда фактор-пространство $\widetilde{X}_\mathbf{a} = \Delta/\Gamma_\mathbf{a}$ есть риманова поверхность, конформно эквивалентная $X_\mathbf{a}$. Далее, рассмотрим пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_{n-1} = \mathbf{T}(X_\mathbf{a}) \subset \mathbb{C}^{3n-6}$ для замкнутых римановых поверхностей рода $g = n-1$ с базисной точкой $X_\mathbf{a}$ и соответствующую кривую Тейхмюллера V_{n-1} (голоморфное семейство поверхностей рода $g = n-1$, содержащее начальную поверхность $X_\mathbf{a}$) с голоморфной проекцией

$$\pi : V_{n-1} \to \mathbf{T}_{n-1},$$

так что $\pi^{-1}(\mathbf{0}) = X_\mathbf{a}$ (детали см., например, в [30]).

Согласно известным свойствам гиперэллиптических поверхностей дифференциалы

$$\omega_m = \frac{\zeta^m d\zeta}{\sqrt{\prod\limits_{j=1}^{2n}(\zeta - \zeta(P_j))}}, \quad m = 0, 1, \ldots, n-2,$$

где $\zeta = \widetilde{\mathscr{M}_{\mathbf{a}}}(P)$ — мероморфная функция $\widetilde{X}_{\mathbf{a}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ степени два, определяющая поверхность $\widetilde{X}_{\mathbf{a}}; P_1, \ldots, P_{2n},$ — точки Вейрштрасса поверхности $\widetilde{X}_{\mathbf{a}}$ (соответствующие точкам a_j и $1/\bar{a}_j$), образуют базис пространства абелевых дифференциалов первого рода на $\widetilde{X}_{\mathbf{a}}$ (см., например, [31, разд. III.7]). Поэтому $\widetilde{\mathscr{M}_{\mathbf{a}}}$ можно представить, например, в виде

$$\widetilde{\mathscr{M}_{\mathbf{a}}}(P) = \frac{\omega_1(P)}{\omega_0(P)}. \tag{3.10}$$

На основании известной теоремы Берса [32] существуют голоморфные функции

$$\Omega_1(\tau, P), \ldots, \Omega_{n-1}(\tau, P)$$

на V_{n-1} такие, что их ограничения на каждую поверхность $\widetilde{X}(\tau) = \pi^{-1}(\tau)$ образуют базис для пространства абелевых дифференциалов первого рода на $\widetilde{X}(\tau)$; в частности,

$$\Omega_m|\pi^{-1}(\mathbf{0}) = \omega_m, \quad m = 0, \ldots, n-2.$$

Следовательно, функция (3.10) имеет мероморфное продолжение $M(\tau, P)$ на V_{n-1}. Можно считать его мероморфным продолжением начальной проекции $\mathscr{M}_{\mathbf{a}}$.

Гиперэллиптические поверхности образуют в $\mathbf{T}_{n-1}$ комплексно аналитическое подмногообразие H_{n-1} (в общем случае несвязное). Рассмотрим ограничение полученной функции на гиперэллиптические поверхности $\widetilde{X}(\tau)$, лежащие в некоторой окрестности U_0 базисной точки $\widetilde{X}(\mathbf{0}) = \widetilde{X}_{\mathbf{a}}$; оно имеет вид

$$M(\tau, P) = \frac{\Omega_1(\tau, P)}{\Omega_0(\tau, P)}$$

и зависит $\widehat{\mathbb{C}}$-голоморфно от точек $\tau \in \mathbf{T}_{n-1}$. Поскольку координаты $\mathbf{A}(\mu)$, определенные посредством (3.9), задают на $H_{n-1} \cap U_0$ комплексную структуру, которая эквивалентна стандартной комплексной структуре на $\mathbb{C}^{3n-6}$, получаем, что начальная проекция $\mathscr{M}_{\mathbf{A}}(Z)$ голоморфна по $\mathbf{A}$ для каждого фиксированного $Z \in M_{\mathbf{A}}$.

Используя еще соотношения между тейлоровскими коэффициентами голоморфной локально инъективной функции и обратной функции, заключаем, что каждая ветвь обратного отображения $\mathscr{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(z)$ обладает таким же свойством голоморфности. Это завершает доказательство леммы 2.

С точки зрения теории дифференциальных уравнений линейно полиморфные функции представляют собой отношения решений линейных уравнений второго порядка (связанные с нелинейным уравнением Шварца) с алгебраическими коэффициентами на варьируемых замкнутых римановых поверхностях, зависящих голоморфно от комплексных параметров. Лемма 2 устанавливает, что ветви решений (при подходящей нормировке) движутся голоморфно вместе с этими параметрами при фиксированном z (на самом деле, на компактах, не задевающих особые точки коэффициентов определяющих дифференциальных уравнений).

3.7. Применив леммы 1 и 2 к нашим отображениям $F^{\tilde{\mu}}_{\mathbf{a},\mathbf{A}}$, получим, что шварцианы $S_{F^{\tilde{\mu}}_{\mathbf{a},\mathbf{A}}} \in \mathbf{T}$ также являются голоморфными функциями от $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3n-6}$. Значит, они зависят голоморфно и от шварцианов S_{f^μ}. Поэтому коэффициенты Тейлора $b_n\bigl(F^{\tilde{\mu}}_{\mathbf{a},\mathbf{A}}\bigr)$ и Грунского $\alpha_{mn}\bigl(F^{\tilde{\mu}}_{\mathbf{a},\mathbf{A}}\bigr)$ данных отображений также изменяются голоморфно вместе с S_{f^μ}. В частности, для исходного $\mu = \mu_0$ получаем, что коэффициент Бельтрами соответствующего отображения $F^{\tilde{\mu}_0}_{\mathbf{a},\mathbf{A}} \in \Sigma(k)$ совпадает с (3.5). С другой стороны, ввиду (3.4) все нули определяющего его квадратичного дифференциала $\mathscr{M}^*_{\mathbf{a}}(\varphi)$, накрывающего φ, которые лежат в круге Δ, имеют нули только четных порядков.

3.8. Теперь рассмотрим исключенный выше случай, когда одна из точек a_j, скажем a_1, равна 0. В этом случае бесконечно удаленная точка $z = \infty = 1/\bar{a}_1$ также становится точкой разветвления накрывающей римановой поверхности $X_{\mathbf{a}}$. Равенство (3.1) принимает теперь вид

$$Z^2 = z(z - a_2)(z - 1/\bar{a}_2)\dots(z - a_{n-1})(z - 1/\bar{a}_{n-1}).$$

Соответственно этому мероморфная проекция $\mathscr{M}_{\mathbf{a}} : X_{\mathbf{a}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ имеет в точке $z = \infty$ двойной полюс.

Все это не отражается на основных рассуждениях, примененных выше. Они остаются в силе после простых модификаций. Например, теперь вместо (3.3) асимптотика функции $\mathscr{M}_{\mathbf{a}}$ имеет вид

$$\mathscr{M}_{\mathbf{a}}(z) = O(z^2) \quad \text{при } z \to 0; \quad \mathscr{M}_{\mathbf{a}}(z) = cz^2 + O(1/z) \quad \text{при } z \to \infty.$$

4. Доказательство теорем 1 и 2

Прежде чем приступить к доказательству, напомним характеристическое свойство экстремальных коэффициентов Бельтрами, которое будет существенно использоваться в дальнейшем.

