Сибирский математический журнал
Июль—август, 2004. Том 45, № 4

УДК 517.54+517.57+517.95

СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ, БЛИЗКИХ К ГАРМОНИЧЕСКИМ. II

А. П. Копылов

Аннотация: Продолжается изучение свойств отображений, близких к гармоническим (ε-квазигармонических отображений с малыми значениями параметра ε), начало которому положено в более ранних работах автора (см., например, [1–5]).

К числу результатов работы относятся теорема о связи между понятием ε-квазигармонического отображения и решениями систем Бельтрами, аналог свойства среднего арифметического гармонических функций для ε-квазигармонических отображений, теорема об устойчивости в формуле Пуассона для гармонических отображений в шаре и теорема о локальном сглаживании ε-квазигармонических отображений при малых значениях параметра ε с сохранением близости к гармоническим отображениям.

Ключевые слова: устойчивость классов гармонических отображений, квазигармонические отображения, свойство среднего арифметического, формула Пуассона, регуляризация.

Юрию Григорьевичу Решетняку посвящается

Введение. Настоящая работа посвящена решению следующей проблемы (проблемы устойчивости классов гармонических отображений): *если отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, где U — открытое множество в вещественном арифметическом n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, близко* (*в том или ином смысле*) *к гармоническим отображениям, то можно ли ожидать, что f хоть в какой-либо мере наследует свойства последних*?

Ряд ответов утвердительного характера на этот вопрос дан в [1–5]. При этом близость рассматриваемого отображения f к гармоническим отображениям понималась в духе концепции ξ^1-устойчивости в C^1-норме классов отображений [3, 4]. Согласно результатам статьи [4] в асимптотическом смысле наличие такого рода близости эквивалентно выполнению следующего условия: f есть $W^2(U, \mathbb{R}^m)$-решение дифференциального неравенства

$$|\triangle f(x)| \le \varepsilon \left\{ n \sum_{j,s=1}^{n} |\partial_{js} f(x)|^2 \right\}^{1/2} \tag{1}$$

с малым значением параметра ε[1)] (в (1) и далее $\partial_{js} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_s}$ — символ частной производной второго порядка и $\triangle = \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_{jj}$ — оператор Лапласа; как и в [1–

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Международной Ассоциации INTAS и государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации.

1) Здесь и ниже $W^l(U, \mathbb{R}^m) = W^{l,n,m}(U, \mathbb{R}^m) = \bigcup\limits_{p>n} W^l_{p,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$, где $W^l_{p,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$ — пространство всех отображений $h : U \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих условию: для каждого огра-

5], мы будем далее называть решения неравенства (1) *ε-квазигармоническими отображениями*).

В работах [1–5] показано, что к числу свойств ε-квазигармонических отображений f относятся свойства, представленные, например, такими утверждениями, как теорема об устойчивости в C^1-норме на компактных подмножествах области определения отображения f; теорема об устойчивости в C-норме гармонических отображений в классе квазигармонических; теорема о том, что степень суммируемости обобщенных частных производных второго порядка $\partial_{js}f$ неограниченно возрастает, когда коэффициент квазигармоничности $K(f)$ отображения f стремится к нулю; теорема, в которой для любого $p > 1$ дается оценка близости производных $\partial_{js}f$ к производным $\partial_{js}g$ гармонических отображений g в L_p-норме; ряд теорем, представляющих собой аналоги для ε-квазигармонических отображений f и их производных 1-го порядка $\partial_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, классической теоремы Лиувилля о постоянстве ограниченной гармонической функции $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; теоремы о замкнутости классов ε-квазигармонических отображений, $0 \le \varepsilon < 1$, и о компактности семейств отображений из этих классов в топологии локально равномерной сходимости; теорема о полунепрерывности коэффициента квазигармоничности.

Заметим, что побудительной причиной в наших исследованиях устойчивости классов отображений явилось желание выяснить следующее: можно ли построить общие подходы к исследованию проблем устойчивости, которые регулярным образом были бы связаны с теорией устойчивости конформных отображений в классе квазиконформных (относительно основных положений последней см. [6]) и которые позволили бы с единых позиций исследовать устойчивость важнейших в анализе классов отображений. Решая эту задачу, мы предложили концепцию ξ-устойчивости в C-норме классов отображений (см. [7] и библиографию там же) и в развитие ее — концепцию их ξ^1-устойчивости в C^1-норме [3, 4] (и, более общо, концепцию ξ^l-устойчивости в C^l-норме, $l = 0, 1, 2, \dots$ [8, 9]). Эти концепции позволили построить основы теории устойчивости таких классов, как классы многомерных голоморфных отображений (см. монографию [7, гл. 2] и библиографию к ней, а также статьи [10–14]) и классы гармонических отображений [1–5], пучки решений эллиптических систем линейных уравнений с частными производными [15–23, 1–5, 8, 9] (см. также [7, гл. 3]), классы отображений нескольких n-мерных переменных, конформных по каждому из них [24–26], и др. При этом отмеченные выше утверждения о свойствах ε-квазигармонических отображений получены в рамках исследований ξ^1-устойчивости классов гармонических отображений.

Недавно появился новый стимул в проведении исследований ξ^l-устойчиво-

---

ниченного открытого множества V пространства $\mathbb{R}^n$, замыкание $\operatorname{cl} V$ которого содержится в U, ограничение отображения h на множество V принадлежит пространству Соболева $W_p^l(V, \mathbb{R}^m)$ отображений $g : V \to \mathbb{R}^m$, обладающих всеми обобщенными (по Соболеву) частными производными l-го порядка, суммируемыми в V в степени p. Если $\mathscr{A}$ — какое-либо из пространств Соболева отображений, заданных на (открытом множестве) $U \subset \mathbb{R}^n$, то всюду в настоящей работе *$\mathscr{A}$-решением* (*решением из пространства $\mathscr{A}$*) системы дифференциальных уравнений (неравенств) мы называем отображение $f \in \mathscr{A}$, удовлетворяющее этой системе почти всюду в U. Заметим также, что априорное условие принадлежности пространству $W^2(U, \mathbb{R}^m)$ в определении ε-квазигармонического отображения (при малых значениях ε) может быть существенно снижено. В самом деле, в силу теоремы 6 статьи [1] для каждого числа $p > 1$ существует число ε_p, $0 < \varepsilon_p < 1$, такое, что для того чтобы отображение f было ε-квазигармоническим с $\varepsilon < \varepsilon_p$, необходимо и достаточно, чтобы f являлось непрерывным решением класса $W_{p,\mathrm{loc}}^2(U, \mathbb{R}^m)$ дифференциального неравенства (1) с этим же ε.

сти классов отображений и, в частности, исследований устойчивости классов гармонических отображений. Этим стимулом являются результаты статей [27, 28], согласно которым хорошо известные и важные результаты Л. Ниренберга и Ч. Морри о гёльдеровости старших производных C^2-гладких решений эллиптического нелинейного уравнения с частными производными 2-го порядка [29] и эллиптических систем нелинейных уравнений того же порядка [30] распространяются на системы произвольного порядка и весьма общего вида (см. теоремы 1 и $1'$ статей [27, 28]). При этом как доказательство теоремы Ниренберга в [29], так и доказательство теорем 1 и $1'$ статьи [28] основываются на идеях из квазиконформного анализа.

Действительно, теорема Ниренберга выводится из теоремы о равномерной непрерывности по Гёльдеру класса отображений $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) : U \to \mathbb{R}^n$, U — область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^n$, которые он рассматривает как обобщения квазиконформных отображений на плоскости. Эти отображения являются решениями дифференциального неравенства вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\partial_j h_i)^2 \le k \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_j h_i \partial_i h_j - \partial_i h_i \partial_j h_j) + k_1, \tag{2}$$

где k и k_1 — неотрицательные константы, причем

$$k < \frac{n-1}{n-2}. \tag{3}$$

Если $k_1 = 0$ и $n = 2$, то такого рода отображения суть квазиконформные отображения (точнее, решения систем Бельтрами, причем в случае $n = 2$ ограничение (3) на параметр k в (2) не накладывается).

Обратимся теперь к основному результату статьи [28] — теореме 1, согласно которой старшие частные производные эллиптических решений систем нелинейных уравнений в частных производных произвольного порядка удовлетворяют локально условию Гёльдера (по поводу определения эллиптичности см. [28]). Обсуждаемая теорема вытекает из теоремы 2 этой же работы о непрерывности по Гёльдеру частных производных $(l-1)$-го порядка решений систем (5) уравнений с частными производными из [28], близких к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Если для такой системы выполнено условие[2)] $T(x; v_{l-1}) = 0$, $(x; v_{l-1}) \in U \times \mathbb{R}^{N_{l-1}-n}$, U — область в $\mathbb{R}^n$, то ее решения являются решениями дифференциального неравенства (60) в [28], которое в асимптотическом смысле эквивалентно неравенству[3)]

$$|Df(x)| \le \varepsilon \left\{ \sum_{\mu_1,\dots,\mu_l=1}^{n} \left|\partial_{\mu_1\dots\mu_l} f(x)\right|^2 \right\}^{1/2}, \tag{4}$$

где $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ — отображение класса $W^l_{p,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$, удовлетворяющее (4) почти всюду в U, и $D = (D_1, D_2, \dots, D_k) = \sum\limits_{|p|=l} a_p \partial^p$ — эллиптический линейный дифференциальный оператор l-го порядка с постоянными коэффициентами ($a_p = \left(a_p^{j\varkappa}\right)_{\substack{j=1,\dots,k\\ \varkappa=1,\dots,m}}$ — вещественная $(k \times m)$-матрица, p —

2) Мы используем здесь обозначения и понятия из [28].

3) Обращаем внимание читателя на то, что если в (1) заменить $\varepsilon\sqrt{n}$ на ε, то в этой новой записи неравенство (1) обретает вид неравенств типа (4).

мультииндекс порядка $|p| = l$, суммирование осуществляется по всем таким мультииндексам и эллиптичность оператора D означает выполнение условия $\operatorname{rank}\sigma_D(\zeta) = \operatorname{rank}\bigl\{\sum\limits_{|p|=l} \zeta^p a_p\bigr\} = m$ для каждого $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). В свою очередь, результаты работ [3, 4, 8, 9, 22, 23], а также монографии [7] позволяют рассматривать W^l-решение неравенства (4) (при малом значении параметра ε) в определенном отношении как аналог квазиконформного отображения[4)]. Изучение свойств решений дифференциальных неравенств типа (4), роднящих эти решения с решениями эллиптических систем $Dg(x) = 0$ линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, как раз и составляет предмет исследований ξ^{l-1}-устойчивости в C^{l-1}-норме пучков решений систем линейных дифференциальных уравнений [8, 9]. Следует отметить также, что доказательство упомянутой выше теоремы 2 статьи [28] основывается на результатах статей [31–33], которые естественным образом вкладываются в рамки исследований ξ^{l-1}-устойчивости классов отображений.

