Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 517.5

ФУНКЦИЯ КАРЛЕМАНА И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Ш. Ярмухамедов

Аннотация: Предлагается явная формула восстановления гармонической функции в области по ее известным значениям и значениям ее нормальной производной на части границы, т. е. дается явная формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши для уравнения Лапласа.

Ключевые слова: фундаментальное решение, функция Карлемана, формула Грина, формулы Карлемана, регуляризация, целая функция Миттаг-Леффлера.

Введение

1. В работе предлагается явная формула восстановления в области гармонической функции по ее известным значениям и значениям ее нормальной производной на части границы, т. е. дается явная формула продолжения решения задачи Коши для уравнения Лапласа.

Введем обозначения: $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, — m-мерное вещественное евклидово пространство, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $x' = (0, x_2, \dots, x_m)$, $y' = (0, y_2, \dots, y_m)$, $s = |x' - y'|^2$, $r^2 = |y - x|^2 = s + (y_1 - x_1)^2$, $\tau = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\rho}$, $\tau_1 = \sin \frac{\pi}{2\rho}$, $\rho > 1$, $G_\rho = \{y : |y'| < \tau y_1\}$, $\partial G_\rho = \{y : |y'| = \tau y_1, \}$, $\overline{G}_\rho = G_\rho \cup \partial G_\rho$, ε, ε_1, ε_2 — достаточно малые постоянные положительные числа, $G_\rho^\varepsilon = \{y : |y'| < \tau(y_1 - \varepsilon)\}$, $\partial G_\rho^\varepsilon = \{y : |y'| = \tau(y_1 - \varepsilon)\}$, $\overline{G}_\rho^\varepsilon = G_\rho^\varepsilon \cup \partial G_\rho^\varepsilon$, C — комплексная плоскость, $\zeta = y_1 + iy_2$, ω_m — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^m$, D_ρ — ограниченная односвязная область с границей ∂D_ρ, состоящей из части поверхности конуса ∂G_ρ (в двумерном случае отрезков лучей с общим началом) и гладкой поверхности S (гладкой кривой), лежащей внутри конуса (угла) $\overline{G}_\rho$. Случай $\rho = 1$ предельный. В этом случае G_1 — полупространство $y_1 > 0$ и ∂G_1 — гиперплоскость $y_1 = 0$, D_1 — ограниченная односвязная область с границей, состоящей из компактной связной части гиперплоскости $y_1 = 0$ (при $m = 2$ — отрезка $a \leq y_2 \leq b$) и гладкой поверхности S (гладкой кривой), лежащей в полупространстве $y_1 \geq 0$, $\overline{D}_\rho = D_\rho \cup \partial D_\rho$, S_0 — множество внутренних точек S, $H(D_\rho)$ — совокупность вещественных функций класса $C^2(D_\rho)$, гармонических в D_ρ.

Решение задачи будем строить в области D_ρ, когда данные Коши заданы на части S границы ∂D_ρ. Задача Коши для уравнения Лапласа относится к числу некорректно поставленных задач [1].

Будем предполагать, что решение задачи существует (тогда оно единственно) и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области и данные Коши заданы точно. Для этого случая устанавливается явная формула продолжения. Найденная формула позволяет сформулировать простой и удобный критерий разрешимости задачи Коши. Если при указанных условиях вместо данных Коши заданы их непрерывные приближения с заданной погрешностью (уклонением) в равномерной метрике, то предлагается явная формула регуляризации.

Установленный здесь результат является многомерным аналогом теоремы и варианта формулы Карлемана, полученных Г. М. Голузиным, В. И. Крыловым, В. А. Фоком, Ф. М. Куни в теории голоморфных функций одной переменной [2, 3].

Метод получения указанных результатов основан на явном виде фундаментального решения уравнения Лапласа, зависящего от положительного параметра, исчезающего вместе со своими производными при стремлении параметра к бесконечности на фиксированном конусе и вне его, когда полюс фундаментального решения лежит внутри конуса. Следуя М. М. Лаврентьеву, фундаментальное решение с указанными свойствами назовем *функцией Карлемана* для конуса [4]. После построения функции Карлемана в явном виде формула продолжения и регуляризация решения задачи Коши выписываются в виде разности обобщенных потенциалов простого и двойного слоев. Эти результаты изложены в § 2, 3. В § 1 приведена конструкция фундаментального решения уравнения Лапласа специального вида, позволяющая написать функцию Карлемана в явном виде. Существование функции Карлемана следует из аппроксимационной теоремы С. Н. Мергеляна [5]. Однако эта теорема не позволяет написать функцию Карлемана в явном виде. Когда $\partial D \setminus S$ — поверхность шара и данные Коши заданы точно, формула Карлемана, а также критерий разрешимости, основанные на теории потенциала Брело, приведены в [6]. Приведенные здесь результаты базируются на существенно новом типе потенциала, позволяющем строить также и растущие решения для бесконечных областей.

2. Формулы продолжения, доказываемые ниже, явно выражаются через целую функцию Миттаг-Леффлера, поэтому приведем без доказательства основные ее свойства. Они даны в [7, гл. 3, § 2] с подробными доказательствами.

Целая функция Миттаг-Леффлера определяется рядом

$$E_\rho(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{\rho}\right)}, \quad \rho > 0,\ w \in C,\ E_1(w) = \exp w,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Всюду в дальнейшем будем предполагать $\rho > 1$. Обозначим через $\gamma = \gamma(1, \beta)$, $0 < \beta < \frac{\pi}{\rho}$, $\rho > 1$, контур в комплексной плоскости w, пробегаемый в направлении неубывания $\arg w$ и состоящий из луча $\arg w = -\beta$, $|w| \geq 1$, дуги $-\beta \leq \arg w \leq \beta$ окружности $|w| = 1$ и луча $\arg w = \beta$, $|w| \geq 1$. Контур γ разбивает комплексную область C на две односвязные бесконечные области D^- и D^+, лежащие слева и справа от γ соответственно. Будем предполагать, что $\frac{\pi}{2\rho} < \beta < \frac{\pi}{\rho}, \rho > 1$.

В этих условиях справедливы следующие интегральные представления:

$$E_\rho(w) = \rho \exp\left(w^\rho\right) + \Psi_\rho(w), \quad w \in D^+, \tag{0.1}$$

$$E_\rho(w) = \Psi_\rho(w), \quad E'_\rho(w) = \Psi'_\rho(w),\ w \in D^-, \tag{0.2}$$

где

$$\Psi_\rho(w) = \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\exp \zeta^\rho\, d\zeta}{\zeta - w}, \quad \Psi'_\rho(w) = \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\exp \zeta^\rho\, d\zeta}{(\zeta - w)^2}. \tag{0.3}$$

Так как $E_\rho(w)$ вещественно при вещественном w, имеем

$$\operatorname{Re}\Psi_\rho(w) = \frac{\Psi_\rho(w) + \Psi_\rho(\overline{w})}{2} = \frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\exp(\zeta^\rho)(\zeta - \operatorname{Re} w)}{(\zeta - w)(\zeta - \overline{w})}\, d\zeta, \tag{0.4}$$

$$\operatorname{Im}\Psi_\rho(w) = \frac{\Psi_\rho(w) - \Psi_\rho(\overline{w})}{2i} = \frac{\rho \operatorname{Im} w}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\exp(\zeta^\rho)}{(\zeta - w)(\zeta - \overline{w})}\, d\zeta, \tag{0.5}$$

$$\operatorname{Im}\frac{\Psi'_\rho(w)}{\operatorname{Im} w} = \frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{2\exp(\zeta^\rho)(\zeta - \operatorname{Re} w)}{(\zeta - w)^2(\zeta - \overline{w})^2}\, d\zeta. \tag{0.6}$$

Всюду в дальнейшем в определении контура $\gamma(1,\beta)$ будем брать $\beta = \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\varepsilon_2}{2}$, $\rho > 1$. Ясно, что если

$$\frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon_2 \le |\arg w| \le \pi, \tag{0.7}$$

то $w \in D_\rho^-$ и $E_\rho(w) = \Psi_\rho(w)$. Обозначим

$$T_{k,p}(w) = \frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\zeta^p \exp(\zeta^\rho)\, d\zeta}{(\zeta - w)^k(\zeta - \overline{w})^k}, \quad k = 1, 2, \dots,\ p = 0, 1, \dots.$$