Элемент μ_0 из шара $\mathrm{Belt}(\Delta)_1$ называется *экстремальным*, если

$$\tau_{\mathbf{T}}(\phi_{\mathbf{T}}(\mu_0), \mathbf{0}) = K(w^{\mu_0}) = d_\Delta(\|\mu_0\|_\infty, \mathbf{0}), \tag{4.1}$$

и *локально* (инфинитезимально) *экстремальным*, если

$$F_{\mathbf{T}}(\mathbf{0}, \phi'_{\mathbf{T}}(\mathbf{0})\mu_0) = \|\mu_0\|_\infty. \tag{4.2}$$

Такие дифференциалы полностью описываются следующем теоремой.

Теорема B (Хемилтон, Крушкаль, Райх, Штребель). *Элемент $\mu_0 \in \mathrm{Belt}(\Delta)_1$ экстремален тогда и только тогда, когда*

$$\sup\{|\langle\mu_0, \varphi\rangle_\Delta| : \varphi \in A_1(\Delta), \|\varphi\| = 1\} = \|\mu_0\|_\infty. \tag{4.3}$$

Равенство (4.3) *необходимо и достаточно для того, чтобы μ_0 был локально экстремальным.*

Доказательство см., например, в [5, 6, 33–35]. Каждый элемент $t\mu_0$ с $|t| < \|\mu_0\|_\infty$ экстремален одновременно с μ_0.

Следующий результат представляет собой частный случай общей теоремы Берса об L_1-аппроксимации (см. [36]). Мы используем его только для $D = \Delta$ (ср. [33, с. 124–129]).

Предложение 1. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$. Тогда для каждой функции $\varphi \in A_1(D)$ существует последовательность рациональных функций r_j с простыми полюсами на границе ∂D, не имеющих других особенностей, такая, что*

$$\lim_{j\to\infty} \iint\limits_D |\varphi(z) - r_j(z)|\, dxdy = 0.$$

Теперь докажем одновременно обе теоремы 1 и 2.

Шаг 1. Сначала докажем эти теоремы для $\psi_1 = \mathbf{0}$. Пусть $\psi_0 \in \mathbf{B}$ — точка из $\mathbf{T}$. Имеется единственная однолистная функция $f_0 \in \Sigma$ такая, что $S_{f_0} = \psi_0$, которая допускает квазиконформное продолжение w^μ на $\widehat{\mathbb{C}}$ и потому принадлежит классам $\Sigma(k)$ при некоторых $k < 1$.

Пусть μ_0 — экстремальный коэффициент Бельтрами для f_0, т. е. $\|\mu_0\|_\infty = k(f_0)$. Ввиду (4.3) для μ_0 существует максимизирующая последовательность $\{\varphi_p\} \subset A_1(\Delta)$ такая, что

$$\|\mu_0\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \Big| \iint\limits_\Delta \mu_0(z)\varphi_p(z)\, dxdy \Big|. \tag{4.4}$$

Положив

$$\tilde{\mu}_0 = \frac{\mu_0}{\|\mu_0\|_\infty} = \frac{\mu_0}{k(f_0)},$$

можно переписать неравенство (4.4) в виде

$$\lim_{p\to\infty} \Big| t \iint\limits_\Delta \tilde{\mu}_0(z)\varphi_p(z)\, dxdy \Big| = |t|, \quad |t| \le \frac{1}{k(f_0)}.$$

Для каждого φ_p по предложению 1 можно найти рациональную функцию r^*_{p,j_p} с простыми полюсами на единичной окружности S^1 и без других особенностей, удовлетворяющую неравенству

$$\iint\limits_\Delta \big|\varphi_p(z) - r^*_{p,j_p}(z)\big|\, dxdy < \frac{1}{p}.$$

Поскольку $\|\varphi_p\|_{A_1(\Delta)} = 1$, заключаем, что $\big\|r^*_{p,j_p}\big\|_{A_1(\Delta)} = 1 + O(1/p)$ при $p \to \infty$. Нам будет удобнее оперировать функциями

$$\tilde{r}_{p,j_p}(z) = \frac{r^*_{p,j_p}(z)}{\big\|r^*_{p,j_p}\big\|_{A_1(\Delta)}},$$

которые удовлетворяют соотношениям $\|\tilde{r}_{p,j_p}\|_{A_1(\Delta)} = 1$ и $\|\varphi_p - \tilde{r}_{p,j_p}\|_{A_1(\Delta)} = O(1/p)$, $p = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\lim_{p\to\infty} \Big| t \iint\limits_\Delta \tilde{\mu}_0(z)\tilde{r}_{p,j_p}(z)\, dxdy \Big| = |t|. \tag{4.5}$$

Если последовательность $\{\tilde{r}_{p,j_p}\}$ содержит бесконечную подпоследовательность функций, имеющих в Δ нули только четного порядка, то утверждения теорем 1 и 2 следуют из теоремы A после применения тех же самых рассуждений. Поэтому доказательство сводится к исследованию случая, когда каждая функция $\tilde{r}_{p,j_p}$ имеет в Δ нули только нечетных порядков. Обозначим эти нули через $a_1, \dots, a_{s(p)}$ $(s(p) < \infty)$.

Если каждая $\tilde{r}_{p,j_p}$ имеет в Δ единственный нуль a_p нечетного порядка, то можно применить преобразование $\mathscr{M} \circ \mathscr{L}_{a_1}$. Это даст квадратичные дифференциалы $r_{p,j_p} dz^2$ с нулями четного порядка, накрывающие $\tilde{r}_{p,j_p}(z) dz^2$ соответственно. Тогда утверждение теоремы 1 получается как предельный случай теоремы A, примененной к отображениям f^{μ_p} с $\mu_p(z) = k(f_0)|r_{p,j_p}(z)|/r_{p,j_p}(z)$ при $p \to \infty$.

В общем случае (включающем и указанные выше специальные случаи) мы преобразуем каждую $\tilde{r}_{p,j_p}(z)$ посредством (2.6), применив алгоритм, указанный в предыдущем параграфе. Он дает накрывающие квадратичные дифференциалы

$$r_{p,j_p}(z; \mathbf{a}) = \mathscr{M}_{\mathbf{a}}^* \tilde{r}_{p,j_p}(z; \mathbf{a}) \tag{4.6}$$

с нулями только четного порядка в Δ. Эти дифференциалы принадлежат $A_1^2(\Delta)$ и потому представляются в виде

$$r_{p,j_p}(z; \mathbf{a}) = \omega_p^2(z; \mathbf{a}) = \frac{1}{\pi} \sum_{m+n=2}^{\infty} \sqrt{mn}\, x_m^{(p)}(\mathbf{a}) x_n^{(p)}(\mathbf{a}) z^{m+n-2} \tag{4.7}$$

с $\big(x_n^{(p)}(\mathbf{a})\big) \in l^2$. После нормировки $\sum\limits_1^\infty |x_n^{(p)}(\mathbf{a})|^2 = 1$ получаем равенство (ср. с (2.15))

$$\iint\limits_\Delta |r_{p,j_p}(z; \mathbf{a})| \, dxdy = \iint\limits_\Delta |\tilde{r}_{p,j_p}(z)| \, dxdy = 1. \tag{4.8}$$

Применив теперь ту же самую хирургию $\mu \mapsto \mathscr{M}_{\mathbf{a}}^*$ ко всем элементам $\mu \in \mathrm{Belt}(\Delta)_1$, получим согласно (3.8) коэффициенты Бельтрами

$$\mu^{\mathbf{a}} = \mathscr{M}_{\mathbf{a}}^*(\mu) = (\mu \circ \mathscr{M}_{\mathbf{a}}) \overline{\mathscr{M}_{\mathbf{a}}'} / \mathscr{M}_{\mathbf{a}}'.$$

Это определяет линейное отображение

$$\mathscr{P}_{\mathbf{a}}^* : \mu \mapsto \mathscr{M}_{\mathbf{a}}^*(\mu) : L_\infty(\Delta) \to L_\infty(\Delta), \tag{4.9}$$