В настоящей работе, исходя из вышесказанного и имея в виду использование ее результатов в исследованиях, связанных с изучением свойств решений эллиптических систем дифференциальных уравнений с частными производными, мы продолжаем изучение свойств ε-квазигармонических отображений при малых значениях параметра ε.

В первом пункте статьи мы прослеживаем (прямую) связь между понятием ε-квазигармонического отображения (случай $n = 2$, $m = 1$) и решениями систем Бельтрами (5).

Во втором получаем аналог свойства среднего арифметического гармонических функций для ε-квазигармонических отображений при малых значениях параметра ε.

В третьем пункте мы доказываем теорему 3 об устойчивости в формуле Пуассона для гармонических отображений в шаре.

Наконец, используя результаты третьего пункта, в четвертом мы устанавливаем возможность локального сглаживания ε-квазигармонических отображений для малых ε с сохранением близости к гармоническим отображениям.

1. Связь между квазигармоническими (случай $n = 2$, $m = 1$) и квазиконформными отображениями. С точки зрения круга вопросов, связанных с изучением явлений устойчивости для гармонических отображений, понятие квазигармонического отображения соотносится с понятием гармонического примерно так же, как понятие квазиконформного отображения (и более

[4)] В этой связи отметим еще следующее утверждение.

Теорема А. *Если $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$, — непрерывное $W^1_{2,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{C})$-решение дифференциального неравенства*

$$|\partial_{\bar z} f(z)| \le \varepsilon\{|\partial_z f(z)|^2 + |\partial_{\bar z} f(z)|^2\}^{1/2} \tag{5}$$

($\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, i — *мнимая единица*; *неравенство* (5) — *это неравенство* (4) *в комплексной записи в том случае, когда в* (4) $n = 2$, $m = 2$, $k = 2$, $l = 1$ *и* D — *оператор Коши — Римана*), *причем* $0 \le \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$, *то тогда* f *есть решение некоторой системы Бельтрами*

$$\begin{cases} \partial_{\bar z} f(z) = \mu(z)\partial_z f(z), \\ M = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{z \in U} |\mu(z)| < 1, \end{cases} \tag{6}$$

где $M \le \varepsilon/\sqrt{1 - \varepsilon^2}$. *С другой стороны, если* f — *непрерывное* $W^1_{2,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{C})$-*решение системы Бельтрами* (6) *с* $M < 1$, *то оно является также и решением неравенства* (5) *с* $\varepsilon = M$.

Доказательство теоремы А не составляет труда, поэтому мы его опускаем.

общо — понятие отображения с ограниченным искажением по Решетняку [34]) связано с понятием конформного (в случае отображений на плоскости — голоморфного) отображения. Более того, между теорией устойчивости конформных отображений (см. [6] и библиографию там же) и теорией устойчивости гармонических отображений [1–5] существует самая прямая связь и по постановке задач, и по характеру результатов, и по методике исследований. Например, в том случае, когда $n = 2$ и $m = 1$, имеет место

Теорема 1. *Пусть $0 \le \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Если $f : U \to \mathbb{R}$, U — область в $\mathbb{R}^2$, — ε-квазигармоническое отображение, то отображение*

$$F = F_1 + F_2 = \partial_x f - i\partial_y f \tag{7}$$

есть решение некоторой системы Бельтрами (6) *с $M \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. Далее, если непрерывная функция $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$, принадлежит классу $W^2_{2,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R})$ и отображение F, определяемое посредством равенств* (7), *является решением системы Бельтрами* (6), *где $M = \varepsilon$, $0 \le \varepsilon < 1$, то тогда f — ε-квазигармоническое отображение.*

Теорема 1 вытекает непосредственно из теоремы А сноски 4 и следующего утверждения.

Лемма 1. *Непрерывная функция $f : U \to \mathbb{R}$, U — область в $\mathbb{R}^2$, является ε-квазигармоническим отображением, $0 \le \varepsilon < 1$, тогда и только тогда, когда отображение F, определяемое равенствами* (7), *есть непрерывное $W^1_{2,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^2)$-решение дифференциального неравенства* (5).

Доказательство леммы 1 легко осуществить, поэтому мы его не приводим.

Отметим еще, что в определенном отношении система дифференциальных уравнений в частных производных из работы [5][5)]

$$\triangle f(x) = Q(x) f''(x), \tag{11}$$

$f = (f_1, \dots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$, U — область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, $Q(x)$ — $(m \times mn^2)$-матрица с измеримыми коэффициентами, причем

$$\|Q\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in U} \|Q(x)\| \le \varepsilon\sqrt{n} \tag{12}$$

($\|Q(x)\|$ — операторная норма матрицы $Q(x)$), в теории устойчивости классов гармонических отображений играет роль, близкую к той роли, которую система Бельтрами играет в теории квазиконформных отображений на плоскости. В частности, теореме А соответствует

[5)] Здесь и ниже

$$\begin{aligned} f''(x) = (\partial_{11} f_1(x) \dots \partial_{1n} f_1(x) \dots \partial_{n1} f_1(x) \dots \partial_{nn} f_1(x) \dots \\ \dots \partial_{11} f_m(x) \dots \partial_{1n} f_m(x) \dots \partial_{n1} f_m(x) \dots \partial_{nn} f_m(x))^T, \end{aligned} \tag{8}$$

$$f'(x) = (\partial_1 f_1(x) \dots \partial_n f_1(x) \dots \partial_1 f_m(x) \dots \partial_n f_m(x))^T, \tag{9}$$

$$f(x) = (f_1(x) \dots f_m(x))^T \tag{10}$$

($(\cdot)^T$ — операция транспонирования матриц; $f'(x)$ мы отождествляем также с производной (дифференциалом) отображения f в точке x).

Лемма 2 (см. лемму 1 в [5]). *Отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$ является ε-квазигармоническим, $0 \le \varepsilon < 1$, в том и только том случае, когда оно есть W^2-решение в U системы (11) уравнений с частными производными, для которой выполнено условие (12).*

2. Аналог свойства среднего арифметического гармонических функций для ε-квазигармонических отображений при малых значениях параметра ε.

Теорема 2. *Пусть $0 < \rho < 1$. Существует неотрицательная функция $\alpha_\rho = \alpha_{\rho,n,m} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, удовлетворяющая условиям:*

(i) $\alpha_\rho(\varepsilon) \to \alpha_\rho(0) = 0$ *при* $\varepsilon \searrow 0$;

(ii) *если $f : U \to \mathbb{R}^m$, где U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, есть ε-квазигармоническое отображение, то для каждой сферы $\sigma(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n, |y - x| = r\}$ такой, что шар $B(x, \rho^{-1}r) = \{y \in \mathbb{R}^n, |y - x| < \rho^{-1}r\}$ содержится в U, выполняется неравенство*

$$\left| f(x) - \frac{1}{S_n r^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=r} f(y) ds_y \right| \le 4\alpha_\rho(\varepsilon) r \operatorname{diam}\{f'(B(x, \rho^{-1}r))\}, \tag{13}$$

где $S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$ и $\operatorname{diam}\{f'(B(x, \rho^{-1}r))\} = \sup\limits_{t_1, t_2 \in B(x, \rho^{-1}r)} \|f'(t_1) - f'(t_2)\|$ ($\|a\|$ — операторная норма линейного отображения $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$);

(iii) *если f — непрерывное отображение класса $W^2_{p,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^m)$, $p > n$, причем для каждой точки $x \in U$ найдется число $r_x > 0$ такое, что*

$$\left| f(x) - \frac{1}{S_n r^{n-1}} \int\limits_{|y-x|=r} f(y) ds_y \right| \le \varepsilon r \operatorname{diam}\{f'(B(x, \rho^{-1}r))\} \tag{14}$$

всякий раз, когда $B(x, \rho^{-1}r) \subset U$ и $r < r_x$, то тогда f есть $\{\alpha_\rho(\varepsilon)\}$-квазигармоническое отображение.

Доказательство. Предположим, что $0 < \rho < 1$. Тогда в силу теоремы 6 статьи [4] существует неотрицательная функция $\zeta_\rho = \zeta_{\rho,n,m} : [0, 1[\to [0, +\infty[$, обладающая свойствами: (a) $\zeta_\rho(\varepsilon) \to \zeta_\rho(0) = 0$, когда $\varepsilon \searrow 0$; (b) если $f : U \to \mathbb{R}^m$, U — область в $\mathbb{R}^n$, является ε-квазигармоническим отображением ($0 \le \varepsilon < 1$), то для каждого шара $B = B(x, r)$ такого, что $B(x, \rho^{-1}r) \subset U$, и для каждого числа $\gamma > 0$ существует гармоническое отображение $g : B \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющее неравенствам

$$|f(y) - g(y)|/2\rho r + \|f'(y) - g'(y)\| \le [\zeta_\rho(\varepsilon) + \gamma] \operatorname{diam} f'(B(x, \rho^{-1}r)), \quad y \in B. \tag{15}$$

Учитывая, что из неравенств (15) вытекают, в свою очередь, неравенства

$$|f(y) - g(y)| \le 2\rho r[\zeta_\rho(\varepsilon) + \gamma] \operatorname{diam} f'(B(x, \rho^{-1}r)), \quad y \in \operatorname{cl} B,$$

которым можно придать вид равенств

$$f(y) = g(y) + 2\rho r[\zeta_\rho(\varepsilon) + \gamma] u(y) \operatorname{diam} f'(B(x, \rho^{-1}r)), \quad |u(y)| < 1, \quad y \in \operatorname{cl} B(x, r),$$

мы посредством цепочки последовательных выкладок получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)-\frac{1}{S_nr^{n-1}}\int\limits_{|y-x|=r} f(y)\,ds_y\right|\\
&=\left|f(x)-g(x)-2\rho r[\zeta_\rho(\varepsilon)+\gamma]\{\operatorname{diam} f'(B(x,\rho^{-1}r))\}\frac{1}{S_nr^{n-1}}\int\limits_{|y-x|=r} u(y)\,dy\right|\\
&\qquad\le |f(x)-g(x)|+2\rho r[\zeta_\rho(\varepsilon)+\gamma]\{\operatorname{diam} f'(B(x,\rho^{-1}))\}\\
&\qquad\qquad\le 4\rho r[\zeta_\rho(\varepsilon)+\gamma]\operatorname{diam} f'(B(x,\rho^{-1}r)). \quad (16)
\end{aligned}$$

Соотношения (16), произвол в выборе числа γ и условие (a), которому удовлетворяет функция ζ_ρ, приводят нас к утверждению (ii) теоремы. При этом в качестве функции α_ρ в неравенстве (13) можно принять функцию $\varepsilon\mapsto\rho\zeta_\rho(\varepsilon)$.