При $\frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon_2 \le |\arg w| \le \pi$ справедливы неравенства

$$|E_\rho(w)| \le \frac{M_1}{1 + |w|}, \quad |E'_\rho(w)| \le \frac{M_2}{1 + |w|^2}, \quad |T_{k,p}(w)| \le \frac{M_3}{1 + |w|^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{0.8}$$

где M_1, M_2, M_3 — постоянные, не зависящие от w. В формуле (0.2) выберем $\beta = \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\varepsilon_2}{2} < \frac{\pi}{\rho}$, $\rho > 1$. Тогда $E_\rho(w) = \Psi_\rho(w)$, где $\Psi_\rho(w)$ определяется из (0.3). При этом заметим, что $\cos\rho\beta < 0$ и интеграл сходится:

$$\int\limits_\gamma |\zeta|^p \exp[\cos\rho\beta|\zeta|^p]\, |d\zeta| < \infty, \quad p = 0, 1, \dots. \tag{0.9}$$

Далее, при достаточно большом $|w|$ ($w \in D^+$, $\overline{w} \in D^-$) имеем

$$\min_{\zeta\in\gamma}|\zeta - w| \ge |w|\sin\frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \min_{\zeta\in\gamma}|\zeta - \overline{w}| \ge |w|\sin\frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{0.10}$$

Теперь из (0.2) и разложений

$$\frac{1}{\zeta - w} = -\frac{1}{w} + \frac{\zeta}{w(\zeta - w)}, \quad \frac{1}{\zeta - \overline{w}} = -\frac{1}{\overline{w}} + \frac{\zeta}{\overline{w}(\zeta - \overline{w})} \tag{0.11}$$

для больших $|w|$ получаем

$$\left|E_\rho(w) - \Gamma^{-1}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{w}\right| \le \frac{\rho}{2\pi\sin\frac{\varepsilon_2}{2}}\frac{1}{|w|^2}\int\limits_\gamma |\zeta|\exp[\cos\rho\beta|\zeta|^p]|\, d\zeta| \le \frac{\mathrm{const}}{|w|^2},$$

$$\Gamma^{-1}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) = \frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_\gamma \exp(\zeta^p)\, d\zeta.$$

Отсюда следует первое из неравенств (0.8). Из (0.10), (0.3) и разложения

$$\frac{1}{(\zeta - w)^2} = \frac{1}{w^2} - 2\frac{\zeta}{w^2(\zeta - w)} + \frac{\zeta^2}{w^2(\zeta - w)^2}$$

при больших $|w|$ аналогично выводим неравенство

$$\left|E_\rho{}'(w) - \Gamma^{-1}\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\frac{1}{w^2}\right| \le \frac{\mathrm{const}}{|w|^3}.$$

Второе неравенство из (0.8) доказано. Для $k = 1, 2, \dots$ из (0.11) имеем

$$\frac{1}{(\zeta - w)^k}\frac{1}{(\zeta - \overline{w})^k} = \left[\frac{(-1)^k}{w^k} + \dots + \frac{\zeta^k}{w^k(\zeta - w)^k}\right]$$
$$\times \left[\frac{(-1)^k}{\overline{w}^k} + \dots + \frac{\zeta^k}{\overline{w}^k(\zeta - \overline{w})^k}\right] = \frac{1}{|w|^{2k}} + \frac{-k}{|w|^{2k+1}(\zeta - w)} + \dots.$$

При больших $|w|$ первый член разложения является главным, поэтому из (0.9) и (0.10) следует третье неравенство из (0.8).

§ 1. Конструкция фундаментального решения

Пусть $K(w)$ — целая функция комплексного переменного, вещественная при вещественном w, $w = u + iv$, где u, v — действительные числа, и $K(u) \ne 0$, $-\infty < u < \infty$. Функцию $\Phi(y, x)$ при $s > 0$ определим равенством

$$C_m K(x_1)\Phi(y,x) = \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\int_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{K(w)}{w - x_1}\right]\frac{\Psi(u)\,du}{\sqrt{u^2+s}}, \quad w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_1, \tag{1.1}$$

где

$$\Psi(u) = u, \quad m = 2n, \quad n \ge 1, \quad \Psi(u) = 1, \quad m = 2n+1, \quad n \ge 1;$$
$$C_2 = -2\pi, \quad C_m = (-1)^n 2^{-1}(n-2)!(m-2)\omega_m \quad \text{при } m = 2n,\ n \ge 2;$$
$$C_3 = -\frac{\pi\omega_3}{2}, \quad C_m = (-1)^n 2^{-n}(2n-3)!!(m-2)\pi\omega_n \quad \text{при } m = 2n+1,\ n \ge 2.$$

Для сходимости интеграла дополнительно будем предполагать, что

$$\sup_{v \ge 1} v|K^{(p)}(u+iv)| = M(u) < \infty, \quad -\infty < u < \infty, \quad m = 2n,\ n \ge 1, \tag{1.2}$$

$$\sup_{v \ge 1}|K^{(p)}(u+iv)| = M(u) < \infty, \quad -\infty < u < \infty, \quad m = 2n+1,\ n \ge 1,\ p = 0, 1 \dots.$$

Основная лемма. *Функция* $\Phi(y, x)$, *определенная при* $s > 0$ *равенством* (1.1), *представима в виде*

$$\Phi(y,x) = \Phi_0(r) + G(y,x), \tag{1.3}$$

где

$$\Phi_0(r) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r},\ m = 2, \quad \Phi_0(r) = \frac{1}{(m-2)\omega_m r^{m-2}},\ m \ge 3,$$

и $G(y, x)$ — *функция, гармоническая по переменной* y *в* $\mathbb{R}^m$, *включая* $y = x$.

Доказательство. Так как гармонические функции инвариантны относительно преобразования параллельного переноса, доказательство достаточно провести для $x = 0$.

Пусть $s > 0$, $s = \alpha^2 = y_2^2 + \dots + y_m^2$. Введем следующие обозначения:

$$h(w) = \frac{K(w)}{w}, \quad \bar{h}(w) = h(\overline{w}), \quad w = i\sqrt{u^2+s} + y_1, \quad \overline{w} = -i\sqrt{u^2+s} + y_1,$$

$$f(y)=\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\int\limits_0^\infty h(w)\frac{\Psi(u)}{\sqrt{u^2+s}}\,du,\quad \bar f(y)=\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\int\limits_0^\infty h(\overline{w})\frac{\Psi(u)}{\sqrt{u^2+s}}\,du. \tag{1.4}$$

В этих обозначениях

$$C_mK(0)\Phi(y,0)=\frac{f-\overline{f}}{2i}=\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}h(w)\frac{\Psi(u)\,du}{\sqrt{u^2+s}}. \tag{1.5}$$

Если мы покажем, что функция $f(y)$ является гармонической при $s>0$, то из (1.5) последует, что и $\Phi(y,0)$ гармоническая при $s>0$. С этой целью заметим, что $f(y)=f_m(y_1,s)$, где нижний индекс указывает на число переменных, зависит от y_1,s.

Доказательство основной леммы проведем в два этапа.

