Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 517.958

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ИНВАРИАНТНЫХ ПОДМОДЕЛЕЙ

С. В. Хабиров

Аннотация: Вычисление дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования подалгебры алгебры Ли, допускаемой системой дифференциальных уравнений, позволяет строить дифференциально инвариантные подмодели. Для любой подалгебры из оптимальной системы подалгебр классифицируются подмодели. Классификация включает в себя ранее рассматриваемые инвариантные подмодели и частично инвариантные подмодели. Приводятся примеры классификации для трехмерных подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики.

Ключевые слова: симметрии дифференциальных уравнений, дифференциальные инварианты, инвариантные подмодели, газовая динамика.

Введение

Исследование систем дифференциальных уравнений с помощью групп преобразований, оставляющих инвариантной систему, проводится в рамках группового анализа дифференциальных уравнений [1]. Основные задачи этого анализа заключаются в отыскании группы преобразований (симметрий), допускаемой системой; в построении оптимальной системы подалгебр алгебры Ли, соответствующей группе преобразований системы; в классификации подмоделей (редукций системы к меньшему числу переменных), отвечающих подалгебрам. Для подалгебры малой размерности простейшей редукцией является инвариантная подмодель. Более сложная редукция есть частично инвариантная подмодель, для которой трудной задачей является приведение в инволюцию возникающей переопределенной системы.

Подмодель получается с помощью представления решения через инварианты подалгебры. Для подалгебр больших размерностей точечных инвариантов не хватает, чтобы конструктивно построить подмодель. Необходимо использовать другие инварианты и желательно полный набор инвариантов, определяющих подалгебру. Так получаются дифференциально инвариантные подмодели, способ классификации которых приводится в настоящей статье.

Для уравнений газовой динамики групповой анализ наиболее продвинут [2, 3]. Вычислены алгебры Ли групп преобразований, допускаемых уравнениями для различных уравнений состояния. Построены оптимальные системы подалгебр для основных алгебр Ли. Перечислены инвариантные подмодели уравнений газовой динамики с общим уравнением состояния [4]. Рассмотрены

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99–01–00523) и Совета поддержки ведущих научных школ (грант 00–15–96163).

некоторые частично инвариантные подмодели. Для подалгебр большой размерности отсутствует классификация дифференциально инвариантных подмоделей.

Для проведения такой классификации необходимо вычислить базис дифференциальных инвариантов и операторы инвариантного дифференцирования для каждой подалгебры. Здесь приведен результат для 3-мерных подалгебр основной алгебры Ли, допускаемой уравнениями газовой динамики.

По размерностям инвариантных многообразий проводится классификация подмоделей на примерах 3-мерных подалгебр.

§ 1. Определение дифференциально инвариантной подмодели

Пусть система дифференциальных уравнений S имеет n независимых переменных x, m искомых функций u и допускает алгебру Ли L операторов дифференцирования 1-го порядка [1, гл. 2]. Пусть известна оптимальная система подалгебр θL. Для любой конечномерной подалгебры $H \in \theta L$ строятся дифференциально инвариантные подмодели. Приведем способ их классификации.

Вычисляется базис дифференциальных инвариантов подалгебры H: $I = (I_1, \ldots, I_k)$ — функционально независимые инварианты, зависящие от независимых переменных; $J = (J_1, \ldots, J_l)$ — функционально независимые инварианты, зависящие от независимых переменных и функций; $J^i = (J^i_1, \ldots, J^i_{l_i})$, $i = 1, \ldots, p$, — функционально независимые инварианты i-го порядка, зависящие от независимых переменных, функций и производных до порядка i включительно (сюда не входят инварианты, полученные из инвариантов меньшего порядка действием операторами инвариантного дифференцирования). Инварианты I, J имеют нулевой порядок. Для любой подалгебры число p конечно [1, § 24, п. 4]. Если Y_j, $j = 1, \ldots, n$, — операторы инвариантного дифференцирования, то $Y_{j_1} \ldots Y_{j_p} J$, $Y_{j_1} \ldots Y_{j_{p-1}} J^1, \ldots, J^p$ — все возможные инварианты p-го порядка. Из них должны определяться все производные p-го порядка.

По теореме о представлении инвариантного многообразия система S записывается через дифференциальные инварианты, тем самым определяются функционально независимые дифференциальные инварианты в базисе. Функционально независимых дифференциальных инвариантов не может быть больше $n - k$, так как они являются функциями от n независимых переменных.

Определение. *Дифференциально инвариантной подмоделью* (ДИП) *ранга* $r+r_1$ называется представление системы S как $(r+r_1)$-мерного многообразия в пространстве всех дифференциальных инвариантов, проекция которого в пространство инвариантов нулевого порядка есть r-мерное многообразие.