Докажем теперь утверждение (iii). С этой целью рассмотрим непрерывное отображение $f\in W^2_{p,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{R}^m)$, $p>n$, удовлетворяющее соотношению (14) с $\varepsilon<4^{-1}n^{-1/2}\rho$. В силу определения квазигармонического отображения нам достаточно доказать выполнение неравенства (1), в котором роль ε в данном случае будет играть величина $\alpha_\rho(\varepsilon)=4n^{\frac12}\rho^{-1}\varepsilon$, почти во всех точках множества U. Пусть x — точка множества U такая, что в этой точке f дважды дифференцируемо (заметим, что этим свойством обладают почти все точки U), и пусть V — достаточно малая окрестность точки x. Тогда если число r таково, что $B(x,\rho^{-1}r)\subset V$, то

$$\begin{aligned}
&f(x)-\frac{1}{S_nr^{n-1}}\int\limits_{|y-x|=r} f(y)ds_y=\frac{1}{S_nr^{n-1}}\int\limits_{|y-x|=r}[f(x)-f(y)]ds_y\\
&\quad=\frac{1}{2S_nr^{n-1}}\left\{\int\limits_{|y-x|=r}\sum_{j=1}^n\partial_{jj}f(x)(y_j-x_j)^2\,dy+\int\limits_{|y-x|=r} o(|y-x|^2)\,dy\right\}\\
&\quad=\frac{1}{2S_nr^{n-1}}\{n^{-1}S_nr^{n+1}\triangle f(x)+S_nr^{n+1}o(r)\}=\frac{r^2}{2}\{n^{-1}\triangle f(x)+o(r)\}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Далее,

$$\operatorname{diam} f'(B(x,\rho^{-1}r))=\sup_{t_1,t_2\in B(x,\rho^{-1}r)}\|f'(t_1)-f'(t_2)\|\le 2\rho^{-1}r\left\{\sum_{s,k=1}^n|\partial_{sk}f(x)|^2\right\}^{1/2}.$$

Следовательно, в силу соотношений (14) и (17) имеем

$$\frac{r^2}{2}|n^{-1}\triangle f(x)+o(r)|\le\varepsilon r\operatorname{diam} f'(B(x,\rho^{-1}r))\le 2\varepsilon\rho^{-1}r^2\left\{\sum_{s,k=1}^n|\partial_{sk}f(x)|^2\right\}^{1/2}$$

и (тем самым)

$$|\triangle f(x)+o(r)|\le 4n\varepsilon\rho^{-1}\left\{\sum_{s,k=1}^n|\partial_{sk}f(x)|^2\right\}^{1/2}. \quad (18)$$

Устремляя теперь в (18) r к нулю, мы приходим для отображения f к неравенству (1), где роль параметра ε играет сейчас величина $4n^{\frac12}\rho^{-1}\varepsilon$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. В доказательстве теоремы 2 мы строим функцию α_ρ не на всем промежутке $[0,+\infty[$, а на конечном его подпромежутке вида $[0,c[$. Очевидно, что продолжение этой функции на весь промежуток $[0,+\infty[$ не только не составляет трудностей, но в нем нет и необходимости в силу асимптотического характера рассматриваемых в теореме эффектов устойчивости.

Замечание 2. В ходе доказательства теоремы 2 мы получили явную оценку для функции α_ρ в утверждении (iii): если $\varepsilon < 4^{-1}n^{-\frac{1}{2}}\rho$, то в качестве α_ρ можно принять функцию $\varepsilon \mapsto 4n^{\frac{1}{2}}\rho^{-1}\varepsilon$.

Замечание 3. Обращаем внимание читателя на то, что в статье [35], в которой анонсированы основные результаты настоящей работы, в формулировке обсуждаемой сейчас теоремы допущена описка: в правой части неравенства, соответствующего неравенству (13) данной статьи, пропущен множитель r (см. теорему 5 в [35]).

3. Об устойчивости в формуле Пуассона для гармонических отображений в шаре. В данном пункте мы устанавливаем, что в формуле Пуассона для гармонических функций в шаре имеет место следующий эффект устойчивости: при малых значениях параметра ε для ε-квазигармонических отображений шара можно предъявить формулу решений внутренней задачи Дирихле, близкую к формуле Пуассона и превращающуюся в саму эту формулу в случае гармонических отображений. Заметим, что в силу леммы 2 достаточно убедиться в наличии обсуждаемого эффекта устойчивости для W_p^2-решений систем (11), (12). В действительности же мы решаем более общую задачу, которая состоит в следующем.

Пусть n и m — натуральные числа, $n \geq 2$, $m \geq 1$, и

$$Df(x) = Y(x)f''(x) + Z(x)f'(x) + E(x)f(x) + G(x) = 0 \tag{19}$$

— система линейных дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка с измеримыми коэффициентами, областью определения которых является единичный шар $B = B(0,1)$ пространства $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1,\dots,f_m) : B \to \mathbb{R}^m$ — отображение в $\mathbb{R}^m$ шара B. Заметим, что запись в (19) матричная: $Y(x)$, $Z(x)$, $E(x)$ и $G(x)$ — $(m \times mn^2)$-, $(m \times mn)$-, $(m \times m)$- и $(m \times 1)$-матрицы соответственно.

Предполагая далее, что дифференциальный оператор D близок к оператору Лапласа, в настоящем пункте для W_p^2-решений системы (19) мы решаем задачу, поставленную в начале пункта для решений систем (11), (12).

Перейдем к точным формулировкам и подробному обсуждению результатов. С этой целью обозначим символами Φ, T, R и $\widetilde{\mathscr{I}}$ оператор со значениями в пространстве $\mathscr{A}(B,\mathbb{R}^m)$ вещественно аналитических отображений, областью определения которого является пространство $C(\sigma,\mathbb{R}^m)$ (всех) непрерывных отображений $\psi : \sigma \to \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$ единичной сферы $\sigma = \sigma(0,1)$ пространства $\mathbb{R}^n$, такой, что $\Phi\psi$, $\psi \in C(\sigma,\mathbb{R}^m)$, представляет собой интеграл Пуассона

$$(\Phi\psi)(x) = \frac{1}{S_n}\int\limits_\sigma \frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}\psi(y)ds_y, \quad x \in B, \tag{20}$$

и (соответственно) интегральные операторы

$$(Th)(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)S_n}\int\limits_{|y|<1}\left[\frac{1}{|y-x|^{n-2}} - \frac{|y|^{n-2}}{|y-|y|^2x|^{n-2}}\right]h(y)\,dy, & n \geq 3,\\ -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y|<1}\left[\ln\frac{1}{|y-x|} - \ln\frac{|y|}{|y-|y|^2x|}\right]h(y)\,dy, & n = 2, \end{cases}$$

$$(R_j h)(x) = -\frac{1}{S_n} \int\limits_{|y|<1} \left\{ \frac{y_j - x_j}{|y-x|^n} - |y|^n \frac{y_j - |y|^2 x_j}{|y-|y|^2 x|^n} \right\} h(y)\,dy, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(\widetilde{\mathscr{I}} h)(x) = \{(\widetilde{\mathscr{I}}_{js} h)(x),\ j, s = 1, \dots, n\},$$

где

$$(\widetilde{\mathscr{I}}_{ss} h)(x) = \frac{1}{n} h(x) + (\mathscr{I}_{ss} h)(x) = \frac{1}{n} h(x)$$
$$- \frac{1}{S_n} \int\limits_{|y|<1} \left[\frac{n(y_s - x_s)^2 - |y-x|^2}{|y-x|^{n+2}} - |y|^{n+2} \frac{n(y_s - |y|^2 x_s)^2 - |y-|y|^2 x|^2}{|y-|y|^2 x|^{n+2}} \right] h(y)\,dy$$

и

$$(\widetilde{\mathscr{I}}_{js} h)(x) = (\mathscr{I}_{js} h)(x)$$
$$= -\frac{n}{S_n} \int\limits_{|y|<1} \left[\frac{(y_j - x_j)(y_s - x_s)}{|y-x|^{n+2}} - |y|^{n+2} \frac{(y_j - |y|^2 x_j)(y_s - |y|^2 x_s)}{|y-|y|^2 x|^{n+2}} \right] h(y)\,dy,$$

$j \neq s$ ($x \in B$; $h \in L_p(B, \mathbb{R}^m)$, $p > 1$). Обращаем внимание читателя на то, что ядра операторов T, R и $\mathscr{I}$ представляют собой соответственно функцию $\mathscr{G}(x, y)$ Грина «внутренней» задачи Дирихле для шара B в случае уравнения Лапласа и ее производные (по x) 1-го и 2-го порядков. При этом последний из этих операторов строится на основе интегралов, понимаемых в смысле главного значения по Коши, и является ограниченным линейным оператором банаховых пространств $L_p(B, \mathbb{R}^m)$ и $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{mn^2})$ (см. [5])[6)].

Теорема 3. *Предположим, что* $n < p < +\infty$ *и* $Z \in L_p(B, \mathbb{R}^{m\times mn})$, $E \in L_p(B,\ \mathbb{R}^{m\times m})$ *и* $G \in L_p(B, \mathbb{R}^{m\times 1})$. *Тогда существует число* $\varepsilon_p = \varepsilon_{p,n,m} > 0$ *такое, что если условие*

$$|Y(x)g''(x) - \triangle g(x)| = |Q(x)g''(x)| = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{j,s=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} Q^k_{j,s,l}(x) \partial_{js} g_l(x) \right]^2 \right\}^{1/2}$$
$$\le \varepsilon \left\{ n \sum_{j,s=1}^{n} |\partial_{js} g(x)|^2 \right\}^{1/2}, \quad 0 \le \varepsilon < \varepsilon_p, \tag{21}$$

выполняется почти всюду в B *всякий раз, когда отображение* g *принадлежит пространству* $W^2_{1,\mathrm{loc}}(B, \mathbb{R}^m)$, *то каждое* $\left\{W^2_{2,\mathrm{loc}}(B, \mathbb{R}^m) \cap C^1(B, \mathbb{R}^m)\right\}$*-решение* f *системы* (19) *является ее* $W^2_{p,\mathrm{loc}}(B, \mathbb{R}^m)$*-решением. Далее, допустим, кроме того, что* p*-норма*

$$\|ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p = \sup_{h \in L_p(B, \mathbb{R}^m),\, \|h\|_{p,B} = 1} \|(ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}})h\|_{p,B}$$

[6)] Отметим, что в формулировке леммы 3 в [5] имеются следующие описки.

1. В 5-й и 6-й строках сверху на с. 347 вместо «$L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$» следует читать «$L_p(B, \mathbb{R}^m)$».

2. Последнее предложение первого абзаца на с. 348 должно выглядеть так: «В свою очередь последнее (при $p > n$) вытекает из теоремы 1 монографии [4, § 6]».