I. Предложение 1.1. *При $s>0$ уравнение Лапласа в координатах (y_1,s) имеет вид*

$$4s\frac{d^2f}{ds^2}+2(m-1)\frac{df}{ds}+\frac{d^2f}{dy_1^2}=0,\quad f=f_m. \tag{1.6}$$

Доказательство. Действительно, пусть $U=f_m(y_1,s)$ — решения уравнения Лапласа

$$\Delta U=\frac{\partial^2U}{\partial y_1^2}+\dots+\frac{\partial^2U}{\partial y_m^2}=0.$$

Дифференцированием получаем

$$\frac{\partial U}{\partial y_k}=\frac{df}{ds}\cdot 2y_k,\quad \frac{\partial^2U}{\partial y_k^2}=\frac{d^2f}{ds^2}\cdot 4y_k^2+\frac{df}{ds}\cdot 2,\quad \frac{d^2U}{dy_1^2}\equiv\frac{d^2f}{dy_1^2},\quad f\equiv f_m.$$

Сложив эти равенства для всех $k=2,\dots,m$, получим (1.6). □

Предложение 1.2. *При $s>0$ решения уравнения* (1.6) *с числом независимых переменных m и $m+2$ связаны соотношением*

$$\frac{df_m}{ds}=f_{m+2}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Из (1.4) получаем

$$\frac{df}{ds}\equiv\frac{df_m}{ds}=\frac{d^n}{ds^n}\int\limits_0^\infty h(w)\frac{\Psi(u)}{\sqrt{u^2+s}}\,du=f_{m+2}.$$

Замене n на $n+1$ отвечает переход от m к $m+2$. Отсюда следует (1.7). Покажем, что функция $f\equiv f_{m+2}$ является решением уравнения (1.6), когда число переменных равно $m+2$. Продифференцировав (1.6), получим

$$4\frac{d^2f_m}{ds^2}+4s\frac{d}{ds}\frac{d^2f_m}{ds^2}+2(m-1)\frac{d}{ds}\frac{df_m}{ds}+\frac{d}{ds}\frac{d}{dy_1^2}f_m=0,\quad f\equiv f_m,$$

$$4s\frac{d^2f_{m+2}}{ds^2}+2(m+1)\frac{df_{m+2}}{ds}+\frac{df_{m+2}}{dy_1^2}=0.$$

Следовательно, f_{m+2} является решением, когда число переменных $m+2$. □

Здесь мы использовали равенство

$$\frac{d}{ds}\frac{d^2 f_m}{dy_1^2} = \frac{d^2}{dy_1^2}\frac{df_m}{ds}, \quad s > 0, \tag{1.8}$$

которое, в свою очередь, следует из равенства

$$\int_0^\infty \frac{d}{ds}\frac{d^2}{dy_1^2}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\frac{h(w)\Psi(u)}{\sqrt{u^2+s}}\,du = \frac{d^2}{dy_1^2}\frac{d}{ds}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\int_0^\infty \frac{h(w)\Psi(u)}{\sqrt{u^2+s}}\,du.$$

Перестановочность операции дифференцирования и интегрирования, а также перестановочность операций дифференцирования гарантируются условием (1.2). Теперь достаточно доказать гармоничность функции $f(y)$, когда $m = 2, 3$. Тогда из (1.7) будет следовать ее гармоничность при любом $m \geq 2$.

II. Пусть $m = 2$, $s > 0$ $\left(y_2^2 = s\right)$. Тогда из (1.4) имеем

$$f(y_1, s) = \int_0^\infty h(w)\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+s}}, \quad f \equiv f_2, \quad w = i\sqrt{u^2+s} + y_1 \tag{1.9}$$

и уравнение (1.6) для $m = 2$ имеет вид

$$4s\frac{d^2 f}{ds^2} + 2\frac{df}{ds} + \frac{d^2 f}{dy_1^2} = 0. \tag{1.10}$$

Так как

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{u^2+s}\right) = \frac{d}{du^2}\left(\sqrt{u^2+s}\right),$$

из (1.9) дифференцированием получаем

$$2\frac{df}{ds} = 2\int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(\frac{h(w)}{\sqrt{u^2+s}}\right)u\,du = \int_0^\infty \frac{d}{du^2}\left(\frac{h(w)}{\sqrt{u^2+s}}\right)du^2,$$

$$2\frac{df}{ds} = -\frac{h(w_0)}{\sqrt{s}}, \quad 4s\frac{d^2 f}{ds^2} = -ih'(w_0) + \frac{h(w_0)}{\sqrt{s}}, \quad w_0 = i\sqrt{s} + y_1. \tag{1.11}$$

Из (1.9) вычислим $\frac{d^2 f}{dy_1^2}$ и проинтегрируем, тогда

$$\frac{d^2 f}{dy_1^2} = \int_0^\infty \frac{h''\left(i\sqrt{u^2+s}+y_1\right)}{\sqrt{u^2+s}}u\,du = ih'(w_0).$$

Складывая результаты, получаем (1.10). Гармоничность $\Phi(y,x)$ при $s > 0$ доказана.

Рассмотрим разность $\Phi(y,x) - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} = G(y_1, s)$, где

$$2\pi G(y_1,s) = -\frac{1}{K(0)}\int_0^1 \mathrm{Im}\left[\frac{K(w)-K(0)}{w}\right]\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+s}}$$

$$-\frac{1}{K(0)}\int_1^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{K(w)}{w}\right]\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+s}} - \int_0^1 \mathrm{Im}\left[\frac{1}{w}\right]\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+s}} - \ln\frac{1}{r}, \quad w = i\sqrt{u^2+s}+y_1.$$

Так как $K_1(w) = (K(w) - K(0))w^{-1}$ — целая функция, вещественная при вещественном w, то

$$\frac{\operatorname{Im} K_1(w)}{\sqrt{u^2+s}} = \sum_0^\infty \frac{K_1^{2k+1}(y_1)}{(2k+1)!}(-1)^k(u^2+s)^k. \tag{1.12}$$

Теперь видно, что первое и второе слагаемые в правой части полученного равенства представляют собой функции класса $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и являются функциями точки (y_1, s). Последние два члена в сумме равны

$$2^{-1}\ln\frac{1+r^2}{r^2} - \ln\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\ln(1+r^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad r^2 = y_1^2 + y_2^2.$$

Правая часть этого равенства также представляет собой функцию от (y_1, s). Отсюда выводим представление

$$-K(0)\left[\ln\frac{1}{r} + 2\pi G(y_1, s)\right] = \int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(w)}{w}\right]\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+s}}, \tag{1.13}$$

где $G(y_1, s)$ как разность двух гармонических функций является также гармонической функцией при $s > 0$. Так как она гармонически продолжается на прямую $s = y_2 = 0$ (на ось y_1), то, обозначая через $G(y, 0)$ функцию $G(y_1, s)$, получаем утверждение леммы, когда $m = 2$.

Пусть $m = 2n$, $n \geq 2$. Из (1.1) и (1.13) вытекает, что

$$\Phi(y, 0) = \frac{-1}{C_m}\cdot\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\ln\frac{1}{r} - \frac{2\pi}{C_m}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}G(s, y_1), \quad s = y_2^2 + \dots + y_m^2.$$

Согласно предложению 2 второе слагаемое, которое обозначим через $G(y, 0)$, гармонично в $\mathbb{R}^m$, а первое слагаемое, равное $(m-2)^{-1}\omega_m^{-1}r^{-m+2}$, является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Основная лемма доказана при $m = 2n$, $n \geq 1$.

Пусть $m = 3$, $s = y_2^2 + y_3^2 > 0$. Из (1.6) видно, что оператор Лапласа имеет вид

$$L(f) = 4s\frac{d^2 f}{ds^2} + 4\frac{df}{ds} + \frac{d^2 f}{dy_1^2}, \quad f = \int_0^\infty h(w)\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}.$$

Покажем, что $L(f) = 0$, $s > 0$. Дифференцированием приходим к равенствам

$$\frac{d^2 f}{dy_1^2} = \int_0^\infty \frac{h''(w)}{\sqrt{u^2+s}}\,du, \quad \frac{df}{ds} = \int_0^\infty \left[\frac{ih'}{2(u^2+s)} - \frac{h}{2(u^2+s)\sqrt{u^2+s}}\right]du,$$

$$\frac{d^2 f}{ds^2} = \int_0^\infty \left[-\frac{h''}{4(u^2+s)^{3/2}} - \frac{ih'}{2(u^2+s)^2} - \frac{ih'}{4(u^2+s)^2} + \frac{3h}{4(u^2+s)^2\sqrt{u^2+s}}\right]du,$$

$$4s\frac{d^2 f}{ds^2} = \int_0^\infty \left[-\frac{sh''}{(u^2+s)^{3/2}} - \frac{3ih's}{(u^2+s)^2} + \frac{3hs}{(u^2+s)^{5/2}}\right]du.$$

Сложив полученные равенства, получим

$$L(f) = \int_0^\infty \frac{u^2 h''(w)}{(u^2+s)^{3/2}}\,du + \int_0^\infty \frac{(2u^2-s)i}{(u^2+s)^2}h'\,du + \int_0^\infty \frac{(s-2u^2)i}{(u^2+s)^{5/2}}h\,du.$$

Так как $-idh' = \frac{uh''\,du}{\sqrt{u^2+s}}$, то, интегрируя по частям первый интеграл, видим, что он равен

$$\int\limits_0^\infty i\left(\frac{u}{u^2+s}\right)' h'\,du = \int\limits_0^\infty \frac{ih'\,du}{u^2+s} - \int\limits_0^\infty \frac{2iu^2h\,du}{(u^2+s)^2}.$$

Теперь объединим интегралы, содержащие h'. Поскольку

$$\frac{2u^2-s}{(u^2+s)^2} - \frac{2u^2}{(u^2+s)^2} + \frac{1}{u^2+s} = \frac{2u^2-s-2u^2+u^2+s}{(u^2+s)^2} = \frac{u^2}{(u^2+s)^2},$$

то

$$L(f) = \int\limits_0^\infty \frac{s-2u^2}{(u^2+s)^{5/2}} h\,du + \int\limits_0^\infty \frac{iu^2}{(u^2+s)^2} h'\,du.$$

Интегрируя по частям второй интеграл, заметим, что он равен первому с обратным знаком и $L(f)=0$, $s>0$. Гармоничность функции f доказана.