Слагаемое ранга r ограничено снизу числом k инвариантов, зависящих только от независимых переменных, и сверху числом всех независимых переменных: $k \le r < n$. Слагаемое ранга r_1 ограничено сверху числом независимых дифференциальных инвариантов порядка, большего нуля, в базисе и не может быть больше n, так как эти инварианты функционально не зависимы и являются функциями от n независимых переменных.

Если $r + r_1 = k$, то все производные порядка p выражаются через I и новые функции $\varphi = \varphi(I)$, x, u, $u_{(1)}, \ldots, u_{(p-1)}$, где $u_{(j)}$ — производные j-го порядка. Продолжим систему S и операторы подалгебры H так, чтобы, вводя новые функции, равные производным, получить систему из уравнений первого порядка. Тогда дифференциально инвариантной подмодели ранга k соответствует переопределенная система, в которой все производные выражаются через I, φ, x и новые функции. По теореме о редукции [1, § 22, п. 7] любое решение такой системы будет инвариантным многообразием подалгебры продолженной алгебры. Эта подалгебра будет продолжением некоторой подалгебры алгебры H. Итак, происходит редукция к инвариантному решению.

Если $r + r_1 > k$, то возникает переопределенная система уравнений, которую можно разбить на две подсистемы. Первая подсистема получается после действия операторами инвариантного дифференцирования Y_j на $r+r_1-k$ независимых дифференциальных инвариантов базиса и приравнивания результата к новым функциям ψ от $r + r_1$ переменных. Так как операторы Y_j образуют алгебру дифференцирований со структурными константами, зависящими от базисных инвариантов, условия совместности задают инволютивную переопределенную систему для функций ψ. Это A-система [1, § 26]. Общее решение A-системы задает представление решения исходной системы.

Вторая подсистема определяется тем, что некоторые дифференциальные инварианты связаны исходной системой S. Это R-система, которая дает дифференциально инвариантную подмодель после подстановки представления решения.

Если $r + r_1 = n$, то получается полное расслоение системы S по подалгебре H.

Общее решение A-системы трудно представить явно для больших рангов. Частные случаи такого представления можно получить, если дополнительно предположить, что пространство инвариантов нулевого порядка замкнуто относительно действия операторов инвариантного дифференцирования. Таким путем получаются регулярные частично инвариантные подмодели (РЧИП), когда инварианты J зависят только от I, а число r_1 равно числу независимых дифференциальных инвариантов, и нерегулярные частично инвариантные подмодели (НЧИП), когда $J = J_1 \cup J_2$ и инварианты J_2 зависят от I, J_1, а число r_1 равно числу независимых дифференциальных инвариантов порядка, большего нуля. Число $r - k$ есть дефект НЧИП. Если из представления $J\ (I)$ определяются все m функций, то получается инвариантная подмодель (ИП).

§ 2. Дифференциальные инварианты трехмерных подалгебр уравнений газовой динамики

Уравнения газовой динамики

$$\rho D\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad DS = 0, \tag{2.1}$$

где $D = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ — оператор полного дифференцирования по времени, ρ — плотность, p — давление, $\mathbf{u}$ — вектор скорости частицы, S — энтропия, допускают 11-мерную алгебру Ли L_{11} операторов дифференцирования первого порядка для уравнения состояния общего вида [5, § 8]. Система (2.1) замыкается уравнением состояния $p = f(\rho, S)$. Далее используется скорость звука, квадрат которой вычисляется по формуле $c^2(p, \rho) = f_\rho$.

Базис операторов в декартовой системе координат таков:

$$\begin{gathered} X_i = \partial_{x^i}, \quad X_{3+i} = t\partial_{x^i} + \partial_{u^i}, \quad X_{6+i} = \varepsilon^k_{ij}(x^j \partial_{x^k} + u^j \partial_{u^k}), \quad i = 1, 2, 3; \\ X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x^i \partial_{x^i}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где x^i — координаты частицы, u^i — координаты скорости, ε^k_{ij} — кососимметричный тензор с $\varepsilon^3_{12} = 1$. Операторы X_7–X_9 соответствуют вращениям. Оператор

X_{11} задает равномерное растяжение. Операторы X_1, X_2, X_3, X_{10} соответствуют переносам. Операторы X_4–X_6 соответствуют равномерному движению начала координат вдоль декартовых осей (галилеевы переносы).

Оптимальная система подалгебр θL_{11} приведена в [2, табл. 6]. Имеется 47 семейств 3-мерных подалгебр, не подобных относительно внутренних автоморфизмов алгебры. Параметры семейств суть инварианты группы внутренних автоморфизмов. Инварианты нулевого порядка (точечные) приведены в [6, табл. 2].