сохраняющее норму. В частности, экстремальный μ_0 определяет коэффициент Бельтрами $\mathscr{M}_{\mathbf{a}}^*(\mu_0) = \mu_0^{\mathbf{a}}$, удовлетворяющий равенству

$$\big\| t \mathscr{M}_{\mathbf{a}}^*(\tilde{\mu}_0) \big\|_\infty = \| t \tilde{\mu}_0 \|_\infty = |t|, \quad t \in \Delta. \tag{4.10}$$

Отображение $\mathscr{P}_{\mathbf{a}}^*$ индуцирует голоморфную биекцию

$$\psi \mapsto \mathscr{P}_{\mathbf{a}}(\psi) = \phi_{\mathbf{T}}(\mathscr{L}_{\mathbf{a}}^*(\mu)) : \mathbf{T} \to \mathbf{T} \tag{4.11}$$

такую, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Belt}(\Delta)_1 \arrow[r, "\mathscr{P}_{\mathbf{a}}^*"] \arrow[d, "\phi_{\mathbf{T}}"'] & \mathrm{Belt}(\Delta)_1 \arrow[d, "\phi_{\mathbf{T}}"] \\ \mathbf{T} \arrow[r, "\mathscr{P}_{\mathbf{a}}"] & \mathbf{T} \end{tikzcd} \tag{4.12}$$

коммутативна.

Теперь мы имеем следующую последовательность голоморфных отображений:

$$h_{\mathbf{x},\mathbf{a};p}(\psi) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sqrt{mn}\, \alpha_{mn}(\mathscr{P}_{\mathbf{a}}(\psi)) x_m^{(p)}(\mathbf{a}) x_n^{(p)}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{x} = \big(x_n^{(p)}(\mathbf{a})\big), \quad p = 1, 2, \dots, \tag{4.13}$$

универсального пространства Тейхмюллера $\mathbf{T}$ в единичный круг Δ. Возьмем их поднятия

$$\hat{h}_{\mathbf{x},\mathbf{a};p}(\mu) = h_{\mathbf{x},\mathbf{a};p} \circ \phi_{\mathbf{T}}(\mu) : \mathrm{Belt}(\Delta)_1 \to \Delta$$

на шар $\mathrm{Belt}(\Delta)_1$ согласно диаграмме (4.12) и ограничим поднятие отображения на диск $\{\mu = t\tilde{\mu}_0\}$. Тогда из леммы Шварца вытекает неравенство

$$|\hat{h}_{\mathbf{x},\mathbf{a};p}(t\tilde{\mu}_0)| \le |t|. \tag{4.14}$$

С другой стороны, применение стандартной вариационной формулы для отображений $w^\nu \in \Sigma(k)$ приводит к равенству

$$\alpha_{mn}(\phi_{\mathbf{T}}(\nu)) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Delta} \nu(z) z^{m+n-2}\, dxdy + O\big(\|\nu\|_\infty^2\big), \quad \|\nu\|_\infty \to 0,$$

откуда получаем, что дифференциал функции $\hat{h}_{\mathbf{x},\mathbf{a};p}$ в нуле дается формулой

$$d\hat{h}_{\mathbf{x},\mathbf{a};p}(\mathbf{0})\nu = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Delta} \mathscr{P}_{\mathbf{a}}^* \nu(z) \sum_{m+n=2}^{\infty} \sqrt{mn} x_m^{(p)}(\mathbf{a}) x_n^{(p)}(\mathbf{a}) z^{m+n-2}\, dxdy.$$

В частности, для $\nu = t\tilde{\mu}_0$, учитывая (4.7) и (4.10), будем иметь

$$d\hat{h}_{\mathbf{x},\mathbf{a};p}(\mathbf{0})[t\tilde{\mu}_0] = t \iint\limits_{\Delta} \mathscr{M}_{\mathbf{a}}^* \tilde{\mu}_0(z) r_{p,j_p}(z;\mathbf{a})\, dxdy,$$

и сравнение с (4.5) и (4.10) дает

$$\lim_{p\to\infty} |d\hat{h}_{\mathbf{x},\mathbf{a};p}(\mathbf{0})[t\tilde{\mu}_0]| = \lim_{p\to\infty} |dh_{\mathbf{x},\mathbf{a};p}(\mathbf{0})[t\psi]| = |t|.$$

Следовательно, из (4.14) получаем равенство

$$\lim_{p\to\infty} |\hat{h}_{\mathbf{x},\mathbf{a};p}(t\tilde{\mu}_0)| = |t|,$$

эквивалентное совпадению метрик $c_{\mathbf{T}}$ и $\tau_{\mathbf{T}}$ (а также совпадению соответствующих инфинитезимальных метрик $\mathscr{C}_{\mathbf{T}}$ и $F_{\mathbf{T}}$) на экстремальном диске (2.9).

Это, в свою очередь, влечет равенство (1.6) для всех точек указанного диска ввиду хорошо известного соотношения $c_{\mathbf{T}} \le d_{\mathbf{T}} \le \tau_{\mathbf{T}}$, в котором левое неравенство есть прямое следствие свойств метрик Каратеодори и Кобаяси, в то время как правое неравенство получается непосредственно из существования гиперболической изометрии

$$t \mapsto \phi_{\mathbf{T}}(t\mu_0) : \Delta \to \mathbf{T}.$$

Шаг 2. Чтобы установить утверждение теоремы 1 для произвольной пары точек ψ_1, ψ_2 (соответственно теоремы 2 для произвольной точки ψ), в $\mathbf{T}$ можно теперь использовать стандартные правые сдвиги пространства $\mathbf{T}$.

Возьмем коэффициент Бельтрами $\nu \in \mathrm{Belt}(\Delta)_1$ с $\phi_{\mathbf{T}}(\nu) = \psi$. Тогда $w^\nu(S^1)$ — квазиокружность с внутренней областью $D_\nu = w^\nu(\Delta)$. Отобразив эту область конформно на круг Δ с помощью соответствующей функции w, получим (при фиксированном ν) биголоморфный изоморфизм

$$\mu \mapsto \sigma(\mu) = \frac{\mu - \nu}{1 - \bar{\nu}\mu} \frac{w^\nu \circ w^{-1}}{\overline{w^\nu \circ w^{-1}}} \tag{4.15}$$

шара $\mathrm{Belt}(\Delta)_1$. Этот изоморфизм согласуется с канонической проекцией $\phi_{\mathbf{T}}$ и потому спускается на $\mathbf{T}$ как голоморфная биекция $\hat{\sigma}$, определяемая из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Belt}(\Delta)_1 & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Belt}(\Delta)_1 \\ {\scriptstyle \phi_{\mathbf{T}}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{\mathbf{T}}} \\ \mathbf{T} & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & \mathbf{T}. \end{array}$$

Это порождает тейхмюллеровские изометрии

$$\tau_{\mathbf{T}}(\phi_{\mathbf{T}}(\nu), \phi_{\mathbf{T}}(\mu)) = \tau_{\mathbf{T}}(\phi_{\mathbf{T}}(\sigma(\nu)), \mathbf{0}),$$

а также аналогичные равенства для метрик Каратеодори и Кобаяси.

Теоремы 1 и 2 доказаны.

Замечание. Согласно Ли Зонгу (см. [37]) в $\mathbf{T}$ заведомо существуют две точки, являющиеся концами бесконечного множества различных сегментов, геодезических для метрики Тейхмюллера (такой факт верен и для произвольного бесконечномерного пространства Тейхмюллера $\mathbf{T}(\Gamma)$, см. [38]).

Ввиду теоремы 1 геодезические сегменты для метрик Каратеодори и Кобаяси в пространстве $\mathbf{T}$, а также его голоморфные изометрии относительно этих метрик в общем случае также не единственны.