Обращаем внимание читателя также на то, что в формулировке леммы 2 в [5], с которой лемма 3 (из [5]) находится в тесной связи, вместо «И пусть $f : \mathrm{cl}\, B \to \mathbb{R}^m$ — отображение...» следует читать «И пусть $f : \mathrm{cl}\, B \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение...»

($\|h\|_{p,B} = \|h\|_{L_p(B,\mathbb{R}^m)} = \big\{ \int\limits_{|x|<1} |h(x)|^p dx \big\}^{1/p}$) *линейного интегрального оператора*[7] $ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}$ *меньше* 1. *Тогда*

(i) *если* $\psi : \sigma \to \mathbb{R}^m$ *есть след (в смысле теории пространств Соболева) на сфере* σ *отображения пространства* $W_p^2(B, \mathbb{R}^m)$, *то формула*[8]

$$\begin{aligned} f(x) &= (\Phi\psi)(x) \\ &- (T([I + (ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}})]^{-1}(G + E(\Phi\psi) + Z(\Phi\psi)' + Q(\Phi\psi)'')))(x) = (\Phi\psi)(x) \\ &- \sum_{\nu=0}^{\infty}(T((-[ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}])^{\nu}(G + E(\Phi\psi) + Z(\Phi\psi)' + Q(\Phi\psi)'')))(x), \end{aligned} \tag{22}$$

$x \in B$, *определяет* $\big\{W_p^2(B, \mathbb{R}^m) \cap C^1(B, \mathbb{R}^m)\big\}$-*решение системы* (19), *непрерывное в замыкании* $\operatorname{cl} B$ *шара* B *и удовлетворяющее краевому условию* $f|_\sigma = \psi$;

(ii) *для каждого непрерывного решения* $f : \operatorname{cl} B \to \mathbb{R}^m$ *класса* $W_p^2(B, \mathbb{R}^m)$ *системы* (19) *имеет место формула* (22), *где* $\psi = f|_\sigma$.

Замечание 1. $L_p(B, \mathbb{R}^{\mu\times\nu})$ — лебегово пространство измеримых матричнозначных отображений шара B, суммируемых с p-й степенью; $C^1(B, \mathbb{R}^m)$ — пространство непрерывно дифференцируемых отображений в $\mathbb{R}^m$ шара B. Следует отметить, что в силу теорем вложения [36] и теорем об (l, p)-продолжении [37] каждое отображение $f \in W_p^2(B, \mathbb{R}^m)$ при $p > n$ принадлежит классу $C^1(B, \mathbb{R}^m)$ и как само оно, так и его частные производные $\partial_j f$, $j = 1, \dots, n$, 1-го порядка продолжаются по непрерывности в замыкание $\operatorname{cl} B$ шара B.

Замечание 2. Отображение $Q(x) = \big\{Q_{j,s,l}^k(x)\big\}$, $x \in B$, из соотношений (21) определяется для почти всех $x \in B$ равенствами $Q_{j,s,l}^k(x) = Y_{s,s,l}^k(x) - 1$, если $j = s$, и $= Y_{j,s,l}^k(x)$, если $j \neq s$, $j, s = 1, 2, \dots, n$; $k, l = 1, 2, \dots, m$ ($Y(x) = \big\{Y_{j,s,l}^k(x)\big\}$). Само условие (21) можно записать в следующей форме: $\|Q\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B} \|Q(x)\| \leq \varepsilon\sqrt{n}$ (ср. с (12)).

Доказательство теоремы 3. Существование числа $\varepsilon_p > 0$, удовлетворяющего первому из утверждений теоремы, вытекает из теоремы 2 работы [33].

Для доказательства утверждения (ii) применим лемму 2 статьи [5]. В силу этой леммы для $x \in B$ имеет место равенство

$$f(x) = (\Phi\psi)(x) + (T\triangle f)(x), \tag{23}$$

если $f \in W_p^2(B, \mathbb{R}^m)$, $p > n$ (ψ — след отображения f на граничной сфере σ шара B). Предполагая, что $f : \operatorname{cl} B \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное $W_p^2(B, \mathbb{R}^m)$-решение, $p > n$, системы (19) (т. е. f непрерывно, а его ограничение $f|_B$ на шар B является $W_p^2(B, \mathbb{R}^m)$-решением этой системы), удовлетворяющей условию $\|ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p < 1$, мы с учетом (23) и уравнений системы приходим к соотношениям

$$f(x) = (\Phi\psi)(x) - (T(G + Ef + Zf' + Qf''))(x), \quad x \in B.$$

---

[7] $(ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}})(h)$ есть отображение $x \mapsto E(x)(Th)(x) + Z(x)(Rh)(x) + Q(x)(\widetilde{\mathscr{I}}h)(x)$, $x \in B$, $h \in L_p(B, \mathbb{R}^m)$. Здесь $(Th)(x)$, $(Rh)(x)$ и $(\widetilde{\mathscr{I}}h)(x)$ подобно $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ в (10), (9) и (8) рассматриваются как матрицы-столбцы (($\widetilde{\mathscr{I}}h)(x)$ можно получить, заменяя в (8) $\partial_{js} f_l$ символами $(\widetilde{\mathscr{I}}_{js} h_l)(x)$; $(Rh)(x)$ — заменой символов $\partial_j f_l$ в (9) символами $(R_j h_l)(x)$; наконец, $(Th)(x)$ — заменой в (10) символов $f_l(x)$ символами $(Th_l)(x)$).

[8] I — единичный (тождественный) оператор пространства $L_p(B, \mathbb{R}^m)$, $[\cdot]^{-1}$ — операция взятия обратного оператора, Θ^ν — ν-я степень оператора Θ.

Продолжая эти рассуждения и используя при этом лемму 3 статьи [5], последовательно получаем (для $x \in B$)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (\Phi\psi)(x) - (T\gamma)(x) - (T([ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}]\triangle f))(x) \\
&= (\Phi\psi)(x) - (T\gamma)(x) + (T([ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}](G + Ef + Zf' + Qf'')))(x) \\
&= (\Phi\psi)(x) - (T((I - [ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}])\gamma))(x) + (T([ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}]^2\triangle f))(x) \\
&= \dots = (\Phi\psi)(x) - \sum_{\nu=0}^{\mu}(T((-[ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}])^{\nu}\gamma))(x) \\
&\qquad + (T((-[ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}])^{\mu+1}\triangle f))(x),
\end{aligned}
$$

$\mu = 0, 1, 2, \dots$. Здесь (и ниже) $\gamma = G + E(\Phi\psi) + Z(\Phi\psi)' + Q(\Phi\psi)''$.

Учитывая теперь, что из выводимых ниже оценок (36) и (37) и из условия $\|ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p < 1$ вытекают соотношения

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x\in B}|T((-[ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}])^{\mu+1}\triangle f)(x)| \\
&\qquad \le M(p,n)\{\|ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p\}^{\mu+1}\|\triangle f\|_{p,B} \to 0, \quad \mu \to +\infty \qquad (24)
\end{aligned}
$$

(величина $M(p,n)$ определяется равенствами (28) и (29)), мы убеждаемся в сходимости ряда $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(T((-[ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}])^{\nu}\gamma))(x)$ к $f - \Phi\psi$ в C-норме. И так как ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-[ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}}])^{\nu}$ сходится в p-норме $\|\cdot\|_p$ (более точно, в силу условия $\|ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p < 1$ он сходится «нормально»: $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\|(-[ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}])^{\nu}\|_p \le \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\|ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p^{\nu} = (1-\|ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p)^{-1}$), причем его сумма в этой норме является обратным оператором к оператору $I + (ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}})$, то утверждение (ii) доказано.

Нам осталось доказать утверждение (i) теоремы. С этой целью, предполагая, что $\psi : \sigma \to \mathbb{R}^m$ есть след на сфере σ некоторого отображения $F \in W_p^2(B, \mathbb{R}^m)$, $p > n$, применим к F формулу (23):

$$
F(x) = (\Phi\psi)(x) + (T\triangle F)(x), \quad x \in B. \qquad (25)
$$

Из формулы (25) вытекает, что отображение $\Phi\psi$ также принадлежит пространству[9)] $W_p^2(B, \mathbb{R}^m)$ и, следовательно, $\gamma \in L_p(B, \mathbb{R}^m)$. Принимая еще во внимание (отмеченную выше) нормальную сходимость ряда $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-[ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}])^{\nu}$ к оператору $[I + (ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}})]^{-1}$, мы легко убеждаемся в том, что при выполнении условия $\|ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p < 1$ ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-[ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}])^{\nu}\gamma$ сходится к отображению $[I + (ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}})]^{-1}\gamma$ в пространстве $L_p(B, \mathbb{R}^m)$ и тем самым ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}T((-[ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}])^{\nu}\gamma)$ сходится в $C(B, \mathbb{R}^m)$, причем его сумма есть

9) $\|\Phi\psi\|_{W_p^2(B,\mathbb{R}^m)} = \{(\|\Phi\psi\|_{p,B})^p + (\|(\Phi\psi)'\|_{p,B})^p + (\|(\Phi\psi)''\|_{p,B})^p\}^{1/p}$
$\le \|F\|_{W_p^2(B,\mathbb{R}^m)} + \{(\|T\triangle F\|_{p,B})^p + (\|R\triangle F\|_{p,B})^p + (\|\widetilde{\mathscr{I}}\triangle F\|_{p,B})^p\}^{1/p} < +\infty.$

отображение $T([I+(ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}})]^{-1}\gamma)$, для этих рядов и последнего отображения имеют место равенства, указанные в (22), и ψ является граничным значением отображения (22) (доказательство этого утверждения основывается на соображениях, использованных при выводе соотношений (24)).

Покажем, что в условиях утверждения (i) отображение (22) является $W_p^2(B,\mathbb{R}^m)$-решением системы (19) (согласно замечанию 1 f принадлежит также классу $C^1(\operatorname{cl}B,\mathbb{R}^m)$).

Действительно, из изложенного выше следует, что отображение

$$h(x)=([I+(ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}})]^{-1}\gamma)(x),\quad x\in B,$$

принадлежит пространству $L_p(B,\mathbb{R}^m)$. Но тогда отображение Th (а вместе с ним и отображение f из (22)) принадлежит пространству $W_p^2(B,\mathbb{R}^m)$ (см. лемму 3 работы [5]). Далее, учитывая гармоничность интеграла Пуассона $\Phi\psi$ и еще раз лемму 3 из [5] и отправляясь от (22), мы приходим (для почти всех $x\in B$) к равенству

$$\triangle f(x)=-h(x). \tag{26}$$

С другой стороны, также для почти всех $x\in B$

$$\begin{aligned}G(x)&+E(x)f(x)+Z(x)f'(x)+Q(x)f''(x)\\ &=\gamma(x)-([ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}}]([I+(ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}})]^{-1}\gamma))(x)\\ &=\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(-[ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}}])^{\nu}\gamma\right)(x)=([I+(ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}})]^{-1}\gamma)(x). \end{aligned}\tag{27}$$

Из соотношений (26) и (27) и принадлежности отображения f пространству $W_p^2(B,\mathbb{R}^m)$ вытекает, что f является $W_p^2(B,\mathbb{R}^m)$-решением системы (19). Доказательство теоремы 3 полностью завершено.