Теперь для разности $\Phi(y,0)-\Phi_0(r)=G(y_1,s)$ имеем

$$G(y_1,s) = -\frac{2}{\pi\omega_3}\frac{1}{K(0)}\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(w)-K(0)}{w}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}.$$

Промежуток интегрирования разбиваем на две части: $[0,\infty)=[0,1]\cup[1,\infty)$. Из разложения (1.12) видим, что первый интеграл является функцией класса $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Из (1.2) следует, что этому классу принадлежит и функция, определенная вторым интегралом. Представление (1.3) и вместе с ним основная лемма доказаны, когда $m=3$. Далее, из последнего равенства следует представление

$$\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(w)}{w}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}} = -\frac{\pi}{2}K(0)\left[\frac{1}{r}+\omega_3 G(y_1,s)\right].$$

Пусть $m=2n+1$, $n\ge 1$. Тогда для $\Phi(y,0)$ из формулы (1.1) выводим представление

$$\Phi(y,0) = -2^{-1}C_m^{-1}\pi\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\frac{1}{r} - 2^{-1}\pi\omega_3 C_m^{-1}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}G(y_1,s).$$

Первое слагаемое есть фундаментальное решение уравнения Лапласа и равно $(m-2)^{-1}\omega_m^{-1}r^{-m+2}$. Второе слагаемое, которое обозначим через $G(y,0)$, согласно предложению 2 является гармонической функцией в $\mathbb{R}^m$, включая точку $y=x$. Основная лемма доказана полностью. $\square$

Пусть $m=2n$, $n\ge 2$. В формуле (1.1) совершим дифференцирование по s под знаком интеграла, а затем полученный интеграл проинтегрируем по частям. Тогда из (1.1) и (1.11) выведем формулу

$$C_m K(x_1)\Phi(y,x) = -\frac{1}{2}\frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}}\operatorname{Im}\left[\frac{K(i\sqrt{s}+y_1)}{\sqrt{s}(i\sqrt{s}+y_1-x_1)}\right]. \qquad (1.14)$$

Исходя из (1.14) с учетом разложения (1.12) легко доказать представление (1.3). Ясно, что условие (1.2) отпадает. В случае $m=2n$, $n\ge 2$, разумно определить функцию $\Phi(y,x)$ более простой формулой (1.14), что мы и будем делать в дальнейшем.

Пусть $U(y) \in H(D) \cap C'(\overline{D})$, где D — ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей ∂D. Тогда для любой точки $x \in D$ справедлива формула Грина

$$U(x) = \int\limits_{\partial D} \left[\Phi(y,x) \frac{\partial U}{\partial n}(y) - U(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(y,x) \right] ds_y. \tag{1.15}$$

Когда $x \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{D}$, интеграл справа равен нулю. Здесь n — внешняя нормаль в точке $y \in \partial D$. Эта формула справедлива и в том случае, когда граница области состоит из конечного числа замкнутых кусочно-гладких поверхностей размерности $m - 1$.

§ 2. Формулы Карлемана

В основной лемме в качестве функции $K(w)$ выберем целую функцию Миттаг-Леффлера $K(w) = E_\rho(\sigma w)$, где $\rho > 1$, $w = i\sqrt{u^2+s} + y_1 - x_1$, $K(x_1) = E_\rho(0) = 1$ и $\sigma \geq 0$, когда $m \geq 3$, и $\sigma > 0$ при $m = 2$. Полученное при этом фундаментальное решение $\Phi = (y, x)$ и его производную по переменной σ обозначим через $\Phi_\sigma(y-x)$ и $F_\sigma(y-x)$ соответственно. Из основной леммы следует, что $F_\sigma(y)$ является регулярной гармонической функцией в $\mathbb{R}^m$, причем если $m = 2$, то

$$-2\pi\Phi_\sigma(y-x) = \int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{E_\rho(\sigma w)}{w}\right] \frac{u\,du}{\sqrt{u^2+s}}$$

$$= \int\limits_0^\infty \left[(y_1 - x_1) \frac{\operatorname{Im} E_\rho(\sigma w)}{\sqrt{u^2+s}} - \operatorname{Re} E_\rho(\sigma w) \right] \frac{u\,du}{u^2+r^2}, \tag{2.1}$$

$$-F_\sigma(y-x) = (2\pi\sigma)^{-1} \operatorname{Re} E_\rho(\sigma w_1), \quad w_1 = i\sqrt{s} + y_1 - x_1.$$

Если $m = 2n+1$, $n \geq 1$, то

$$C_m \Phi_\sigma(y-x) = \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{E_\rho(\sigma w)}{w}\right] \frac{du}{\sqrt{u^2+s}}$$

$$= \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \int\limits_0^\infty \left[-\operatorname{Re} E_\rho(\sigma w) + (y_1 - x_1) \frac{\operatorname{Im} E_\rho(\sigma w)}{\sqrt{u^2+s}} \right] \frac{du}{u^2+r^2}, \tag{2.2}$$

$$C_m F_\sigma(y,x) = \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \int\limits_0^\infty \operatorname{Im} E'_\rho(\sigma w) \frac{du}{\sqrt{u^2+s}}.$$

Если $m = 2n$, $n \geq 2$, то из (1.14) будем иметь

$$C_m \Phi_\sigma(y-x) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}} \operatorname{Im}\left[\frac{E_\rho(\sigma w_1)}{\sqrt{s} w_1}\right]$$

$$= \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} \left\{ \left[-\operatorname{Re} E_\rho(\sigma w_1) + (y_1 - x_1) \frac{\operatorname{Im} E_\rho(\sigma w_1)}{\sqrt{s}} \right] \frac{1}{r^2} \right\}, \tag{2.3}$$

$$C_m F_\sigma(y-x) = \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \operatorname{Im} E'_\rho(\sigma w_1) \right], \quad \sigma \geq 0,$$

где $w_1 = i\sqrt{s} + y_1 - x_1$ и $F_\sigma(y-x) = \frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma}(y-x)$. Если $\sigma = 0$ и $m \geq 3$, то $\Phi_0(y-x) = \Phi_0(r)$, и если $\sigma = 1$, $m = 2$, то согласно основной лемме для $\Phi_1(y-x) = \Phi_\sigma(y,x)|_{\sigma=1}$ верно представление (1.3).

Теорема 2.1. *Пусть* $U(y) \in H(D_\rho) \cap C^1(\overline{D}_\rho)$ *и*

$$U(y) = f(y), \quad \frac{\partial U}{\partial n}(y) = g(y), \quad y \in S, \tag{2.4}$$

где $f(y)$ *и* $g(y)$ *— заданные функции класса* $C(S)$. *Тогда для любого* $x \in D_\rho$ *справедливы формулы Карлемана*

$$\frac{\partial^i U(x)}{\partial x_j^i} = \lim_{\sigma\to\infty} \int\limits_S \left[g(y) \frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \Phi_\sigma(y-x) - f(y) \frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n}(y-x) \right] ds_y, \tag{2.5}$$

$i = 0, 1$; $j = \overline{1, m}$, $\frac{\partial^0 U}{\partial x_j^0} \equiv U$, $\frac{\partial^0 \Phi}{\partial x_j^0} \equiv \Phi$, *сходимость в* (2.5) *равномерна на компактах из* D_ρ.