Если подалгебра имеет только один инвариант I, зависящий от независимых переменных, то получим представление инвариантного решения ранга 1, назначая остальные инварианты новыми функциями от I.

Имеется 15 подалгебр, для которых два инварианта I_1, I_2 зависят от независимых переменных, а из выражений для остальных инвариантов находятся только четыре из пяти искомых функций. Одна лишняя функция представляется произвольной, а остальные выражаются через четыре новые функции переменных I_1, I_2. Подстановка этого представления в уравнения газовой динамики дает регулярную частично инвариантную подмодель. Все РЧИП приведены в [7], кроме двух с номерами 3.10^0, 3.39^0, где верхний индекс нуль обозначает нулевое значение параметра семейства подалгебр.

Для отмеченных пятнадцати подалгебр имеются дифференциальные инварианты, выражающиеся через производные лишних функций. Для их нахождения базисные операторы подалгебры вида

$$X = \xi^0(t)\partial_t + \xi^i(t,\mathbf{x})\partial_{x^i} + \eta^k(\mathbf{u})\partial_{u^k}, \quad i,k = 1,2,3, \tag{2.3}$$

продолжаются на производные по формулам

$$\widetilde{X} = X + \big(D_i\eta^k - u^k_j D_i\xi^j\big)\partial_{u^k_i}, \quad i,j = 0,1,2,3, \tag{2.4}$$

где D_i — полное дифференцирование по x^i, $u^k_0 = u^k_t$.

Дифференциальные инварианты подалгебры $\{H_1, H_2, H_3\}$ находятся из инволютивной системы уравнений

$$\widetilde{H}_k F = 0, \quad k = 1,2,3. \tag{2.5}$$

Инварианты, не содержащие производных, называются *точечными инвариантами.* Операторы дифференцирования первого порядка, которые из точечных инвариантов производят часть дифференциальных инвариантов, называются *операторами инвариантного дифференцирования.* Они определяются по дифференциальным инвариантам, и их число равно числу независимых переменных [1, § 24, п. 2]. Другая часть функционально независимых инвариантов определяет базис дифференциальных инвариантов. Этот базис конечен для любой подалгебры [1, § 24, п. 4].

Результаты вычисления базисов дифференциальных инвариантов для пятнадцати 3-мерных подалгебр собраны в следующем ниже списке. Там в первую очередь указаны номер подалгебры N из [2, табл. 6]. Первая цифра номера означает, что подалгебра 3-мерна, вторая цифра — порядковый номер подалгебры, нули сверху означают равенство нулю некоторых параметров семейства подалгебр. Затем приведен базис подалгебры (БП). После этого отмечена система координат (СК) с дополнительными заменами. Потом приведен базис дифференциальных инвариантов (БДИ), причем p, ρ — инварианты для всех подалгебр. В завершение даны операторы инвариантного дифференцирования (ОИД), обозначенные через Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 по порядку следования.

Список дифференциальных инвариантов трехмерных подалгебр.

Подалгебра 3.6. БП $X_7+\alpha X_{11}$, X_1, X_4, $\alpha\neq 0$; СК цилиндрическая.
БДИ: $\frac{r}{t}$, $\theta-\frac{1}{\alpha}\ln|t|$, V, W; Y_0U, Y_1U, Y_2U, Y_3U.
ОИД: $t\partial_t+tU\partial_x$, $t\partial_x$, $t\partial_r$, ∂_θ.

Подалгебра 3.8. БП X_7, $X_8<X_9$; СК сферическая, дополнительные замены $V=H\cos\omega$, $W=H\sin\omega$;
БДИ: t,r,U,H; $Y_0\omega$, $Y_1\omega$, $Y_2\omega+\operatorname{ctg}\theta\sin\omega$, $Y_3\omega+\operatorname{ctg}\theta\cos\omega$.
ОИД: ∂_t, ∂_r, $\frac{\sin\omega}{\sin\theta}\partial_\varphi+\cos\omega\partial_\theta$, $\frac{\cos\omega}{\sin\theta}\partial_\varphi-\sin\omega\partial_\theta$.

Подалгебра 3.10^0. БП X_5, X_6, X_7; СК цилиндрическая, дополнительные замены $V=\frac{r}{t}+Q_1\cos\vartheta$, $W=Q_1\sin\vartheta$;
БДИ: t,x,U,Q_1; $Y_0\vartheta$, ϑ_x, $Y_2\vartheta+\frac{\sin\vartheta}{r}$, $Y_3\vartheta-\frac{\cos\vartheta}{r}$;
ОИД: $\partial_t+\frac{r}{t}\partial_r,\partial_x$, $\cos\vartheta\partial_r+\frac{\sin\vartheta}{r}\partial_\theta$, $\sin\vartheta\partial_r-\frac{\cos\vartheta}{r}\partial_\theta$.
Подалгебра 3.11. БП X_1, X_4, X_7; СК цилиндрическая;
БДИ: t,r,V,W; Y_0U, U_x, U_r, U_θ;
ОИД: $\partial_t+U\partial_x$, $\partial_x,\partial_r,\partial_\theta$.