В связи с теоремой 3 возникает вопрос о явных количественных оценках рассматриваемых в ней эффектов устойчивости в формуле Пуассона для гармонических функций в шаре. Мы сейчас получим одну оценку такого типа. С этой целью рассмотрим следующие величины (при $p>n$; $n=2,3,\dots$; $m=1,2,\dots$):

$$M(p,n)=\frac{S_n^{-\frac{1}{p}}}{n-2}\left(\frac{p-1}{2p-n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left[2^{2-\frac{n}{p}}+3^{2-\frac{n}{p}}\left(1+\frac{2p-n}{n(p-1)}6^{-\frac{2p-n}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}}\right], \tag{28}$$

если $n\geq 3$,

$$\begin{aligned}M(p,2)=&\left[\int_{-\ln 2}^{+\infty}|\tau|^{\frac{p}{p-1}}e^{-2\tau}d\tau\right]^{1-\frac{1}{p}}\\ &+\left[16\int_{\ln 2}^{+\infty}\tau^{\frac{p}{p-1}}e^{-2\tau}d\tau+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\tau^{\frac{p}{p-1}}e^{2\tau}d\tau+\frac{1}{8}(\ln 2)^{\frac{p}{p-1}}\right]^{1-\frac{1}{p}},\end{aligned}\tag{29}$$

$$N(p,n)=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{S_n^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left\{2^{1-\frac{n}{p}}+\left[3^{\frac{p-n}{p-1}}+\frac{p-n}{(n+1)p-n}2^{-\frac{2p-n}{p-1}}\right]^{1-\frac{1}{p}}\right\}$$

и

$$\begin{aligned}C(p,n,m)=p(mn)^{\frac{1}{2}}\Bigg\{&\left[\frac{1}{np}+4A_{11}\exp\left(\frac{72}{A_{11}}\left(A_{11}+2(A_{12})^2\right)^2\right)\right]^2\\ &+(n-1)\left[4A_{21}\exp\left(\frac{72}{A_{21}}\left(A_{21}+2(A_{22})^2\right)^2\right)\right]^2\Bigg\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

где

$$A_{11} = (1+4^n)\left\{\pi n\frac{2^{n-1}-1}{n-1} + (n-1)\left(4\pi + \ln\frac{27}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k-1}{k}\right)\right\}^2$$

$$+ 2^n\left\{n^{\frac{n}{2}} + 4\left[\pi n\frac{2^{n-1}-1}{n-1} + (n-1)\left(\ln\frac{9}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k-1}{k}\right)\right]\right\},$$

$$A_{12} = \frac{1}{2}\left\{\pi n\frac{2^{n-1}-1}{n-1} + (n-1)\left(4\pi + \ln\frac{27}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k-1}{k}\right)\right\},$$

$$A_{21} = (1+4^n)\left\{\pi n\frac{2^{n-1}-1}{n-1} + \frac{n}{2}\left(4\pi + \ln\frac{27}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k-1}{k}\right)\right\}^2$$

$$+ 2^n\left\{n^{\frac{n}{2}} + 4\left[\pi n\frac{2^{n-1}-1}{n-1} + \frac{n}{2}\left(\ln\frac{9}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k-1}{k}\right)\right]\right\},$$

$$A_{22} = \frac{1}{2}\left\{\pi n\frac{2^{n-1}-1}{n-1} + \frac{n}{2}\left(4\pi + \ln\frac{27}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k-1}{k}\right)\right\}.$$

Используя величины $M(p,n)$, $N(p,n)$ и $C(p,n,m)$, упомянутую оценку мы представим таким утверждением.

Теорема 4. *Если $p > n$, $n \geq 2$, $m \geq 1$ и*

$$M(p,n)\|E\|_{p,B} + N(p,n)\|Z\|_{p,B} + C(p,n,m)\|Q\|_\infty < 1 \tag{30}$$

($\|E\|_{p,B} = \big\{\int\limits_{|x|<1}\|E(x)\|^p dx\big\}^{1/p}$, $\|Z\|_{p,B} = \big\{\int\limits_{|x|<1}\|Z(x)\|^p dx\big\}^{1/p}$, где $\|E(x)\|$ и $\|Z(x)\|$ — операторные нормы матриц $E(x)$ и $Z(x)$), то

$$\|ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p < 1.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\|ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p$ меньше левой части неравенства (30). Для этого мы сначала применим неравенство треугольника

$$\|ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p \leq \|ET\|_p + \|ZR\|_p + \|Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p,$$

а затем оценим каждое из слагаемых в его правой части в отдельности.

Оценивая $\|ET\|_p$, рассмотрим отображение $h \in L_p(B,\mathbb{R}^m)$ и затем оценим $L_p(B,\mathbb{R}^m)$-норму отображения $(ET)h$. Имеем

$$\|(ET)h\|_{p,B} = \left\{\int\limits_{|x|<1}|E(x)(Th)(x)|^p dx\right\}^{1/p} \leq \|E\|_{p,B}\max_{|x|<1}|(Th)(x)|. \tag{31}$$

Далее возможны два случая: $n \geq 3$ и $n = 2$.

В силу определения оператора T в первом из этих случаев

$$|(Th)(x)| \leq \frac{1}{(n-2)S_n}\left[\left|\int\limits_{|y|<1}\frac{h(y)\,dy}{|y-x|^{n-2}}\right| + \left|\int\limits_{|y|<1}\frac{|y|^{n-2}h(y)\,dy}{|y-|y|^2x|^{n-2}}\right|\right], \quad x \in B. \tag{32}$$

И так как

$$\left|\int\limits_{|y|<1} \frac{h(y)\,dy}{|y-x|^{n-2}}\right| \le \|h\|_{p,B}\||\cdot - x|^{-(n-2)}\|_{\frac{p}{p-1},B}, \tag{33}$$

где

$$\||\cdot - x|^{-(n-2)}\|_{\frac{p}{p-1},B} \le \Bigg\{ \int\limits_{|y-x|<2} |y-x|^{-\frac{p(n-2)}{p-1}}\,dy\Bigg\}^{1-\frac{1}{p}} = \Bigg\{S_n \frac{p-1}{2p-n} 2^{\frac{2p-n}{p-1}}\Bigg\}^{1-\frac{1}{p}},$$

а

$$\left|\int\limits_{|y|<1} \frac{|y|^{n-2}h(y)\,dy}{|y-|y|^2x|^{n-2}}\right| \le \|h\|_{p,B}\left\|\frac{|\cdot|^{n-2}}{|\cdot - |\cdot|^2x|^{n-2}}\right\|_{\frac{p}{p-1},B}, \tag{34}$$

причем

$$\left\|\frac{|\cdot|^{n-2}}{|\cdot - |\cdot|^2x|^{n-2}}\right\|_{\frac{p}{p-1},B} = \Bigg\{\int\limits_{|y|>1}\left(\frac{|y|}{|y-x|}\right)^{\frac{p(n-2)}{p-1}} \frac{dy}{|y|^{2n}}\Bigg\}^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\le \Bigg\{\int\limits_{\substack{|y-x|<3,\\ |y|>1}} + \int\limits_{|y|>2}\Bigg\}^{1-\frac{1}{p}} < \Bigg\{\int\limits_{|y-x|<3} |y-x|^{-\frac{p(n-2)}{p-1}}\,dy$$

$$+ 2^{\frac{p(n-2)}{p-1}} \int\limits_{|y|>2} \frac{dy}{|y|^{2n}}\Bigg\}^{1-\frac{1}{p}} = \Bigg\{S_n\left(\frac{p-1}{2p-n}3^{\frac{2p-n}{p-1}} + \frac{1}{n}2^{-\frac{2p-n}{p-1}}\right)\Bigg\}^{1-\frac{1}{p}}$$

(здесь использовано очевидное неравенство

$$\frac{2}{3} < \frac{|y|}{|y-x|} < 2, \tag{35}$$

$|y| > 2$, $|x| < 1$, $n \ge 2$), то

$$|(Th)(x)| \le M(p,n)\|h\|_{p,B}, \quad x \in B, \tag{36}$$

и, следовательно, с учетом (31) мы получаем неравенство

$$\|ET\|_p \le M(p,n)\|E\|_{p,B}, \quad n \ge 3.$$

В случае же $n = 2$ при $x \in B$

$$|(Th)(x)| \le \frac{1}{2\pi}\left[\left|\int\limits_{|y|<1} h(y)\ln\frac{1}{|y-x|}\,dy\right| + \left|\int\limits_{|y|<1} h(y)\ln\frac{|y|}{|y-|y|^2x|}\,dy\right|\right] = I_1 + I_2,$$

$$I_1 \le \frac{\|h\|_{p,B}}{2\pi}\left\|\ln\frac{1}{|\cdot - x|}\right\|_{\frac{p}{p-1},B} \le \frac{\|h\|_{p,B}}{2\pi}\Bigg\{\int\limits_{|y|<2}\left|\ln\frac{1}{|y|}\right|^{\frac{p}{p-1}}dy\Bigg\}^{1-\frac{1}{p}}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{p}}\|h\|_p\Bigg\{\int\limits_{-\ln 2}^{+\infty} |\tau|^{\frac{p}{p-1}} e^{-2\tau}\,d\tau\Bigg\}^{1-\frac{1}{p}},$$

$$I_2 \le \frac{\|h\|_{p,B}}{2\pi}\left\|\ln\frac{|\cdot|}{|\cdot - |\cdot|^2x|}\right\|_{\frac{p}{p-1},B},$$

$$\left(\left\|\ln\frac{|\cdot|}{|\cdot-|\cdot|^2x|}\right\|_{\frac{p}{p-1},B}\right)^{\frac{p}{p-1}}=\int\limits_{|y|>1}\left|\ln\frac{|y|}{|y-x|}\right|^{\frac{p}{p-1}}\frac{dy}{|y|^4}$$

$$\le\int\limits_{\substack{|y-x|<2,\\|y|>1}}\left|\ln\frac{4}{|y-x|}\right|^{\frac{p}{p-1}}dy+\int\limits_{\substack{2\le|y-x|\le3,\\|y|>1}}(\ln|y-x|)^{\frac{p}{p-1}}\,dy+\int\limits_{|y|>2}(\ln 2)^{\frac{p}{p-1}}\frac{dy}{|y|^4}$$

$$=32\pi\int\limits_{\ln 2}^{+\infty}\tau^{\frac{p}{p-1}}e^{-2\tau}d\tau+2\pi\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\tau^{\frac{p}{p-1}}e^{2\tau}d\tau+\frac{\pi}{4}(\ln 2)^{\frac{p}{p-1}}$$