Доказательство. Из формулы Грина (1.15) для любого $x \in D_\rho$ получаем

$$\frac{\partial^i U(x)}{\partial x_j^i} = \int\limits_{\partial D_\rho} \left[g(y) \frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \Phi_\sigma(y-x) - f(y) \frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n}(y-x) \right] ds_y, \quad \partial D_\rho = S \cup (\partial D_\rho \setminus S). \tag{2.6}$$

Приведем оценки для Φ_σ, $\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y_k}$ и $\frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y_k}$.

Лемма. *Пусть* E *— компакт в* G_ρ, δ *— расстояние от* E *до* ∂G_ρ. *Тогда для* $m \geq 3$, $\sigma \geq 0$ *при* $x \in E$, $y \in \mathbb{R}^m \setminus G_\rho$ $(|y'| \geq \tau y_1)$ *справедливы неравенства*

$$|\Phi_\sigma(y-x)| + \left| \frac{\partial}{\partial y_k} \Phi_\sigma(y-x) \right| + \left| \frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \frac{\partial}{\partial y_k} \Phi_\sigma(y-x) \right| \leq \frac{C_1(\rho, \delta, m) r}{1 + \sigma\delta}, \quad k, j = \overline{1, m}, \tag{2.7}$$

$$|F_\sigma(y-x)| + \left| \frac{\partial}{\partial y_k} F_\sigma(y-x) \right| + \left| \frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \frac{\partial}{\partial y_j} F_\sigma(y-x) \right|$$
$$\leq \frac{C_2(\rho, \delta, m) r}{1 + \sigma^2\delta^2}, \quad r \geq \delta > 0, \quad k, j = \overline{1, m}. \tag{2.8}$$

Если $m = 2$ *и* $\sigma \geq 1$, *то*

$$|\Phi_\sigma(y-x)| + \left| \frac{\partial}{\partial y_k} \Phi_\sigma(y-x) \right| + \left| \frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \frac{\partial}{\partial y_k} \Phi_\sigma(y-x) \right| \leq \frac{C_3(\rho, \delta)}{\sigma}, \tag{2.9}$$

$$|F_\sigma(y-x)| + \left| \frac{\partial}{\partial y_k} F_\sigma(y-x) \right| + \left| \frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \frac{\partial}{\partial y_j} F_\sigma(y-x) \right| \leq \frac{C_4(\rho, \delta)}{\sigma^2}, \ r \geq \delta > 0, \tag{2.10}$$

где постоянные C_j *не зависят от* x, y *и* σ.

Из леммы следует утверждение теоремы. Действительно, если E — компакт в D_ρ, то $E \subset G_\rho$. Поэтому неравенства для $\Phi_\sigma(y-x)$ и ее производных из леммы сохраняются и в том случае, когда $x \in E \subset D_\rho$ и $y \in \partial D_\rho \setminus S \subset \partial G_\rho$ (в этом случае δ — расстояние от компакта $E \subset D_\rho$ до ∂D_ρ). Теперь устремим σ к бесконечности. Тогда предел интеграла в (2.6) по части $\partial D_\rho \setminus S$ границы ∂D_ρ равен нулю и получаем формулы (2.5).

Доказательство леммы. Пусть $m = 2n + 1$, $n \geq 1$. Нужно оценить интеграл справа в равенстве (2.2) и его производные. С этой целью выберем $\varepsilon > 0$ такое, чтобы $E \subset \overline{G}_\rho^\varepsilon(|x'| \leq \tau(x_1 - \varepsilon))$, $\overline{G}_\rho^\varepsilon \subset G_\rho$. Так как расстояние от ∂G^ε до ∂G_ρ равно $\varepsilon\tau_1$, то $\delta \geq \varepsilon\tau_1$. В условиях леммы имеем

$$\tau w = i\tau\sqrt{u^2 + s^2} + \tau y_1 - \tau x_1 = \sqrt{u^2 + s^2} \left(i \operatorname{tg} \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\tau y_1 - \tau x_1}{\sqrt{u^2 + s}} \right), \quad u \geq 0, \ \rho > 1,$$

$$\frac{\tau y_1-\tau x_1}{\sqrt{u^2+s^2}}\le\frac{|y'|-|x'|-\varepsilon\tau}{|y'-x'|}\le 1-\varepsilon_1,\ y'\ne x',\quad \left|\arg\left(a\pm\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho}\right)\right|\ge\frac{\pi}{2\rho},\ a\le 1.$$

Таким образом, выполняется (0.7):

$$\frac{\pi}{2\rho}+\varepsilon_2\le|\arg w|\le\pi,\ \rho>1,\quad \arg(\tau w)=\arg w,$$

$\operatorname{Re} w<0$ при $y'=x'$, и неравенство подавно выполняется. Поэтому $E_\rho(w)=\Psi_\rho(w)$, $w\in D^-$, где $\beta=\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\varepsilon_2}{2}$. Далее, так как

$$(\zeta-\sigma w)(\zeta-\sigma\overline{w})=\zeta^2-2\sigma\zeta(y_1-x_1)+\sigma^2(u^2+s+(y_1-x_1)^2),$$

то

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\frac{1}{(\zeta-\sigma w)(\zeta-\sigma\overline{w})}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\sigma^{2(n-1)}}{(\zeta-\sigma w)^n(\zeta-\sigma\overline{w})^n}.$$

Теперь из (0.4) и (0.5) получаем

$$\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\operatorname{Re}E_\rho(\sigma w)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\sigma^{2(n-1)}\rho}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{[\zeta-\sigma(y_1-x_1)]e^{\zeta^\rho}\,d\zeta}{(\zeta-\sigma w)^n(\zeta-\sigma\overline{w})^n},\tag{2.11}$$

$$\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\frac{\operatorname{Im}E_\rho(\sigma w)}{\sqrt{u^2+s}}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\sigma^{2n-1}\rho}{\pi i}\int\limits_\gamma\frac{e^{\zeta^\rho}\,d\zeta}{(\zeta-\sigma w)^n(\zeta-\sigma\overline{w})^n}.\tag{2.12}$$

Интегралы оцениваем согласно неравенствам (0.8):

$$\left|\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\operatorname{Re}E_\rho(\sigma w)\right|\le\frac{C_5(\rho,\delta,n)\sigma^{2n-1}r}{1+\sigma^{2n}|w|^{2n}},\tag{2.13}$$

$$|w|^2=u^2+r^2\ge r^2\ge\delta^2,\quad \delta\ge\tau_1\varepsilon,$$

$$\left|\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\frac{\operatorname{Im}E_\rho(\sigma w)}{\sqrt{u^2+s}}\right|\le\frac{C_6(\rho,\delta,n)\sigma^{2n-1}r}{1+\sigma^{2n}|w|^{2n}},\tag{2.14}$$

где постоянные C_5, C_6 не зависят от σ, x, y.

Вычислим производные функции, определенной равенствами (2.11), (2.12), по переменным y_j, $j=\overline{1,m}$, затем смешанные вторые производные и заметим, что оценки (2.13) и (2.14) для них сохраняются, но с другими постоянными. Далее вычислим производные по s в первом равенстве из (2.2) согласно формуле Лейбница и производные по y_j и x_k, $j,k=\overline{1,m}$ (операции интегрирования и дифференцирования перестановочны). Полученные интегралы оценим согласно (2.13) и (2.14). Тогда получим неравенства (2.7), когда $m=2n+1$. Если $m=2n$, $n\ge 2$, то $\Phi_\sigma(y-x)$ определяется равенством (2.3). Дословно повторяя приведенные рассуждения, убедимся в справедливости неравенства (2.7). При $m=2$, положив в (2.11) и (2.12) $n=1$, из (2.1) легко получим неравенство

$$|\Phi_\sigma(y-x)|\le\frac{C(\rho,\delta)}{\sigma},\quad \sigma\ge 1,\ r\ge\delta\ge\varepsilon\overline{\tau}_1,$$

где постоянная $C(\rho,\delta)$ не зависит от σ, x, y. Ясно, что эта оценка сохраняется и для производных с отличной от $C(\rho,\delta)$ постоянной. Неравенство (2.9) доказано.