Некоторые эквивалентные условия для единственности геодезических сегментов и голоморфных изометрий пространства $\mathbf{T}(\Gamma)$ установлены в [6].

5. Голоморфная секционная кривизна инвариантных метрик

Пусть X — область в комплексном банаховом пространстве E (или на комплексном банаховом многообразии, моделированном пространством E). Определим для полунепрерывных сверху функций $u : X \to [-\infty, \infty)$ их *обобщенный гессиан* $\Delta_v u(x)$ *в точке* $x \in X$ *в направлении* v по формуле

$$\Delta_v u(x) = 4 \liminf_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(x + vre^{i\theta})\, d\theta - u(x) \right\} \quad (r > 0).$$

Нетрудно проверить, что для функции u класса C^2 в областях из $\mathbb{C}^n$ обобщенный гессиан совпадает с обычным гессианом функции u и что u плюрисубгармонична на X тогда и только тогда, когда $\Delta_v u(x) \geq 0$. Поэтому если x_0 — точка локального максимума полунепрерывной сверху функции u такой, что $u(x_0) > -\infty$, то необходимо $\Delta_v u(x_0) \leq 0$ для всех v.

В частности, для областей в $\mathbb{C}$, положив $v = 1$, получим *обобщенный лапласиан*

$$\Delta u(x) = 4 \liminf_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + re^{i\theta})\, d\theta - u(x) \right\}, \tag{5.1}$$

который сводится к обычному лапласиану $\Delta = 4\partial\bar{\partial}$ для функций из C^2.

Пусть $F_X(x, v)$ — финслерова структура на $\mathscr{T}(X) \subset X \times E$ (а значит, $F_X(x, v) \geq 0$), и предположим, что эта функция полунепрерывна сверху на $\mathscr{T}(X)$.

Рассмотрим для фиксированного $(x, v) \in \mathscr{T}(X)$ голоморфные отображения $h : \Delta_r \to X$ с $h(0) = x$, $h'(0) = v$ (при подходящем $r > 0$). Каждое такое h определяет конформную метрику $ds = l_h(t)|dt|$ на круге Δ_r с

$$l_h(t) = F_X(h(t), h'(t)). \tag{5.2}$$

Это инфинитезимальная финслерова метрика на Δ_r с полунепрерывной сверху плотностью l_h. Если $F_X(x, v)$ плюрисубгармонична (соответственно логарифмически плюрисубгармонична) в точке $x \in X$, то функция l_h будет субгармонической (соответственно логарифмически субгармонической) на круге Δ_r.

Структуру $F_X(x, v)$ можно рассматривать как инфинитезимальную финслерову метрику на $\mathscr{T}(X)$. Ее *голоморфная секционная кривизна* $\kappa_F(x, v)$ в точке (x, v), где $F_X(x, v) > 0$, определяется как точная верхняя граница гауссовых кривизн метрик (5.2) с учетом обобщенного лапласиана (5.1), т. е. $\kappa_h(t) = -\Delta \log l_h^2(t)/\big(2l_h^2(t)\big)$ $(t \in \Delta_r)$, и

$$\kappa_F(x, v) = \sup \frac{\Delta \log F_X^2(h(t), h'(t))}{-2F_X^2(h(t), h'(t))}\bigg|_{t=0},$$

где супремум берется по всем голоморфным отображениям $h : \Delta_r \to X$ с $h(0) = x$, $h'(0) = v$ и всем допустимым $r > 0$.

Известно, что для каждого комплексного банахова многообразия X, которое полно и гиперболично, его метрика Кобаяси $F_{\mathscr{K}}(x, v) = \mathscr{K}(x, v)$ имеет голоморфную кривизну $\kappa_{\mathscr{K}}(x, v) \geq -4$ для всех $(x, v) \in \mathscr{T}(X)$. Если же X гиперболично по Каратеодори, то кривизна его инфинитезимальной метрики Каратеодори $\mathscr{C}(x, v)$ удовлетворяет неравенству $\kappa_{\mathscr{C}}(x, v) \leq -4$, а следовательно, в каждой точке (x, v), где эти метрики равны, их голоморфные секционные кривизны равны -4 (см. [2, 39, 40]).

Следующий важный результат есть прямое следствие теоремы 1.

Теорема 4. *Метрики Каратеодори и Кобаяси универсального пространства Тейхмюллера* $\mathbf{T}$ *имеют постоянную голоморфную кривизну* -4.

6. Комплексная гипервыпуклость пространств Тейхмюллера

6.1. Пусть X — произвольная гиперболическая риманова поверхность. По теореме униформизации существует фуксова группа G без кручения, действующая разрывно в дисках Δ и Δ^*, такая, что поверхность X конформно гомеоморфна фактор-пространству $X = \Delta/\Gamma$. Предельное множество $\Lambda(\Gamma)$ группы Γ либо совпадает с единичной окружностью S^1, если Γ первого рода, либо $\Lambda(\Gamma)$ — нигде не плотное подмножество S^1, если Γ — группа второго рода.

Пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}(X) = \mathbf{T}(\Gamma)$ поверхности X (или группы Γ) есть пространство деформаций конформной структуры на X. Это пространство имеет естественную копию в универсальном пространстве Тейхмюллера. Именно, вложение пространства $\mathbf{T}(\Gamma)$ состоит из шварцианов $\psi \in \mathbf{T}$, являющихся Γ-автоморфными голоморфными формами веса -4 в Δ^*, т. е. $(\psi \circ \gamma)(\gamma')^2 = \psi, \gamma \in \Gamma$. Обозначим через $\mathbf{B}(\Gamma)$ подпространство в $\mathbf{B}$, образованное такими ψ. Тогда $\mathbf{T}(\Gamma) = \mathbf{B}(\Gamma) \cap \mathbf{T}$ (см., например, [41]).

Метрика Тейхмюллера $\tau_{\mathbf{T}(\Gamma)}$ на $\mathbf{T}(\Gamma)$ определяется аналогично (1.3). Она равномерно эквивалентна метрике $\tau_{\mathbf{T}}|\mathbf{T}(\Gamma)$, индуцированной на $\mathbf{T}(\Gamma)$ метрикой универсального пространства Тейхмюллера, и очевидно, что $\tau_{\mathbf{T}}(\varphi, \psi) <$

$\tau_{\mathbf{T}(\Gamma)}(\varphi, \psi)$ для любой пары $\varphi, \psi \in \mathbf{T}(\Gamma)$. С другой стороны, для всякого ограниченного множества $E \subset \mathbf{T}(\Gamma)$ имеем

$$\tau_{\mathbf{T}(\Gamma)}(\varphi, \psi) \leq 3(1 + \operatorname{diam} E)\tau_{\mathbf{T}}(\varphi, \psi),$$

где diam — диаметр множества E в метрике $\tau_{\mathbf{T}(\Gamma)}$ (см. [41, теорема 4.7]).

6.2. Из следствия 1 вытекает следующий важный результат.

Теорема 5. *Каждое пространство Тейхмюллера* $\mathbf{T}(\Gamma)$ *комплексно гипервыпукло* (*т. е. существует отрицательная плюрисубгармоническая функция* $u(\psi)$ *на* $\mathbf{T}(\Gamma)$, *которая стремится к нулю, когда* ψ *стремится к бесконечности*).

Вопрос о комплексной гипервыпуклости пространств Тейхмюллера был поставлен М. Громовым. Он был решен положительно для конечномерных пространств Тейхмюллера $\mathbf{T}(p, n) = \mathbf{T}(\Gamma)$ в [42]. Следствие 1 вместе с указанным выше соотношением между пространствами $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}(\Gamma)$ снабжает этим свойством сразу все $\mathbf{T}(\Gamma)$: в качестве требуемой плюрисубгармонической функции может служить, например, $g_{\mathbf{T}}(\mathbf{0}, \psi)$.