(мы воспользовались здесь, как и выше, неравенством (35), а также тем, что $\left|\ln\frac{|y|}{|y-x|}\right|\le\ln\frac{4}{|y-x|}$, если $|y-x|<2$, $|y|>1$, $|x|<1$, и $\left|\ln\frac{|y|}{|y-x|}\right|\le\ln|y-x|$, если $2\le|y-x|\le3$, $|x|<1$). Тем самым и в этом случае

$$|(Th)(x)|\le M(p,2)\|h\|_{p,B},\quad x\in B,\tag{37}$$

что влечет искомое неравенство

$$\|ET\|_p\le M(p,2)\|E\|_{p,B}.$$

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$\|ZR\|_p\le N(p,n)\|Z\|_{p,B}.$$

При этом неравенствам (31)–(34) соответствуют неравенства

$$\|(ZR)h\|_{p,B}\le\|Z\|_{p,B}\max_{|x|\le1}|(Rh)(x)|,$$

$$|(Rh)(x)|=\left\{\sum_{j=1}^{n}[(R_jh)(x)]^2\right\}^{1/2}\le\sqrt{n}\max_j\max_{|x|\le1}|(R_jh)(x)|,$$

$$|(R_jh)(x)|\le\frac{1}{S_n}\left[\int\limits_{|y|<1}\frac{|h(y)|\,dy}{|y-x|^{n-1}}+\int\limits_{|y|<1}\frac{|y|^n|h(y)|\,dy}{|y-|y|^2x|^{n-1}}\right],$$

$$\frac{1}{S_n}\int\limits_{|y|<1}\frac{|h(y)|\,dy}{|y-x|^{n-1}}\le\frac{\|h\|_{p,B}}{S_n}\left\{\int\limits_{|y-x|<2}\frac{dy}{|y-x|^{\frac{p(n-1)}{p-1}}}\right\}^{1-\frac1p}=\left(\frac{p-1}{p-n}\right)^{1-\frac1p}\frac{\|h\|_{p,B}}{2^{\frac{n}{p}-1}S_n^{\frac1p}}$$

и

$$\frac{1}{S_n}\int\limits_{|y|<1}\frac{|y|^n|h(y)|\,dy}{|y-|y|^2x|^{n-1}}\le\frac{\|h\|_{p,B}}{S_n}\left\{\int\limits_{|y|>1}\left[\frac{|y|^{n-2}}{|y-x|^{n-1}}\right]^{\frac{p}{p-1}}\frac{dy}{|y|^{2n}}\right\}^{1-\frac1p}$$

$$\le\frac{\|h\|_{p,B}}{S_n}\left\{\int\limits_{\substack{|y-x|\le3,\\|y|>1}}\frac{dy}{|y-x|^{\frac{p(n-1)}{p-1}}}+2^{\frac{p(n-1)}{p-1}}\int\limits_{|y|>2}\frac{dy}{|y|^{2n+\frac{p}{p-1}}}\right\}^{1-\frac1p}$$

$$=S_n^{-\frac1p}\left\{\frac{p-1}{p-n}3^{\frac{p-n}{p-1}}+\frac{p-1}{(n+1)p-n}2^{-\frac{2p-n}{p-1}}\right\}^{1-\frac1p}\|h\|_{p,B}.$$

Оценим теперь $\|Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p$. С этой целью отметим прежде всего, что из условия (30) вытекает конечность величины $\|Q\|_\infty$. Поэтому для отображения $h \in L_p(B, \mathbb{R}^m)$ имеем

$$\begin{aligned} \|(Q\widetilde{\mathscr{I}})h\|_{p,B} &\le \|Q\|_\infty \left[\sum_{l=1}^{m} \sum_{j,s=1}^{n} \|\widetilde{\mathscr{I}}_{js} h_l\|_p^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|Q\|_\infty \left\{\sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\|h_l\|_{p,B}}{n} + \|\mathscr{I}_{ss}h_l\|_{p,B}\right)^2 + \sum_{j\ne s}\|\mathscr{I}_{js}h_l\|_p^2\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (38) \end{aligned}$$

Таким образом, вопрос сводится к оцениванию p-нормы оператора $\mathscr{I}$.

Приступая к решению этой задачи, введем отображения $H(x) = h(x)$, $x \in B$, $H(x) = 0$ $(\in \mathbb{R}^m)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$, и $\widetilde{H}(x) = 0$, $x \in B$, $\widetilde{H}(x) = |x|^{-(n+2)}h(x/|x|^2)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$. Не составляет труда проверить (см. доказательство леммы 3 в [5]), что $\|\widetilde{H}_l\|_{p,\mathbb{R}^n} \le \|H_l\|_{p,\mathbb{R}^n} = \|h_l\|_{p,B}$, $l = 1, 2, \dots$. Рассматривая далее оператор $\mathscr{I}$ как оператор, действующий в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (мы сохраняем для этого оператора обозначение $\mathscr{I}$), представим его в виде разности двух операторов $\mathscr{I}^1 - \mathscr{I}^2$, где $\mathscr{I}^1 = \{\mathscr{I}^1_{js},\, j, s = 1, \dots, n\}$,

$$\left.\begin{aligned} \big(\mathscr{I}^1_{ss}H\big)(x) &= -\frac{1}{S_n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{n(y_s - x_s)^2 - |y-x|^2}{|y-x|^{n+2}} H(y)\,dy, \\ \big(\mathscr{I}^1_{js}H\big)(x) &= -\frac{n}{S_n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(y_j - x_j)(y_s - x_s)}{|y-x|^{n+2}} H(y)\,dy \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

и $\mathscr{I}^2 = \mathscr{I} - \mathscr{I}^1$. Учитывая условие $p > n$ и совершая замену переменного $y \mapsto y/|y|^2$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, мы можем аналогично тому, как это было сделано при выводе соотношений (8) в [5], убедиться, что $\mathscr{I}^2 H = \mathscr{I}^1 \widetilde{H}$. Последнее обстоятельство позволяет нам ограничиться оцениванием p-нормы оператора $\mathscr{I}^1$.

Из определения (39) оператора $\mathscr{I}^1$ вытекает, что ядра сингулярных интегральных операторов в (39) удовлетворяют тем же условиям, что и ядро сингулярного интегрального оператора T из соотношений (55) работы [33] (т. е. условиям теорем 2–4 монографии [38, гл. II]). По этой причине мы воспользуемся методом оценивания p-норм последнего, содержащимся в доказательстве теоремы 1 статьи [33].

Следуя рассуждениям этого доказательства, приходим к неравенствам

$$\|\mathscr{I}^1_{js}h_l\|_{p,B} \le \|\mathscr{I}^1_{js}H_l\|_{p,\mathbb{R}^n} \le A_p^{js}\|H\|_{p,\mathbb{R}^n} = A_p^{js}\|h\|_{p,B}, \qquad (40)$$

$j, s = 1, \dots, n$, где

$$A_p^{ss} \le 2pA_{11}\exp\left\{\frac{72}{A_{11}}\big[A_{11} + 2(A_{12})^2\big]^2\right\} \qquad (41)$$

и

$$A_p^{js} \le 2pA_{21}\exp\left\{\frac{72}{A_{21}}\big[A_{21} + 2(A_{22})^2\big]^2\right\} \quad (j \ne s). \qquad (42)$$

Заметим, что при этом мы воспользовались замечанием, содержащимся в сноске 4 статьи [33], а также тем обстоятельством, что ядра

$$K_{ss}(t) = \frac{\Omega_{ss}(t)}{|t|^n} = -\frac{nt_s^2 - |t|^2}{S_n|t|^{n+2}}, \quad K_{js}(t) = \frac{\Omega_{js}(t)}{|t|^n} = -\frac{nt_jt_s}{S_n|t|^{n+2}}$$

операторов $\mathscr{I}^1_{ss}$ и $\mathscr{I}^1_{js}$, $s=1,\dots,n$, $j\neq s$, удовлетворяют условиям

$$|\Omega_{ss}(t)|\le\frac{n-1}{S_n},\quad |\Omega_{js}(t)|\le\frac{n}{2S_n}\quad (j\neq s),$$
$$\left[\sum_{i=1}^{n}|\partial_i\Omega_{js}(t)|^2\right]^{1/2}\le\frac{n}{S_n}\quad (j,s=1,\dots,n),\tag{43}$$

если $|t|=1$, и

$$\int\limits_{|x|\ge 2|y|}\left|\frac{\Omega_{ss}(x-y)}{|x-y|^n}-\frac{\Omega_{ss}(x)}{|x|^n}\right|dx\le\pi n\frac{2^{n-1}-1}{n-1}+(n-1)\left(\ln 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{k-1}-1}{k}\right),\tag{44}$$

$$\int\limits_{|x|\ge 2|y|}\left|\frac{\Omega_{js}(x-y)}{|x-y|^n}-\frac{\Omega_{js}(x)}{|x|^n}\right|dx\le\pi n\frac{2^{n-1}-1}{n-1}+\frac{n}{2}\left(\ln 2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{k-1}-1}{k}\right)\tag{45}$$

$(j\neq s)$, $y\neq 0$ (ср. (43)–(45) с соотношениями (27), (29) и (31) в [33]).

Принимая во внимание (38) и (40)–(42) и отмеченную выше связь между операторами $\mathscr{I}^1$ и $\mathscr{I}^2$, мы легко получаем оценку

$$\|(Q\widetilde{\mathscr{I}})h\|_{p,B}\le C(p,n,m)\|Q\|_\infty\|h\|_{p,B},$$

откуда следует неравенство

$$\|Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p\le C(p,n,m)\|Q\|_\infty.$$

Теорема 4 доказана.

Теорему 3 естественно дополняет

Теорема 5. *В условиях теоремы* 3 *для каждого* $x\in\operatorname{cl}B$ *имеет место неравенство*[10)]

$$|f(x)-(\Phi\psi)(x)|\le\frac{M(p,n)}{1-\|ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p}\{\|G\|_{p,B}+\|E\|_{p,B}\sup_{|x|<1}|(\Phi\psi)(x)|$$
$$+\|Z\|_{p,B}\sup_{|x|<1}|(\Phi\psi)')(x)|+\|Q\|_\infty\|(\Phi\psi)''\|_{p,B}\}.\tag{46}$$

Доказательство. Из условий теоремы 3 вытекает (см. ее доказательство), что как отображение $\gamma=G+E(\Phi\psi)+Z(\Phi\psi)'+Q(\Phi\psi)''$, так и отображение $h=[I+(ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}})]^{-1}\gamma$ суммируемы в B с p-й степенью, причем

$$\|\gamma\|_{p,B}\le\|G\|_{p,B}+\|E\|_{p,B}\sup_{|x|<1}|(\Phi\psi)(x)|+\|Z\|_{p,B}\sup_{|x|<1}|(\Phi\psi)'(x)|+\|Q\|_\infty\|(\Phi\psi)''\|_{p,B}\tag{47}$$

и

$$\|h\|_{p,B}\le\|[I+(ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}})]^{-1}\|_p\|\gamma\|_{p,B}$$
$$\le\sum_{\nu=0}^{\infty}\|ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p^\nu\|\gamma\|_{p,B}=(1-\|ET+ZR+Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p)^{-1}\|\gamma\|_{p,B}.\tag{48}$$

[10)] Нормы $\|G\|_{p,B}$ и $\|(\Phi\psi)''\|_{p,B}$ отображений G и $(\Phi\psi)''$ определяются тем же способом, что и $\|E\|_{p,B}$ и $\|Z\|_{p,B}$.