Оценка (2.10) для $F_\sigma(y-x)$ и ее производных при $m=2$ следует из второй формулы (2.1) и неравенства (0.8). Если $m\geq 3$, то используем вторые формулы из (2.2), (2.3) и (0.8), где $E'_\rho(w)=\Psi'_\rho(w)$, а также формулу

$$\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\cdot\frac{\operatorname{Im}\Psi'_\rho(\sigma w)}{\operatorname{Im}w} = \frac{\rho n!}{2\pi i}\cdot(-1)^{n-1}\cdot\sigma^{2n-1}\int\limits_\gamma\frac{[\zeta-\sigma(y_1-x_1)]e^{\zeta^\rho}\,d\zeta}{(\zeta-\sigma w)^{n+1}(\zeta-\sigma\overline{w})^{n+1}},\quad \beta=\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\varepsilon_2}{2},$$

и затем, дословно повторив рассуждения, проведенные выше, получим неравенства (2.8). Доказательство теоремы 2.1 полностью завершено. □

Формулы (2.5) можно написать в эквивалентной форме: при $m\geq 3$

$$\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}U(x)=\int\limits_0^\infty\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\mathscr{J}(\sigma,x)d\sigma+\int\limits_S\left[g(y)\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\Phi_0(r)-f(y)\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}(r)\right]ds_y,\ x\in D_\rho, \tag{2.15}$$

при $m=2$

$$\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}U(x)=\int\limits_1^\infty\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\mathscr{J}(\sigma,x)\,d\sigma + \int\limits_S\left[g(y)\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\Phi_1(y-x)-f(y)\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}(y-x)\right]ds_y,\quad x\in D_\rho, \tag{2.16}$$

где

$$\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\mathscr{J}(\sigma,x)=\int\limits_S\left[g(y)\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}F_\sigma(y-x)-f(y)\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\frac{\partial F_\sigma}{\partial n}(y-x)\right]ds_y,\ x\in D_\rho, \tag{2.17}$$

$$i=0,1,\quad j=\overline{1,m},\quad \frac{\partial^0 U}{\partial x_j^0}\equiv U,\quad \frac{\partial^0\Phi}{\partial x_j^0}\equiv\Phi,\quad \frac{\partial^0 F}{\partial x_j^0}\equiv F,\quad \frac{\partial^0\mathscr{J}}{\partial x_j^0}\equiv\mathscr{J}.$$

Функции $F_\sigma(y-x)$ и $\Phi_0(r)$ определяются равенствами (2.1)–(2.3) и (1.3) соответственно, и $\Phi_1(y-x)=\Phi_\sigma(y-x)|_{\sigma=1}$, причем $\Phi_1(y-x)$ представима в виде (1.3).

Доказательство следует из формулы

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{d^i}{dx_j^i}\Psi(\sigma,x)=\int\limits_a^\infty\frac{d^i}{dx_j^i}\frac{d\Psi(\sigma,x)}{d\sigma}+\frac{d^i}{dx_j^i}\Psi(a,x),$$

в которой $a=0$, когда $m\geq 3$, $a=1$ при $m=2$ и

$$\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\frac{d\Psi(\sigma,x)}{d\sigma}=\int\limits_S\left[g(y)\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}F_\sigma(y-x)-f(y)\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\frac{\partial F_\sigma}{\partial n}(y-x)\right]ds_y,\quad x\in D,$$

$k=0,1$, $m=\overline{1,m}$, при этом дифференцирование под знаком интеграла допустимо и

$$\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\frac{d\Psi}{d\sigma}=\frac{\partial^i}{\partial x_j^i}\mathscr{J}(\sigma,x).$$

Теорема 2.2. *Пусть $S \subset C^2$, $f(y) \in C^1(S_0) \cap L(S)$, $g(y) \in C(S_0) \cap L(S)$. Тогда для существования функции $U(y) = H(D_\rho) \cap C^1(D_\rho \cup S_0)$ такой, что*

$$U(y) = f(y), \quad \frac{\partial U}{\partial n}(y) = g(y), \quad y \in S_0, \tag{2.18}$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in G_\rho$ сходился несобственный интеграл (равномерно на компактах из G_ρ):

$$\left| \int_a^\infty \mathscr{J}(\sigma, x)\, d\sigma \right| < \infty, \tag{2.19}$$

где $a = 0$, если $m \geq 3$, и $a = 1$, когда $m = 2$; $\mathscr{J}(\sigma, x)$ определяется формулой (2.17).

Если условие (2.19) *выполнено, то гармоническое продолжение осуществляется эквивалентными формулами* (2.5), (2.15), (2.16).

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$U(y) \in H(D_\rho) \cap C^1(D_\rho \cup S_0) \cap L(S)$$

с условием (2.18). Пусть E — компакт в G_ρ и $\varepsilon > 0$ таково, что $E \subset \overline{G}_\rho^{2\varepsilon} \subset \overline{G}_\rho^{\varepsilon} \subset G_\rho$. Ясно, что расстояние от E до $\partial G_\rho^\varepsilon$ не меньше $\varepsilon\tau_1$, а расстояние от $\partial G_\rho^{2\varepsilon}$ до $\partial G_\rho^\varepsilon$ равно $\varepsilon\tau_1$. Пусть теперь $y \in \mathbb{R}^m \setminus G_\rho^\varepsilon(|y'| \geq \tau(y_1 - \varepsilon), y_1 > \varepsilon)$, $x \in E$ $(|x'| \leq \tau(x_1 - 2\varepsilon)$, $x_1 > 2\varepsilon)$. Тогда $\arg w = \arg(\sigma w) = \arg(i\tau\sqrt{u^2 + s} + \tau y_1 - \tau x_1)$ и

$$\frac{\tau y_1 - \tau x}{\sqrt{u^2 + s}} \leq \frac{|y'| - |x'| - \varepsilon}{|y' - x'|} \leq 1 - \varepsilon_1, \quad u \geq 0,\ y' \neq x',\ \tau = \frac{\pi}{2\rho},\ \rho > 1.$$

Поэтому для $\arg w$ справедливо неравенство (0.7), при этом если $y' = x'$, то $\operatorname{Re} w < 0$ и это неравенство подавно имеет место. Следовательно, для $\Phi_\sigma(y - x)$, $F_\sigma(y - x)$ справедливы оценки (2.7)–(2.10) из леммы, где $\delta \geq \varepsilon\tau_1$. Обозначим $S_\varepsilon = \overline{G}_\rho^\varepsilon \cap S$, при этом часть $S_\varepsilon \subset S$ вместе с частью T_ε поверхности конуса $\partial G_\rho^\varepsilon$ в объединении состоит из замкнутой кусочно-гладкой поверхности $S_\varepsilon \cup T_\varepsilon$ (направление внешней нормали согласовано), являющейся границей односвязной ограниченной области. Интеграл в правой части формулы (2.17) представим в виде суммы двух интегралов согласно представлению $S = S_\varepsilon \cup (S \setminus S_\varepsilon)$. Так как $F_\sigma(y - x)$ является регулярной гармонической функцией, в силу формулы Грина интеграл по части S_ε равен интегралу по T_ε, причем при $y \in T_\varepsilon$, $x \in E$ для $F_\sigma(y - x)$ справедливы неравенства (2.8) и (2.10) и продолженная функция $U(y)$ вместе со своим градиентом ограничена постоянным числом, зависящим от ε. Поэтому модуль интеграла по части S_ε не превосходит величины

$$\frac{\text{const}}{1 + \delta^2\sigma^2},\ \sigma \geq 0,\ m \geq 3, \quad \frac{\text{const}}{\sigma^2},\ \sigma \geq 1,\ m = 2,\ \delta \geq \varepsilon\tau_1,$$

с постоянной, зависящей от $\rho, \varepsilon, \delta$ и диаметра области D_ρ. Так как $|y| \geq \tau(y_1 - \varepsilon)$, $y_1 \geq \varepsilon$, когда $y \in S \setminus S_\varepsilon$ и $x \in E$, $f(y), g(y) \in C(S_0) \cap L(S)$, то эти неравенства сохраняются (разумеется, с другими постоянными) для модуля интеграла по части $S \setminus S_\varepsilon$. Отсюда следует (2.19).