Отметим, что недавно МакМаллен [43] установил келерову гиперболичность конечномерных пространств модулей $\mathscr{M}(p, n) = \mathbf{T}(p, n)/\operatorname{Mod}(p, n)$, где $\operatorname{Mod}(p, n)$ — модулярная группа Тейхмюллера пространства $T(p, n)$. Свойства комплексной гипервыпуклости и келеровой гиперболичности имеют тесную родственную связь.

7. Проблема продолжения Кюнау и смежные вопросы

7.1. При использовании методов комплексного анализа для решения различных проблем бывает важно продолжить конформные отображения плоских областей на всю комплексную плоскость, например, используя квазиконформные отображения, и тогда нужно иметь оценки, контролирующие искажение при таком продолжении. Естественная верхняя оценка для коэффициентов квазиконформности продолжений получается из известной лямбда-леммы Мане — Сада — Салливена [44] и ее улучшений (см., например, [6, 45–47]), но в общем случае эта оценка не точна.

Инъективные голоморфные отображения круга образуют специальный тип голоморфных движений и потому допускают квазиконформное продолжение с существенно меньшей дилатацией. Такое наблюдение было сделано Кюнау (см. [28, 48]), поставившим много лет назад одну проблему о продолжении. Она имеет динамическую природу, хотя возникла первоначально в контексте теории фредгольмовых собственных значений и из внутренних вопросов геометрической теории функций. Удобно нормировать отображения посредством (1.2), что не уменьшает общности.

С каждой функцией $f \in \Sigma$ можно естественно ассоциировать семейство конформных гомеоморфизмов

$$f_r(z) = rf\left(\frac{z}{r}\right) = z + b_1 r^2 z^{-1} + b_2 r^3 z^{-2} + \dots, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (f_0(z) \equiv z),$$

определяющее изотопию f в тождественное отображение в топологии равномерной сходимости на компактных множествах в Δ^*.

7.2. Проблема продолжения Кюнау заключается в вопросе: верно ли, что

$$f \in \Sigma(k) \text{ влечет } f_r \in \Sigma(kr^2), \quad 0 < k \leq 1?$$

Она была решена (положительно) только для $k = 1$, т. е. было установлено, что

$$\text{если } f \in \Sigma, \text{ то } f_r \in \Sigma(r^2),$$

в [49] с использованием теоремы Ройдена — Гардинера о совпадении метрик Кобаяси и Тейхмюллера. В главном случае $k < 1$ вопрос остался открытым. Следствие 1 позволяет получить полное решение проблемы Кюнау и, более того, дает ответ на некоторые другие связанные с этим вопросы.

Теорема 6. *Если функция $f(z) = \sum\limits_1^\infty b_k z^{-k}$ принадлежит $\Sigma(k)$, то для любого $t \in \Delta$ отображение $f_t(z) = tf(t^{-1}z)$ принадлежит $\Sigma(k|t|^2)$. Полученная оценка*

$$\|\mu_{f_t}\|_\infty \le k|t|^2 \tag{7.1}$$

для наименьших дилатаций возможных квазиконформных продолжений f^μ функции f точна. Если равенство $\|\mu_{f_t}\|_\infty = k|t|^2$ имеет место для некоторого $t_0 \ne 0$, то оно выполняется и для всех $t \in \Delta$. Это достигается только для отображения

$$J(z) = z + bz^{-1}, \quad |b| = k, \tag{7.2}$$

для которого $J_t(z) = z + bt^2/z$, а экстремальные продолжения на круг Δ имеют вид $\widehat{J}_t(z) = z + kt^2\bar{z}$.

Из этой теоремы сразу вытекает

Следствие 2. *Пусть f отображает конформно круг $\Delta_R = \{|z| < R\}$ и допускает k-квазиконформное продолжение на $\widehat{\mathbb{C}}$. Тогда f имеет и k'-квазиконформное продолжение через единичную окружность $S^1 = \partial\Delta$ с $k' \le kR^{-2}$, а кривая $L = f(S^1)$ допускает k'-квазиотражение с тем же самым k'. Эта оценка точная, равенство $k' = R^{-2}$ достигается для того же самого отображения, что и в теореме 6.*

Напомним, что *квазиотражение* (или *квазиконформное отражение*) относительно жордановой кривой L есть меняющий ориентацию квазиконформный автоморфизм сферы $\widehat{\mathbb{C}}$, который меняет местами внутренность и внешность кривой L и сохраняет неподвижными все точки кривой.

7.3. Предпошлем доказательству теоремы 6 три леммы. Прежде всего нам потребуется следующее прямое обобщение леммы Шварца на логарифмически субгармонические функции (ср. [2, 12, 50, 51]).

Лемма 3. *Пусть функция $u(z) : \Delta \to [0, 1)$ логарифмически субгармонична в круге Δ и такова, что отношение $u(z)/|z|^m$ ограничено в окрестности начала координат для некоторого $m \ge 1$. Тогда*

$$u(z) \le |z|^m \quad \text{для всех } z \in \Delta \tag{7.3}$$

и

$$\limsup_{|z|\to 0} \frac{u(z)}{|z|^m} \le 1. \tag{7.4}$$

Равенство в (7.3) (даже для одного $z_0 \ne 0$) или в (7.4) может выполняться только в случае функции $u(z) = |z|^m$.

Для каждой функции $f \in \Sigma$ ее производная Шварца удовлетворяет равенству

$$S_{f_t}(z) = S_f(z/t)t^{-2}, \quad z \in \Delta^*. \tag{7.5}$$

Это равенство определяет для каждого z голоморфное отображение

$$t \mapsto \psi(z;t) = S_{f_t}(z) : \Delta \to \mathbb{C}.$$

На самом деле верно более сильное утверждение.

Лемма 4. *Отображение*

$$t \mapsto \psi(\cdot;t) = S_{f_t} : \Delta \to \mathbf{B} \tag{7.6}$$

принадлежит $\mathrm{Hol}(\Delta, \mathbf{B})$, *т. е. голоморфно как элемент пространства* $\mathbf{B}$ *шварцианов.*

Доказательство этой леммы дано в [49]. Она представляет собой специальный случай некоторого общего утверждения о комплексных банаховых пространствах ограниченных измеримых функций, которые голоморфно зависят от комплексных параметров.

Доказательство теоремы 7. Композиция функции Грина $g_{\mathbf{T}}$ с отображением (7.5), обозначаемая через h, дает субгармоническую функцию

$$g_{\mathbf{T}} \circ h(t) = \log\tanh[\tau_{\mathbf{T}} \circ h(t)] : \Delta \to [-\infty, 0) \tag{7.7}$$

в круге Δ. Следующая лемма утверждает большее.

Лемма 5. *Функция* $u_1(t) = g_{\mathbf{T}} \circ h(t)$ *является радиальной* (*с круговой симметрией*) *субгармонической функцией, т. е.* $u(t) = u(|t|)$ *для всех* $t \in \Delta$.