Следовательно, в случае $|x| < 1$ неравенство (46) вытекает из соотношений (36), (37), (47) и (48).

В том же случае, когда $|x| = 1$, неравенство (46) превращается в равенство $f(x) = (\Phi\psi)(x)$. Теорема доказана.

Неравенство (46) представляет собой оценку устойчивости обсуждаемого нами типа в формуле Пуассона для гармонических отображений шара, т. е. оценку близости в C-норме отображения, определяемого формулой (22), к интегралу Пуассона (20). В частности, в силу (46) имеет место соотношение $\|f - \Phi\psi\|_C \to 0$, когда нормы $\|Q\|_\infty$, $\|Z\|_{p,B}$, $\|E\|_{p,B}$ и $\|G\|_{p,B}$ стремятся к нулю, причем если последние равны 0, то формула (22) превращается в формулу Пуассона для гармонических функций f.

Теоремы 3–5 непосредственно переносятся на случай произвольного шара $B(x_0, r)$. Формуле (22), например, в этом случае соответствует следующая формула:

$$f(x) = (\Phi_r\psi)(x)$$
$$-\left(T_r\left(\left[I + \frac{ET_r + ZR_r + Q\widetilde{\mathscr{I}_r}}{r^2}\right]^{-1}\left(\frac{G + E(\Phi_r\psi) + Z(\Phi_r\psi)' + Q(\Phi_r\psi)''}{r^2}\right)\right)\right)(x),$$

$x \in B(x_0, r)$, а условие $\|ET + ZR + Q\widetilde{\mathscr{I}}\|_p < 1$ обретает вид $\|ET_r + ZR_r + Q\widetilde{\mathscr{I}_r}\|_p < r^2$ (операторы T_r, R_r, $\widetilde{\mathscr{I}_r}$ и Φ_r строятся на основе функции Грина «внутренней» задачи Дирихле для шара $B(x_0, r)$ способом, который мы использовали выше для построения операторов T, R, $\widetilde{\mathscr{I}}$ и Φ).

4. О локальном сглаживании ε-квазигармонических отображений. В статье [39] Л. Берс показал, что каждое K-квазиконформное отображение на плоскости аппроксимируется в топологии локально равномерной сходимости гладкими K-квазиконформными отображениями. В этой связи и в связи с изложенным выше возникает следующий вопрос (проблема регуляризации для квазигармонических отображений). Можно ли ε-квазигармоническое отображение f приблизить в топологии локально равномерной сходимости последовательностью $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ гладких ε-квазигармонических отображений? Доказываемая ниже теорема 6 позволяет установить, что при малых значениях параметра ε такого рода аппроксимацию для ε-квазигармонических отображений можно осуществить на локальном уровне, т. е. в некоторой окрестности каждой точки области определения рассматриваемого отображения.

Теорема 6. *Пусть $p > 1$. Существует положительное число $\varepsilon_p^* = \varepsilon_{p,n,m}^*$ такое, что если отображение $f : B \to \mathbb{R}^m$ есть непрерывное решение класса $W^2_{p,\mathrm{loc}}(B, \mathbb{R}^m)$ ($B = B(0,1)$, как и выше, — единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$) дифференциального неравенства (1) с $\varepsilon < \varepsilon_p^*$, то оно является ε-квазигармоническим отображением класса $W^2_{2n,\mathrm{loc}}(B, \mathbb{R}^m)$. При этом найдется последовательность $\{f_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ бесконечно дифференцируемых ε-квазигармонических отображений $f_\mu : B \to \mathbb{R}^m$, сходящаяся к f локально равномерно в B.*

Доказательство. В силу теорем 1 и 6 статьи [1] существует число $\varepsilon_p^0 = \varepsilon_{p,n,m}^0 > 0$ такое, что при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_p^0$ имеет место первое из утверждений теоремы.

Приступая к доказательству второго, мы в силу леммы 2 можем считать, что рассматриваемое отображение $f : B \to \mathbb{R}^m$ является решением системы вида (11), удовлетворяющей условию (12) с

$$\varepsilon < \varepsilon_p^* = \min\{\varepsilon_p^0, 1/\sqrt{n}, 1/C(2n,n,m)\} \tag{49}$$

($C(2n, n,\ m)$ — величина из неравенства (30)). Пусть $Q : B \to \mathbb{R}^{m\times mn^2}$ — отображение шара B в пространство $(m \times mn^2)$-матриц, которое определяется системой (11) в обсуждаемом нами случае. В силу леммы 3.3.5 из [7, гл. 3] для этого отображения существует последовательность $\{Q^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ отображений $Q^\nu : B \to \mathbb{R}^{m\times mn^2}$ шара B в пространство $(m \times mn^2)$-матриц такая, что

(i) $Q^\nu \in C_0^\infty(B, \mathbb{R}^{m\times mn^2})$,

(ii) $\|Q^\nu\|_\infty \le \|Q\|_\infty < \varepsilon\sqrt{n}$, $\nu = 1, 2, \dots$,

и

(iii) для любого $p \ge 1$

$$\|Q^\nu - Q\|_{p,B} = \left(\int\limits_B \|Q^\nu(x) - Q(x)\|^p dx\right)^{1/p} \to 0$$

при $\nu \to \infty$. Отправляясь от этого факта, не составляет труда установить существование последовательности $\{Q^\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ (вещественно) аналитических отображений, удовлетворяющей условиям (ii) и (iii). Зафиксируем ее далее и рассмотрим еще две последовательности $\{F_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ и $\{F_{\nu\mu}\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ отображений $F_\mu(x) = f\big(\frac{\mu-1}{\mu}x\big)$ и $F_{\nu\mu}(x) = \big(\Phi F_\mu^0\big)(x) - \Big(T\Big(\big(I + Q_\mu^\nu\widetilde{\mathscr{I}}\big)^{-1}\big(Q_\mu^\nu\big(\Phi F_\mu^0\big)''\big)\Big)\Big)(x)$, $x \in B$, где $F_\mu^0 : S \to \mathbb{R}^m$ — отображение единичной сферы $S = S(0, 1)$ пространства $\mathbb{R}^n$, $F_\mu^0(x) = f\big(\frac{\mu-1}{\mu}x\big)$, $x \in S$, ΦF_μ^0 — интеграл Пуассона (20), построенный на основе F_μ^0, $Q_\mu^\nu(x) = Q^\nu\big(\frac{\mu-1}{\mu}x\big)$, $x \in B$, и оператор $I + Q_\mu^\nu\widetilde{\mathscr{I}}$ обратим в $\|\cdot\|_{2n}$-норме (что вытекает из теоремы 3 и неравенств $\big\|Q_\mu^\nu\widetilde{\mathscr{I}}\big\|_{2n} \le C(2n, n, m)\varepsilon < 1$, последнее из которых следует из (49)). Из теоремы 3, первого утверждения доказываемой теоремы и способа построения отображения $F_{\nu\mu}$ получим, что $F_{\nu\mu}$ является W_{2n}^2-решением системы

$$\triangle F_{\nu\mu} = Q_\mu^\nu F_{\nu\mu}'',$$

которая, как нетрудно проверить, при выполнении условия $\varepsilon\sqrt{n} < 1$ (в нашем случае оно следует из (49)) является эллиптической. Но тогда в силу гипоэллиптичности эллиптических линейных дифференциальных операторов [40] $F_{\nu\mu}$ бесконечно дифференцируемо (и даже вещественно аналитично, что вытекает из результатов статьи [41]). Следовательно, отображение $\widetilde{F}_{\nu\mu}(x) = F_{\nu\mu}\big(\frac{\mu}{\mu-1}x\big)$, $|x| < \frac{\mu-1}{\mu}$, есть C^∞-гладкое W_{2n}^2-решение системы

$$\triangle\widetilde{F}_{\nu\mu}(x) = Q^\nu(x)\widetilde{F}_{\nu\mu}''(x), \quad |x| < 1 - \frac{1}{\mu}.$$

Оценим разность $f - \widetilde{F}_{\nu\mu}$ в C-норме.

Воспользовавшись с этой целью вновь теоремой 3, прежде всего убеждаемся в том, что (при $|x| < 1 - \frac{1}{\mu}$)

$$f(x) - \widetilde{F}_{\nu\mu}(x) = F_\mu(y) - F_{\nu\mu}(y) = \Big(T\Big(P_\mu^\nu\big(\Phi F_\mu^0\big)''\Big)\Big)(y), \tag{50}$$

где $y = \frac{\mu x}{\mu-1}$ и $P_\mu^\nu = \big(I + Q_\mu^\nu\widetilde{\mathscr{I}}\big)^{-1}Q_\mu^\nu - \big(I + Q_\mu\widetilde{\mathscr{I}}\big)^{-1}Q_\mu$, $Q_\mu(y) = Q\big(\frac{\mu-1}{\mu}y\big)$, $|y| < 1$. Далее, для разности $\delta Q_\mu^\nu = Q_\mu^\nu - Q_\mu$, $\mu \ge 2$, имеем

$$\big\|\delta Q_\mu^\nu\big\|_{2n,B} = \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{1/2}\|Q^\nu - Q\|_{2n,B(0,\frac{\mu-1}{\mu})} \le \sqrt{2}\|Q^\nu - Q\|_{2n,B} \to 0,$$