Достаточность. В условиях теоремы функцию $U(x)$ определим для $x \in G_\rho \setminus S_0$ при $m \geq 3$ и $m = 2$ правыми частями (2.15) и (2.16) соответственно. Рассмотрим первое слагаемое в правой части равенства (2.15). Так как $F_\sigma(y)$

гармонична при $\sigma \geq 0$ в G_ρ, функция $\mathscr{J}(\sigma, x)$ при $\sigma \geq 0$ также гармонична по x в G_ρ. Поэтому из (2.19) заключаем, что первое слагаемое в правой части (2.15) представляет собой гармоническую в G_ρ функцию как предел равномерно сходящейся последовательности гармонических функций

$$U_n(x) = \int_a^n \mathscr{J}(\sigma, x)\, d\sigma, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Второе слагаемое представляет собой разность потенциалов простого слоя и двойного слоя и представляет собой одну гармоническую функцию в D_ρ и другую — в $D'_\rho = G_\rho \setminus \overline{D}_\rho$. Поэтому правая часть в (2.15) определяет в D_ρ и D'_ρ две различные гармонические функции $U^+(x)$ и $U^-(x)$ соответственно. Этим свойством обладает также функция $U(x)$, определенная при $m = 2$ равенством (2.16). Это следует из (1.3). Если x^1, x^2 — две точки на нормали в точке $x \in S_0$, симметричные относительно точки x, то

$$\lim_{x^1 \to x} [U^+(x^1) - U^-(x^2)] = f(x), \quad \lim_{x_1 \to x} \left[\frac{\partial U^+}{\partial n}(x^1) - \frac{\partial U^-}{\partial n}(x^2) \right] = g(x), \ x \in S_0,$$

причем предельные соотношения выполняются равномерно относительно x на каждой компактной части S_0. Если $\max y_1 < x_1$, где $y \in S$, $x \in G_\rho$, то $\operatorname{Re} w = y_1 - x_1 < 0$ и для $\Phi_\sigma(y - x)$ и ее производных справедливы неравенства (2.7) и (2.9). Теперь из формулы (2.5), которая эквивалентна (2.15) и (2.16), видим, что $U^-(x) = 0$ и согласно теореме единственности $U^-(x) \equiv 0$, $x \in D'_\rho$. Ясно, что $U^-(x)$ гладко продолжается на $D'_\rho \cup S_0$. Тогда $U^+(x)$ также гладко продолжается как функция класса $\mathrm{C}^1(D_\rho \cup S_0)$ (см. [6, лемма 1.1]). Следовательно,

$$U^+(x) = f(x), \quad \frac{\partial U^+}{\partial n}(x) = g(x), \quad x \in S_0.$$

Теперь положим $U(x) = U^+(x)$, $x \in D_\rho \cup S_0$. Теорема 2 доказана. $\square$

Пусть D — произвольная область с границей Ляпунова, S_1 — произвольный связный гладкий кусок границы и $U(y)$ — гармоническая в D функция класса $C^2(D) \cap C^1(D \cup S_1)$, удовлетворяющая на S_1 условиям (2.4), где $f(y)$ и $g(y)$ — заданные функции класса $C(S)$.

Пусть x^0 — точка в D, из которой S_1 видно под ненулевым телесным углом по области D. Выберем новую ортогональную систему координат такую, что в новой системе $x^0 = 0$, а часть S поверхности S_1 ($S \subset S_1$), лежащая внутри конуса $|y'| = \tau y_1$, в объединении с частью поверхности конуса образуют границу области D_ρ. Этого можно добиться линейным (ортогональным) преобразованием параллельного сдвига с поворотом, относительно которого оператор Лапласа инвариантен. Найденные формулы восстанавливают $U(x)$ и ее производные внутри области D_ρ. Таким способом $U(x)$ и ее производные восстанавливаются внутри конусов, из вершин которых S_1 видно под ненулевым телесным углом по области. Внутренности конусов образуют в D открытое множество D_1. В D_1 выберем кусок S_2 гиперплоскости (или кусок шаровой поверхности). Выберем точку $x' \in D \backslash D_1$, из которой S_2 видно под ненулевым телесным углом. Тогда по известным значениям $U(x)$ и ее нормальной производной на S_2 (по $\frac{\partial U}{\partial x_k}$, заданной на S_2, восстанавливается нормальная производная) восстанавливаются $U(x)$ и ее производные внутри телесного угла с вершиной в точке x'. Продолжим процесс, тогда $U(x)$ восстанавливается в любой точке замкнутой подобласти области D.

§ 3. Регуляризация по Лаврентьеву

Здесь приводим регуляризацию решения задачи Коши для случая, когда $m = 3$, для области $D_1 \subset \mathbb{R}^3$ с границей ∂D_1, состоящей из компактной части плоскости $\mathbb{R}^2$ и гладкой поверхности Ляпунова S, лежащей в полупространстве $y_1 \geq 0$. Относительно S будем предполагать, что каждый луч, выходящий из любой точки $x \in D_1$, встречает эту поверхность самое большее в k точках. Функцию $\Phi_\sigma(y, x)$ мы получим из (1.1), полагая $m = 3$, $K(w) = e^{\sigma w}$, $\sigma \geq 0$:

$$C_3\Phi_\sigma(y-x) = e^{\sigma(y_1-x_1)}\mathscr{J}_\sigma(y-x), \quad \mathscr{J}_\sigma(y-x) = \int\limits_0^\infty F_\sigma(y-x,u)\frac{du}{u^2+r^2}, \tag{3.1}$$

$$F_\sigma(y-x,u) = -\cos\sigma\sqrt{u^2+s} + (y_1-x_1)\frac{\sin\sigma\sqrt{u^2+s}}{\sqrt{u^2+s}}, \tag{3.2}$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, $s = (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2$, $|y - x| = r$, $C_3 = -2^{-1}w_3\pi$, $y_1 \geq 0$, $x_1 > 0$.

Теорема 3.1. *Пусть $U(y) \in H(D_1) \cap C^1(\overline{D}_1)$, $\overline{D}_1 = \partial D_1 \cup D_1$ и*

$$U(y) = f(y), \quad \frac{\partial U}{\partial n}(y) = g(y), \quad y \in S, \tag{3.3}$$

где $f(y)$, $g(y)$ — заданные функции классов $C^1(S)$ и $C(S)$ соответственно. Пусть вместо $f(y)$ и $g(y)$ заданы их приближения $f_\delta(y)$, $g_\delta(y)$ класса $C(S)$ с заданным уклонением $\delta > 0$:

$$\max_S |f(y) - f_\delta(y)| < \delta, \quad \max_S |g(y) - g_\delta(y)| < \delta. \tag{3.4}$$

Обозначим

$$U_{\delta\sigma}(x) = \int\limits_S \left[g_\delta(y)\Phi_\sigma(y-x) - f_\delta(y)\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y-x)\right] ds_y, \quad x \in D_1. \tag{3.5}$$

Предположим, что

$$|U(y)| + \left|\frac{\partial U}{\partial n}(y)\right| \leq M, \ y \in S_1, \quad S_1 = \partial D_1/S. \tag{3.6}$$

где M — заданное положительное число и

$$\sigma = \frac{1}{x_1^0}\ln\frac{M}{\delta}, \quad M > \delta, \quad x_1^0 = \max_{x\in\overline{D}_1} x_1. \tag{3.7}$$

Тогда для любого $x \in D$ справедливо неравенство

$$|U(x) - U_{\delta\sigma}(x)| \leq \Psi(\sigma)M^{1-\frac{x_1}{x_1^0}}\delta^{\frac{x_1}{x_1^0}}. \tag{3.8}$$

Здесь

$$\Psi(\sigma) = \frac{4}{\pi\omega_3}\bigg[(2+\pi+\pi\sigma)\frac{\sigma\,\mathrm{mes}\,\partial D_1}{1+\sigma} + (2\ln(1+\sigma) + 2\sigma\ln(1+\sigma) + (5/2)\pi\sigma)a_1 \\ + a_2\sqrt{\sigma} + \left(\frac{\pi}{2} + 4\ln(1+\sigma)\right)4\pi k\bigg], \tag{3.9}$$

где $\operatorname{mes}\partial D_1$ *— площадь поверхности* ∂D_1 *и*

$$\int\limits_S \frac{|\cos\Theta|}{r^2}\,ds_y \le 4\pi k, \quad a_1 = \max_{x\in\overline{D}_1}\int\limits_{\partial D_1}\frac{ds}{r}, \quad a_2 = \sqrt{\pi}\max_{x\in\overline{D}_1}\int\limits_{\partial D_1}\frac{ds}{r^{3/2}},$$

Θ *— угол между радиус-вектором* $\vec{r}$ *и нормалью в точке* $y\in S, x\in D$.