Доказательство леммы 5. Каждое отображение $z \mapsto f_t(z)$ конформно в круге

$$\Delta^*_{|t|} = \{z : |z| > |t|\} \supset \Delta^*,$$

поэтому значения f_t на S^1 вещественно аналитичны. К f_t можно применить критерий Шребеля о реперном отображении [52], который дает, в частности, что всякий C^2-гладкий гомеоморфизм $F : S^1 \to S^1$ имеет единственное экстремальное квазиконформное продолжение $\widehat{F}$ в Δ, причем это продолжение типа Тейхмюллера, т. е. с коэффициентом Бельтрами вида

$$\mu_{\widehat{F}}(z) = k\frac{|\varphi(z)|}{\varphi(z)}, \quad \varphi \in A_1(\Delta).$$

Мы будем называть такое продолжение $\widehat{F}$ *каноническим.*

Канонические продолжения $\hat{f}_t$ отображений $f_t|\Delta^*$ отображают круг Δ на область $D_t = \widehat{\mathbb{C}} \setminus f_t(\Delta^*)$ и имеют в Δ коэффициенты Бельтрами

$$\mu_{\hat{f}_t}(z) = k\frac{|\varphi_t(z)|}{\varphi_t(z)} \quad \text{с} \quad \varphi_t(z) = \sum_0^\infty a_k(t) z^k \in A_1(\Delta) \tag{7.8}$$

(мы опустили дополнительные конформные отображения Римана $\sigma_t(w) : D_t \to \Delta$ для получения отображений $\Delta \to \Delta$, поскольку σ_t не меняют коэффициентов Бельтрами).

Теперь зафиксируем $r = |t| > 0$ и заметим, что для любого $t = re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, граничные значения функций f_r и f_t на S^1 связаны соотношением

$$f_t(z) = re^{i\theta} f\left(\frac{z}{re^{i\theta}}\right) = e^{i\theta} f_r(e^{-i\theta} z).$$

Используя это равенство, можно определить другое квазиконформное продолжение F_t функции $f_t|S^1$ на круг Δ вращениями $\hat{f}_r$, т. е. положить

$$F_t(z) = e^{i\theta}\hat{f}_r(e^{-i\theta}z), \quad z \in \Delta.$$

Коэффициент Бельтрами отображения F_t равен

$$\mu_{F_t}(z) = \mu_{\hat{f}_r}(e^{-i\theta}z)e^{-2i\theta} = k\frac{|\widetilde{\varphi}_t(z)|}{\widetilde{\varphi}_t(z)},$$

где согласно (7.8)

$$\widetilde{\varphi}_t(z) = \sum_0^\infty a_k(r)e^{-2i(k+1)\theta}z^k.$$

Это означает, что F_t также тейхмюллеровского типа, а ввиду единственности оно должно совпасть с каноническим продолжением $\hat{f}_t$ функции f_t. Следовательно,

$$\|\mu_{\hat{f}_t}\|_\infty = \|\mu_{\hat{f}_r}\|_\infty \quad \text{для любого } t \text{ с } |t| = r,$$

откуда, учитывая представление (1.8), получаем утверждение леммы 5.

Вернемся к доказательству теоремы 6 и установим теперь, что

$$g_{\mathbf{T}} \circ h(r) = cr^2 + o(r^2) \quad \text{при } t \to 0. \tag{7.9}$$

Действительно, из (6.5) и леммы 2 вытекает, что для отображения $h : t \mapsto S_{f_t}$ выполняются равенства

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 0 \tag{7.10}$$

(но $h''(0) \neq 0$ в предположении, что $b_1 \neq 0$, где b_1 означает тот же коэффициент, что и в (1.2)).

Применим теперь к S_{f_t} теорему Альфорса — Вейла [53], из которой следует, что каждый $\psi \in \mathbf{B}$ с $\|\psi\| < 1/2$ есть производная Шварца ограничения на Δ^* некоторого квазиконформного гомеоморфизма w^μ сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ с

$$\mu(z) = -2(1 - z\overline{z})^2\psi(1/\overline{z})1/\overline{z}^4 \quad \text{для } z \in \Delta$$

и $\mu(z) = 0$ для $z \in \Delta^*$. Сопоставляя все это с (1.8), сразу получаем, что рост $u_1(r) = g_{\mathbf{T}} \circ h(r)$ оценивается посредством (7.9).

Учитывая еще, что по предположению теоремы 6 функция

$$u_h(t) := \exp(g_{\mathbf{T}} \circ h(t)) = u_h(|t|), \quad t \in \Delta, \tag{7.11}$$

ограничена сверху величиной $k \le 1$, можно применить к $u(r)/k$ лемму 3 с $m = 2$. Эта лемма дает и искомую оценку:

$$k(0, S_{f_t}) \le k|t|^2 \quad \text{для всех } |t| < 1.$$

Случай равенства в (7.1) вытекает из ситуации, описанной в лемме 3.

Остается показать, что равенство в (7.1) может иметь место только для отображения (7.2). Согласно результату Кюнау из [54, с. 102] наименьшая дилатация $k(\hat{f}_r) = u_h(r)$ продолжений $\hat{f}_r$ удовлетворяет равенству

$$\lim_{r\to 0} u_h(r)/r^2 = b_1; \tag{7.12}$$

с другой стороны, хорошо известно, что для $f \in \Sigma(k)$ будет

$$|b_1| \le k$$

с равенством только для функции (7.2) (см., например, [24, 41]). Теорема 6 доказана.

7.4. Другой вопрос Кюнау, поставленный в [54, с. 102], относится к поведению отношения $k(f_r)/r^2$ и состоит в том, будет ли это отношение монотонно убывающей функцией от r при условии, что отображение f отлично от (7.2).

Предыдущие леммы 3 и 5 дают положительный ответ на этот вопрос. Как отмечено в доказательстве теоремы 6, $k(f_t)$ равняется $u_h(t)$, а по лемме 5 отношение $u_h(t)/t^2$ есть радиальная субгармоническая функция от $t \in \Delta$. Значит, она монотонно возрастает вместе с $|t| \in [0,1]$. Единственность экстремального квазиконформного продолжения дает, что $u_h(r)/r^2$ строго возрастает вместе с r.

7.5. Теорему 6 и ее следствия можно усилить для функций с нулевыми начальными коэффициентами, например для симметричных функций (ср. [49]). Для натурального $p \geq 2$ положим

$$\Sigma^{p-1} = \left\{ f \in \Sigma : f(z) = z + \sum_{n=p}^{\infty} b_n z^{-n},\ b_p \neq 0 \right\}, \quad \Sigma^{p-1}(k) = \Sigma^{p-1} \cap \Sigma(k). \tag{7.13}$$

Например, если $f \in \Sigma$ обладает p-кратной симметрией относительно вращения вокруг начала координат (с $p \geq 2$), то ее разложение имеет вид $f(z) = z + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{np-1}^{(p)} z^{-(np-1)}$, а значит, $f \in \Sigma^{p-2}$.

Теорема 7. *Если $f \in \Sigma^{p-1}(k)$, то для любого $t \in \Delta$ отображение f_t принадлежит классу $\Sigma^{p-1}(k|t|^{p+1})$, т. е.*

$$\|\mu_{f_t}\|_\infty \leq k|t|^{p+1}. \tag{7.14}$$

Оценка (7.14) *для экстремальной дилатации квазиконформных продолжений функции f является точной, и равенство хотя бы для одного $t \neq 0$ может выполняться, только если оно имеет место сразу для всех $t \in \Delta$. Это достигается для отображения*

$$J_p(z) = J(z^{(p+1)/2})^{2/(p+1)} = z + \frac{2b}{p+1}\frac{1}{z^p} + \dots, \tag{7.15}$$

где J определено равенством (7.2).

Первая часть доказательства аналогична доказательству теоремы 6. Заметим, что равенства

$$f'(z) = 1 - pb_p z^{-p-1} + \dots, \quad f''(z) = p(p+1)b_p z^{-p-2} + \dots,$$
$$f'''(z) = -p(p+1)(p+2)b_p z^{-p-3} + \dots$$

дают $S_f(z) = -p(p+1)(p+2)b_p z^{-p-3} + \dots$; отсюда имеем

$$S_{f_t}(z) = -\frac{p(p+1)(p+2)b_p t^{p+1}}{z^{-p-3}} + \omega(z,t),$$

где $\|\omega(z,t)\|_{\mathbf{B}} = O(t^{p+2})$, $t \to 0$. Это показывает, что теперь отображение $h(t)$: $t \mapsto \psi(\cdot, t) = S_{f_t}(z)$ из Δ в $\mathbf{T}$ удовлетворяет условиям

$$h^{(s)}(0) = \mathbf{0} \quad \text{для } s = 0, 1, \dots, p.$$

Применяя лемму 3 с $m = p+1$, приходим к (7.14) с указанным там возможным случаем равенства.