$\nu \to +\infty$. Полагая теперь ν столь большим, что

$$C(2n,n,m)\big(\varepsilon + \sqrt{2}\|Q^\nu - Q\|_{2n,B}\big) < 1,$$

и применяя математическую индукцию и соображения, аналогичные использованным в доказательстве теоремы 3, последовательно получаем (при $\mu \geq 2$)

$$\big(I + Q^\nu_\mu \widetilde{\mathscr{I}}\big)^{-1} Q^\nu_\mu = \big[I + Q_\mu \widetilde{\mathscr{I}} + (\delta Q^\nu_\mu)\widetilde{\mathscr{I}}\big]^{-1} Q^\nu_\mu = \big\{(I + Q_\mu \widetilde{\mathscr{I}})\big[I + (I$$
$$+ Q_\mu \widetilde{\mathscr{I}})^{-1}\big((\delta Q^\nu_\mu)\widetilde{\mathscr{I}}\big)\big]\big\}^{-1} Q^\nu_\mu = \big[I + (I + Q_\mu \widetilde{\mathscr{I}})^{-1}\big((\delta Q^\nu_\mu)\widetilde{\mathscr{I}}\big)\big]^{-1}(I + Q_\mu \widetilde{\mathscr{I}})^{-1} Q^\nu_\mu$$
$$= \dots = \left\{\sum_{j=0}^{\infty}\big[-(I + Q_\mu \widetilde{\mathscr{I}})^{-1}\big((\delta Q^\nu_\mu)\widetilde{\mathscr{I}}\big)\big]^j\right\}(I + Q_\mu \widetilde{\mathscr{I}})^{-1} Q^\nu_\mu = (I + Q_\mu \widetilde{\mathscr{I}})^{-1} Q_\mu$$
$$+ \left\{\sum_{j=1}^{\infty}\big[-(I + Q_\mu \widetilde{\mathscr{I}})^{-1}\big((\delta Q^\nu_\mu)\widetilde{\mathscr{I}}\big)\big]^j\right\}(I + Q_\mu \widetilde{\mathscr{I}})^{-1} Q^\nu_\mu + (I + Q_\mu \widetilde{\mathscr{I}})^{-1}\delta Q^\nu_\mu,$$

откуда вытекает, что при этих же μ

$$\big\|P^\nu_\mu\big\|_{2n}$$
$$\leq \left\{\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}\big(\big\|(I + Q_\mu \widetilde{\mathscr{I}})^{-1}\big\|_{2n}\|\widetilde{\mathscr{I}}\|_{2n}\big\|\delta Q^\nu_\mu\big\|_{2n,B}\big)^j + \big\|\delta Q^\nu_\mu\big\|_{2n,B}\right\}\big\|(I + Q_\mu \widetilde{\mathscr{I}})^{-1}\big\|_{2n}$$
$$\leq \left\{\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}C(2n,n,m)\|Q^\nu - Q\|_{2n,B}}{1 - C(2n,n,m)\varepsilon}\right)^j + \sqrt{2}\|Q^\nu - Q\|_{2n,B}\right\}\frac{1}{1 - C(2n,n,m)\varepsilon}$$
$$= \frac{\big(\sqrt{2}\|Q^\nu - Q\|_{2n,B}\big)\big(1 - \sqrt{2}C(2n,n,m)\|Q^\nu - Q\|_{2n,B}\big)}{(1 - C(2n,n,m)\varepsilon)\big(1 - C(2n,n,m)\big(\varepsilon + \sqrt{2}\|Q^\nu - Q\|_{2n,B}\big)\big)}$$
$$= \varkappa\big(\|Q^\nu - Q\|_{2n,B}\big).$$

Наконец, используя соотношения (36), (37) и (50), мы приходим к искомой оценке

$$\big\|f - \widetilde{F}_{\nu\mu}\big\|_{C(B(0,1-\frac{1}{\mu}),\mathbb{R}^m)} \leq M(2n,m)\big\|P^\nu_\mu\big\|_{2n}\big\|\big(\Phi F^0_\mu\big)''\big\|_{2n,B}$$
$$\leq M(2n,m)\varkappa\big(\|Q^\nu - Q\|_{2n,B}\big)\big\|\big(\Phi F^0_\mu\big)''\big\|_{2n,B} \quad (\to 0, \quad \nu \to \infty), \quad \mu \geq 2.$$

Для завершения доказательства нам осталось воспользоваться теоремой Мальгранжа — Лакса о приближении (см., например, [42, гл. 3, § 3.10]). Действительно, пусть K_μ — это замкнутый шар $\operatorname{cl} B(0, 1 - \frac{3}{2\mu})$, $\mu \geq 2$. Так как Q^ν — аналитическое отображение, в силу (49) система

$$\triangle F(x) = Q^\nu(x)F''(x), \quad x \in B, \tag{51}$$

эллиптическая и $\widetilde{F}_{\nu\mu}$ — C^∞-решение системы (51) в окрестности компакта K_μ, представляющей собой шар $B(0, 1 - \frac{1}{\mu})$, то по упомянутой теореме Мальгранжа — Лакса $\widetilde{F}_{\nu\mu}$ можно равномерно на K_μ аппроксимировать C^∞-решениями системы (51) в единичном шаре B. Дальнейшее построение искомой последовательности $\{f_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ очевидно. Теорема 6 полностью доказана.

Следствие. *Существует положительное число $\varepsilon^{**} = \varepsilon^{**}_{n,m}$ такое, что если $f : U \to \mathbb{R}^m$, U — область в $\mathbb{R}^n$, является ε-квазигармоническим отображением, $\varepsilon < \varepsilon^{**}$, то тогда каждая точка $x \in U$ обладает окрестностью $V_x \subset U$, для которой найдется последовательность $\big\{f_\mu : V_x \to \mathbb{R}^m\big\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ бесконечно дифференцируемых ε-квазигармонических отображений, сходящаяся равномерно в V_x к отображению $f|_{V_x}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копылов А. П.* Свойства отображений, близких к гармоническим // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 886–904.
2. *Копылов А. П.* О свойствах отображений, близких к гармоническим // Докл. РАН. 1999. Т. 364, № 2. С. 158–162.
3. *Копылов А. П.* Об основах теории устойчивости классов гармонических отображений // Докл. РАН. 1998. Т. 361, № 5. С. 591–594.
4. *Копылов А. П.* Устойчивость в C^1-норме классов гармонических отображений // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 49–66.
5. *Копылов А. П.* Об устойчивости классов гармонических отображений в C-норме // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 343–353.
6. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Наука, 1982.
7. *Копылов А. П.* Устойчивость в C-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.
8. *Копылов А. П.* Об основах теории устойчивости в C^l-норме классов решений систем линейных уравнений с частными производными // Докл. РАН. 1999. Т. 365, № 5. С. 589–592.
9. *Копылов А. П.* Устойчивость в C^l-норме классов решений систем линейных уравнений с частными производными эллиптического типа // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 352–371.
10. *Копылов А. П.* Об устойчивости классов конформных отображений в дополнительных размерностях // Докл. РАН. 1997. Т. 357, № 1. С. 11–15.
11. *Копылов А. П.* К устойчивости классов конформных отображений. II // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 2. С. 326–343.
12. *Копылов А. П.* К устойчивости классов конформных отображений. III // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 4. С. 825–842.
13. *Даирбеков Н. С.* К вопросу об устойчивости класса голоморфных функций в замкнутой области // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 5. С. 1047–1050.
14. *Копылов А. П.* Об устойчивости в теоремах Коши и Мореры о голоморфных функциях // Докл. РАН. 2001. Т. 378, № 4. С. 447–449.
15. *Безрукова О. Л.* Устойчивость класса решений системы Моисила — Теодореско. Новосибирск, 1983. 50 с. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 46).
16. *Даирбеков Н. С., Копылов А. П.* ξ-устойчивость классов отображений и системы линейных уравнений с частными производными // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 73–90.
17. *Тарханов Н. Н.* Об устойчивости решений эллиптических систем // Функцион. анализ и его приложения. 1985. Т. 19, вып. 3. С. 92–93.
18. *Безрукова О. Л., Даирбеков Н. С., Копылов А. П.* Об отображениях, близких в C-норме к классам решений линейных эллиптических систем уравнений в частных производных // Тр. Ин-та математики АН СССР / Сиб. отд-ние. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1987. С. 19–30. Т. 8. Исследования по геометрии и математическому анализу.
19. *Даирбеков Н. С.* О сглаживании отображений, близких к решениям эллиптических систем первого порядка // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 3. С. 70–72.
20. *Даирбеков Н. С.* Свойства решений многомерных уравнений Бельтрами. Новосибирск, 1988. 35 с. (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Институт математики; № 28).
21. *Даирбеков Н. С.* Об устранимых особенностях эллиптических систем первого порядка с нерегулярными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 1. С. 65–69.
22. *Копылов А. П.* Устойчивость в C^1-норме пучков решений эллиптических систем линейных уравнений с частными производными второго порядка // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1304–1321.
23. *Копылов А. П.* Об устойчивости в C^1-норме пучков решений эллиптических систем линейных уравнений с частными производными второго порядка // Докл. РАН. 1999. Т. 364, № 4. С. 449–452.
24. *Даирбеков Н. С.* Понятие квазирегулярных отображений нескольких n-мерных переменных // ДАН. 1992. Т. 324, № 3. С. 511–514.
25. *Даирбеков Н. С.* Квазирегулярные отображения нескольких n-мерных переменных // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 4. С. 87–102.
26. *Даирбеков Н. С.* Устойчивость классов квазирегулярных отображений нескольких пространственных переменных // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 1. С. 47–59.

27. *Копылов А. П.* Устойчивость классов отображений и непрерывность по Гёльдеру старших производных решений эллиптических систем нелинейных уравнений с частными производными произвольного порядка // Докл. РАН. 2001. Т. 379, № 4. С. 1–4.
28. *Копылов А. П.* Устойчивость классов отображений и гёльдеровость старших производных эллиптических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 90–107.
29. *Nirenberg L.* On a generalization of quasi-conformal mappings and its application to elliptic partial differential equations // Contributions to the theory of partial differential equations. Princeton: Princeton Univ. Press, 1954. P. 95–100. (Ann. Math. Stud.; v. 33).
30. *Morrey C. B., Jr.* Second order elliptic systems of differential equations // Contributions to the theory of partial differential equations. Princeton: Princeton Univ. Press, 1954. P. 101–159. (Ann. Math. Stud.; v. 33)
31. *Копылов А. П.* О W^l_q-регулярности решений систем уравнений с частными производными, локально близких к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 1999. Т. 368, № 3. С. 303–306.
32. *Копылов А. П.* О регулярности решений систем уравнений с частными производными, локально близких к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами. I // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 861–879.
33. *Копылов А. П.* О регулярности решений систем уравнений с частными производными, локально близких к эллиптическим системам линейных уравнений с постоянными коэффициентами. II // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 98–117.
34. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
35. *Копылов А. П.* Об устойчивости в формуле Пуассона для гармонических функций // Докл. РАН. 2001. Т. 376, № 6. С. 733–737.
36. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962.
37. *Adams R. A.* Sobolev spaces. New York; San Francisco; London: Acad. Press, Inc., 1975.
38. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
39. *Bers L.* On a theorem of Mori and the definition of quasiconformality // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 84, N 1. P. 78–84.
40. *Шварц Л.* Комплексные аналитические многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
41. *Morrey C. B., Jr, Nirenberg L.* On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. P. 271–290.
42. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971.

Статья поступила 13 августа 2001 г.

Копылов Анатолий Павлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kopylov@math.nsc.ru