Доказательство. Из формулы Грина (2.15) для области D_1 имеем

$$U(x) - U_{\delta\sigma}(x) = \int\limits_{S_1}\left[\Phi_\sigma(y-x)\frac{\partial U}{\partial n}(y) - U(y)\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y_1-x_1)\right]ds$$

$$+\int\limits_S\left[(g(y)-g_\delta(y))\Phi_\sigma(y-x) - (f(y)-f_\delta(y))\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}\right]ds_y, \quad x\in D,\ S_1 = \partial D\setminus S.$$

Из (3.4) и (3.6) выводим неравенство

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)| \le M\int\limits_{S_1}\left[|\Phi_\sigma(y-x)| + \left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y-x)\right|\right]ds_y$$

$$+\delta\int\limits_S\left[|\Phi_\sigma(y-x)| + \left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y-x)\right|\right]ds_y. \quad (3.10)$$

Лемма. *При* $\sigma>0$, $r>0$, $y_1\ge 0$, $x_1>0$ *для* $\Phi_\sigma(y-x)$ *и ее нормальной производной справедливы неравенства*

$$|\Phi_\sigma(y-x)| \le \frac{2}{w_3\pi}\left[\frac{\pi}{2r} + \frac{2}{r}\ln(1+\sigma) + \frac{\pi\sigma}{1+\sigma}\right]e^{\sigma(y_1-x_1)},$$

$$\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y-x)\right| \le \frac{2}{w_3\pi}\left[(4+\pi\sigma)\frac{\sigma}{1+\sigma} + (2\sigma\ln(1+\sigma)+2\pi\sigma)\frac{1}{r} + \frac{\sqrt{\pi\sigma}}{r^{3/2}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\pi}{2}+4\ln(1+\sigma)\right)\frac{|\cos\Theta|}{r^2}\right]e^{\sigma(y_1-x_1)}, \quad \sigma\ge 0,\ r>0. \quad (3.11)$$

Доказательство. Так как $|\sin z| \le 2z(1+z)^{-1}$, $z\ge 0$ и $\sqrt{u^2+s}\ge u$, из (3.2) получаем

$$|F_\sigma(y-x,u)| \le 1 + 2r\sigma(1+u\sigma)^{-1}. \quad (3.12)$$

Отсюда для $\mathscr{J}_\sigma$ выводим неравенство

$$|\mathscr{J}_\sigma(y-x)| \le \frac{\pi}{2r} + \int\limits_0^\infty\frac{2r\sigma}{1+\sigma u}\frac{du}{u^2+r^2} \le \frac{\pi}{2r} + \frac{2}{r}\ln(1+\sigma) + \frac{\pi\sigma}{1+\sigma}. \quad (3.13)$$

Из (3.1) и (3.13) следует первая часть леммы. Для нормальной производной имеем формулу

$$C_3\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \sigma\frac{\partial y_1}{\partial n}\mathscr{J}_\sigma(y-x)e^{\sigma(y_1-x_1)} + e^{\sigma(y_1-x_1)}\frac{d\mathscr{J}_\sigma}{dn},$$

$$\frac{d\mathscr{J}_\sigma}{dn} = \int\limits_0^\infty\frac{dF_\sigma}{dn}\frac{du}{u^2+r^2} - 2\int\limits_0^\infty F_\sigma\frac{r\cos\Theta}{(u^2+r^2)^2}\,du,$$

$$\frac{dF_\sigma}{dn} = \sigma\frac{\sin\sigma\sqrt{u^2+s}}{\sqrt{u^2+s}}\frac{ds}{dn} + \frac{dy_1}{dn}\frac{\sin\sigma\sqrt{u^2+s}}{\sqrt{u^2+s}} + (y_1-x_1)\biggl[\frac{\sigma\cos\sigma\sqrt{u^2+s}}{\sqrt{u^2+s}}\frac{1}{\sqrt{u^2+s}}\frac{ds}{dn} - \frac{\sin\sigma\sqrt{u^2+s}}{(u^2+s)^{3/2}}\frac{ds}{dn}\biggr].$$

Из (3.12) и очевидной оценки

$$\left|\frac{dF_\sigma}{dn}\right| \le \sigma + \frac{2\sigma}{1+\sigma u} + \frac{2r\sqrt{s}\sigma}{u^2+s}$$

получаем

$$\left|\frac{d\mathscr{I}_\sigma}{dn}\right| \le \frac{3\pi\sigma}{2r} + \int\limits_0^\infty \frac{\sigma}{1+\sigma u}\frac{du}{u^2+r^2} + \frac{\pi}{2}\frac{|\cos\Theta|}{r^2} + 4\int\limits_0^\infty \frac{\sigma}{1+\sigma u}\frac{r^2|\cos\Theta|\,du}{(u^2+r^2)^2}. \quad (3.14)$$

Для оценки первого интеграла в (3.14) применим неравенство Коши — Буняковского и найдем, что он меньше $\sqrt{\sigma\pi}r^{-3/2}$. Второй интеграл представим в виде суммы, взяв разбиение $[0,\infty) = [0,1]\cup[1,\infty)$. Оценивая каждый из интегралов, замечаем, что второй интеграл не больше чем

$$\frac{4|\cos\Theta|}{r^2}\ln(1+\sigma) + \frac{4\sigma}{1+\sigma}.$$

Из (3.13) и (3.14) для нормальной производной выводим неравенство

$$C_3\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y-x)\right| \le e^{\sigma(y_1-x_1)}\biggl[\sigma\biggl(\frac{2}{r}\ln(1+\sigma) + \frac{\pi\sigma}{1+\sigma}\biggr) + \frac{4\sigma}{\sigma+1} + \frac{2\pi\sigma}{r} + \frac{\sqrt{\pi\sigma}}{r^{3/2}} + \biggl(\frac{\pi}{2} + 4\ln(1+\sigma)\biggr)\frac{|\cos\Theta|}{r^2}\biggr].$$

Отсюда следует второе неравенство из (3.11). Лемма доказана. □

Продолжим доказательство теоремы. Из леммы и (3.10) вытекает неравенство

$$|U(x) - U_{\delta\sigma}| \le \frac{\Psi(\sigma)}{2}[M + \delta e^{\sigma x_1^0}]e^{-\sigma x_1}.$$

Выбирая σ из (3.7), получаем (3.8). Теорема доказана. □

Построенный функционал $U_{\sigma\delta}(f_\delta, g_\delta, x)$, определенный на множестве пар (f_δ, g_δ), где f_δ, $g_\delta \in C(S)$, $0 \le \delta \le \delta_0$, называется регуляризацией по М. М. Лаврентьеву решения задачи Коши. Другие варианты регуляризации приведены в [8–10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
2. *Голузин Г. М., Крылов В. И.* Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.
3. *Фок В. А., Куни Ф. М.* О введении «гасящей» функции в дисперсионные соотношения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 6. С. 1195–1198.
4. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.
5. *Мергелян С. Н.* Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, № 5. С. 3–26.

6. *Шлапунов А. А.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 3. С. 205–215.
7. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функции в комплексной области. М.: Наука, 1966.
8. *Мухаммаджонов А. М., Ярмухамедов Ш., Ярмухамедов Р.* Об аналитическом продолжении сечений реакций // Журнал «Теоретическая и математическая физика». 1988. Т. 74, № 2. С. 270–280.
9. *Yarmukhamedov Sh.* An analogue of the Riemann — Volterra formula for harmonic functions of several variables // Soviet Math. Dokl. 1989. V. 39, N 3. P. 560–563.
10. *Ярмухамедов Ш.* О задаче Коши для уравнения Лапласа в постановке М. М. Лаврентьева // Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1984. С. 293–299.

Статья поступила 25 сентября 2001 г., окончательный вариант — 9 января 2003 г.

Ярмухамедов Шароф
Самаркандский гос. университет им. А. Навои,
механико-математический факультет,
Университетский бульв., 15, Самарканд 703004, Узбекистан
yarmuxamedov@mail.ru