Покажем теперь, что равенство в (7.14) действительно достигается, установив экстремальность отображения J_p. Для этого заметим, что применение преобразований (2.14) к любой функции $f(z) = z + b_p z^p + \dots \in \Sigma^{p-1}(k)$ дает функцию, у которой коэффициент Грунского $\alpha^{(1)}_{p+1,p+1}$ равен $b_p/2$.

С другой стороны, согласно [55] коэффициент b_p любой функции $f \in \Sigma(k)$ при достаточно малом $k < k_p$ оценивается так:

$$|b_p| \le 2k/(p+1), \tag{7.16}$$

и эта оценка точная. Более того, единственной экстремальной функцией для (7.16) является

$$f_p(z) = z(1 - kuz^{-p-1})^{2/(p+1)}, \quad |u| = 1,$$

которая совпадает с (7.15).

Применяя к $\mathscr{M}(f_p)$ неравенство Грунского (2.2) с $x_{p+1} = 1$ и $x_n = 0$ для всех $n \ne p+1$, получаем равенство $\varkappa(f_p) = k(f_p) = k$. Соответственно этому для функции $f_{p,t}$ имеем

$$\varkappa(f_{p,t}) = k(f_{p,t}) = k|t|^2. \tag{7.17}$$

Это показывает, что оценка (7.14) точна. Теорема 7 доказана.

Для всех $f \in \Sigma^{p-1}(k)$ с $k < k_p$, отличных от f_p, имеем в (7.16) строгое неравенство. Однако это не препятствует выполнению соотношения (7.17) и для таких f.

7.6. Отметим следующий общий факт, касающийся голоморфных отображений круга в пространство $\mathbf{T}$, имеющих изолированные нули.

Теорема 8. *Пусть $h : \Delta \to \mathbf{T}$ — голоморфное отображение такое, что*

$$h'(0) = h''(0) = \dots = h^{(m)}(0) = \mathbf{0}, \quad m \ge 1.$$

Тогда для всех $t \in \Delta$ имеет место неравенство

$$d_{\mathbf{T}}(h(t), h(0)) \le d_\Delta(0, |t|^{m+1}). \tag{7.18}$$

Если при этом хотя бы для одного $t_0 \ne 0$ выполнено равенство, то оно должно выполняться и для всех t.

Подобное утверждение было установлено в [49] для произвольных пространств Тейхмюллера совершенно отличным методом. Однако в общем случае ничего нельзя сказать насчет ситуации, когда выполняется равенство.

Доказательство. Взяв композицию f с правым сдвигом (4.17) пространства $\mathbf{T}$, можно предполагать также, что $h(0) = 0$. Тогда из теоремы Альфорса — Вейла следует, что при малых $|t|$ будет

$$k(\mathbf{0}, h(t)) \le \frac{1}{2}\|h(t)\|_{\mathbf{B}} = O(|t|^{m+1}).$$

Отсюда и из следствия 1 вытекает, что функция

$$u_h(t) = k(\mathbf{0}, h(t)) = \exp(g_{\mathbf{T}} \circ h(t))$$

удовлетворяет условиям леммы 3 и по этой лемме

$$k(\mathbf{0}, h(t)) \le |t|^{m+1}, \tag{7.19}$$

что приводит к (7.18). В случае равенства в (7.18) для некоторого $t_0 \ne 0$ получаем равенство также и в (7.19). Тогда $k(\mathbf{0}, h(t)) = |t|^{m+1}$ для всех $t \in \Delta$, что и завершает доказательство теоремы.

8. Плюрисубгармонические функции и экстремальные квазиконформные отображения

Имеется несколько характеризаций экстремальных коэффициентов Бельтрами. Теорема 1 позволяет дать новую характеризацию, использующую плюрисубгармонические функции.

Теорема 9. *Коэффициент Бельтрами* $\mu_0 \in \mathrm{Belt}(\Delta)_1$ *экстремален тогда и только тогда, когда существует логарифмически плюрисубгармоническая функция* $u : \mathbf{T} \to [0, 1)$, $u(\mathbf{0}) = 0$, *такая, что отношение* $u(\psi)/\|\psi\|$ *ограничено в некоторой окрестности точки* $\psi = \mathbf{0}$ *и выполняется одно из следующих равенств:*

$$\limsup_{|t|\to 0} \frac{u \circ \phi_{\mathbf{T}}(t\mu_0/\|\mu_0\|_\infty)}{|t|} = 1, \tag{8.1}$$

$$u \circ \phi_{\mathbf{T}}(\mu_0) = \|\mu_0\|_\infty. \tag{8.2}$$

Ограниченность отношения $u(\psi)/\|\psi\|$ дает равенство $\log u(\psi) = \log \|\psi\| + O(1)$, где $O(1)$ ограничена сверху и функция $u \circ \phi_{\mathbf{T}}$ логарифмически плюрисубгармонична на шаре $\mathrm{Belt}(\Delta)_1$, так что условия теоремы естественны.

Отметим также, что плюрисубгармоничность здесь существенна и использовать только голоморфные функции недостаточно.

Доказательство теоремы 9. Необходимость прямо вытекает из следствия 1, поскольку функция

$$u_0(\psi) = e^{g_{\mathbf{T}}(\psi,\mathbf{0})} = k(\psi, \mathbf{0})$$

обладает требуемыми свойствами для всех коэффициентов Бельтрами.

Достаточность. Пусть существует логарифмически плюрисубгармоническая функция $u : \mathbf{T} \to [0, 1)$ такая, что $u(\psi)/\|\psi\|$ ограничено вблизи $\psi = \mathbf{0}$ и выполняется одно из равенств (8.1) или (8.2). Обозначив $\tilde{\mu}_0 = \mu_0/\|\mu_0\|_\infty$, получим, что функция $\log u \circ \phi_{\mathbf{T}}(t\tilde{\mu}_0)$ плюрисубгармонична в Δ. По лемме 3 $u \circ \phi_{\mathbf{T}}(t\tilde{\mu}_0) = |t|$ для всех $t \in \Delta$, а тогда

$$\exp(g_{\mathbf{T}} \circ \phi_{\mathbf{T}}(t\tilde{\mu}_0)) \geq u \circ \phi_{\mathbf{T}}(t\tilde{\mu}_0) = |t|.$$

Сопоставляя это с (7.3), заключаем, что $\exp(g_{\mathbf{T}} \circ \phi_{\mathbf{T}}(t\tilde{\mu}_0)) = |t|$, что эквивалентно равенству

$$k(\mathbf{0}, \phi_{\mathbf{T}}(t\tilde{\mu}_0)) = |t|$$

для всех $t \in \Delta$. Положим здесь $t = \|\mu_0\|_\infty$, получим $k(\mathbf{0}, \phi_{\mathbf{T}}(t\mu_0)) = \|\mu_0\|_\infty$, а следовательно, μ_0 экстремален. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 4 важны и в других вопросах, например для количественной оценки квазиконформных отражений. Это будет изложено в другом месте.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kobayashi S.* Hyperbolic complex spaces. New York: Springer-Verl., 1998.
2. *Dineen S.* The Schwarz lemma. Oxford: Clarendon Press, 1989.
3. *Klimek M.* Pluripotential theory. Oxford: Clarendon Press, 1991.
4. *Royden H. L.* Automorphisms and isometries of Teichmüller space // Advances in the theory of Riemann surfaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1971. P. 369–383. (Ann. of Math. Stud.; 66).
5. *Gardiner F. P.* Quadratic differentials and Teichmüller spaces. New York: Wiley-Intersci., 1987.

6. *Earle C. J., Kra I. , Krushkal S. L.* Holomorphic motions and Teichmüller spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 343. P. 927–948.

7. *Krushkal S. L.* The Green function of Teichmüller spaces with applications // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 27. P. 143–147.

8. *Krushkal S. L.* Grunsky inequalities of higher rank with applications to complex geometry and function theory // Israel Mathematical Conf. Proc. Providence RI: Amer. Math. Soc., 2003. V. 16. P. 127–153.

9. *Lelong P.* Fonction de Green pluricomplexe et lemmes de Schwarz dans le espace de Banach // J. Math. Pures Appl. 1989. V. 69. P. 319–347.

10. *Bedford E., Demailly J.-P.* Two counterexamples concerning the pluri-complex Green function in $\mathbf{C}^n$ // Indiana Univ. Math. J. 1988. V. 37. P. 865–867.

11. *Poletskii E. A., Shabat B. V.* Invariant metrics several complex variables. III: Geometric Function Theory /ed. G. M. Henkin // Encyclopedia of Mathematical Sciences. Berlin: Springer-Verl., 1989. V. 9. P. 63–111.

12. *Klimek M.* Infinitesimal pseudo-metrics and the Schwarz lemma // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 105. P. 134–140.

13. *Earle C. J.* On the Carathéodory metric in Teichmüller spaces // Discontinuous groups and Riemann surfaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1974. P. 99–103. (Ann. of Math. Stud.; 79).

14. *Крушкаль С. Л.* Две теоремы о пространствах Тейхмюллера // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228, № 2. С. 290–292.

15. *Крушкаль С. Л.* Об инвариантных метриках в пространствах Тейхмюллера // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 2. С. 209–213.

16. *Krushkal S. L.* Hyperbolic metrics on finite-dimensional Teichmüller spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. 1990. V. 15. P. 125–132.

17. *Earle C. J.* Schwarz's lemma and Teichmüller contraction // Complex manifolds and hyperbolic geometry (Guanajuato, 2001). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. P. 79–85. (Contemp. Math. 311).

18. *Earle C. J., Harris L. A., Hubbard J. H., Mitra S.* Schwarz's lemma and the Kobayashi and Carathéodory metrics on complex Banach manifolds. 2001. (Preprint).

19. *Grunsky H.* Koeffizientenbediengungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen // Math. Z. 1939. Bd 45. S. 29–61.

20. *Kühnau R.* Verzerrungssatze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen // Math. Nachr. 1971. Bd 48. S. 77–105.

21. *Kühnau R.* Zu den Grunskyschen Coeffizientenbedingungen // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. 1981. V. 6. P. 125–130.

22. *Krushkal S. L.* Grunsky coefficient inequalities, Carathéodory metric and extremal quasiconformal mappings // Comment. Math. Helv. 1989. V. 64. P. 650–660.

23. *Pommerenke Chr.* Univalent Functions. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1975.

24. *Крушкаль С. Л., Кюнау Р.* Квазиконформные отображения — новые методы и приложения. Новосибирск: Наука, 1984.

25. *Крушкаль С. Л.* О коэффициентных условиях Грунского // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 1. С. 104–110.

26. *Federer H.* Geometric Measure Theory. Berlin: Springer-Verl., 1969.

27. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

28. *Kühnau R.* Wann sind die Grunskyschen Koeffizientenbedingungen hinreichend für Q-quasikonforme Fortsetzbarkeit? // Comment. Math. Helv. 1986. V. 61. P. 290–307.

29. *Krushkal S. L.* Polygonal quasiconformal maps and Grunsky inequalities // J. Anal. Math. 2003. V. 90. P. 175–196.

30. *Earle C. J., Kra I.* On sections of som holomorphic families of closed Riemann surfaces // Acta Math. 1976. V. 137. P. 49–79.

31. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann Surfaces. New York: Springer-Verl., 1992.

32. *Bers L.* Holomorphic differentials as functions of moduli // Bull. Amer. Math. Soc. 1961. V. 67. P. 206–210.

33. *Krushkal S. L.* Quasiconformal mappings and Riemann surfaces. New York: Wiley, 1979.

34. *Hamilton R.* Extremal quasiconformal mappings with prescribed boundary values // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 138. P. 399–406.

35. *Reich E., Strebel K.* Extremal quasiconformal mappings with given boundary values // Contribution to Analysis / L. V. Ahlfors et al. New York: Acad. Press, 1974. P. 375–391.
36. *Bers L.* An approximation theorem // J. Anal. Math. 1965. V. 14. P. 1–4.
37. *Li Zhong.* Nonuniqueness of geodesics in infinite dimensional Teichmüller spaces // Complex Variables Theory Appl. 1991. V. 16. P. 261–271.
38. *Tanigawa H.* Holomorphic families of geodesic discs in infinite dimensional Teichmüller spaces // Nagoya Mat. J. 1992. V. 127. P. 117–128.
39. *Royden H. L.* Complex Finsler metrics // Contemp. Math. 1986. V. 49. P. 119–124.
40. *Wong B.* On the holomorphic curvature of some intrinsic metrics // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. V. 65. P. 57–61.
41. *Lehto O.* Univalent Functions and Teichmüller spaces. New York: Springer-Verl., 1987.
42. *Krushkal S. L.* Strengthening pseudoconvexity of finite-dimensional Teichmüller spaces // Math. Ann. 1991. V. 290. P. 681–687.
43. *McMullen C. T.* The moduli space of Riemann surfaces is Kähler hyperbolic // Ann. of Math. 2000. V. 151. P. 327–357.
44. *Mañé R., Sad P., Sullivan D.* On dynamics of rational maps // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1983. V. 16. P. 193–216.
45. *Bers L., Royden H. L.* Holomorphic families of injections // Acta Math. 1986. V. 157. P. 259–286.
46. *Slodkowski Z.* Holomorphic motions and polynomial hulls // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 111. P. 347–355.
47. *Sullivan D., Thurston W. P.* Extending holomorphic motions // Acta Math. 1986. V. 157. P. 243–257.
48. *Kühnau R.* Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve // Jber. Deutsch. Math. Verein. 1988. Bd 90. S. 90–109.
49. *Крушкаль С. Л.* Продолжение конформных отображений и гиперболические метрики // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 84–100.
50. *Krushkal S. L.* Quasiconformal extremals of non-regular functionals // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. 1992. V. 17. P. 295–306.
51. *Sibony N.* A class of hyperbolic manifolds // Recent Developments in Several Complex Variables / J. E. Forness. Princeton: Princeton Univ. Press, 1981. P. 357–372. (Ann. of Math. Stud.; 100).
52. *Strebel K.* On the existence of extremal Teichmüller mappings // J. Anal. Math. 1976. V. 30. P. 464–480.
53. *Ahlfors L. V., Weill G.* A uniqueness theorem for Beltrami equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 975–978.
54. *Krushkal S. L., Kühnau R.* A quasiconformal dynamic property of the disk // J. Anal. Math. 1997. V. 72. P. 93–103.
55. *Krushkal S. L.* Exact coefficient estimates for univalent functions with quasiconformal extension // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. 1995. V. 20. P. 349–357.

Статья поступила 30 сентября 2003 г.

Крушкаль Самуил Лейбович (Samuil Krushkal)
Research Institute for Mathematical Sciences
Department of Mathematics and Statistics
Bar-Ilan University, 52900 Ramat-Gan
Israel
krushkal@macs.biu.ac.il

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090