Подалгебра 3.13. БП X_2, X_3, X_7; СК цилиндрическая, дополнительные замены $V=Q\cos\vartheta$, $W=Q\sin\vartheta$;
БДИ: t,x,Q,U; ϑ_t, ϑ_x $Y_2\vartheta-\frac{\cos\vartheta}{r}$, $Y_3\vartheta+\frac{\sin\vartheta}{r}$;
ОИД: ∂_t, ∂_x, $\sin\vartheta\partial_r-\frac{\cos\vartheta}{r}\partial_\theta$, $\cos\vartheta\partial_r+\frac{\sin\vartheta}{r}\partial_\theta$.

Подалгебра 3.15^{00}. БП X_3+X_5, X_2-X_6, X_7; СК цилиндрическая, дополнительные замены $V=\frac{tr}{t^2+1}+Q_1\cos\vartheta$, $W=\frac{-r}{t^2+1}+Q_1\sin\vartheta$.
БДИ: t,x,U,Q_1; $Y_0\vartheta$, ϑ_x, $Y_2\vartheta+\frac{\cos\vartheta}{r}$, $Y_3\vartheta+\frac{\sin\vartheta}{r}$;
ОИД: $\partial_t+\frac{tr\partial_r-\partial_\theta}{t^2+1},\partial_x$, $\frac{\cos\vartheta}{r}\partial_\theta-\sin\vartheta\partial_r$, $\frac{\sin\vartheta}{r}\partial_\theta+\cos\vartheta\partial_r$.

Подалгебра 3.17. БП X_1, X_4, X_7+X_{10}; СК цилиндрическая;
БДИ: $r,\theta-t,V,W$; Y_0U, U_x, U_r, U_θ;
ОИД: $\partial_t+U\partial_x$, $\partial_x,\partial_r,\partial_\theta$.

Подалгебры 3.23, 3.24^0. БП X_1, X_4, αX_6+X_{11}; СК декартова;
БДИ: $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}-\alpha\ln|t|$, $v,w-\alpha\ln|t|$; Y_0u, Y_1u, Y_2u, Y_3u;
ОИД: $t(\partial_t+u\partial_x+\alpha\ln|t|\partial_z)$, $t\partial_x,t\partial_y,t\partial_z$.

Подалгебра 3.27^{00}. БП X_3, X_6, X_4+X_{10}; СК декартова;
БДИ: $x-\frac{1}{2}t^2$, $y,u-t,v$; Y_0w, w_x, w_y, w_z;
ОИД: $\partial_t+u\partial_x+w\partial_z$, $\partial_x,\partial_y,\partial_z$.

Подалгебра 3.29. БП X_1, X_4, X_{10}; СК декартова;
БДИ: $y,z,v,w,$; Y_0u, u_x, u_y, u_z;
ОИД: $\partial_t+u\partial_x$, ∂_x, ∂_y, ∂_z.
Подалгебра 3.38_1. БП X_3, X_6, X_1+X_5; СК декартова;
БДИ: $t,x-\frac{y}{t}$, $u,v-\frac{y}{t}$; Y_0w, w_x, w_y, w_z;
ОИД: $\partial_t+\frac{y}{t}\partial_y+w\partial_z$, $\partial_x,\partial_y,\partial_z$

Подалгебра 3.38_2. БП X_3, X_5, X_2+X_6; СК декартова;
БДИ: $t,x,u,w+tv-y$; Y_0v, v_x, v_y, v_z;
ОИД: $\partial_t+v\partial_y+w\partial_z$, $\partial_x,\partial_y,\partial_z$.

Подалгебра 3.39^0. БП X_3, X_5, X_6; СК декартова;

БДИ: $t, x, u, v - \frac{y}{t}$; $Y_0 w$, w_x, w_y, w_z;
ОИД: $\partial_t + \frac{y}{t}\partial_y + w\partial_z$, ∂_x, ∂_y, ∂_z.

Подалгебра 3.46. БП X_1, X_2, X_4; СК декартова;
БДИ: t, z, v, w; $Y_0 u$, u_x, u_y, u_z;
ОИД: $\partial_t + u\partial_x$, ∂_x, ∂_y, ∂_z.

§ 3. Дифференциально инвариантные подмодели подалгебры 3.39^0

Продолженные по формулам (2.3), (2.4) на производные операторы базиса подалгебры 3.39^0 таковы:

$$H_1 = X_3 = \partial_z, \quad H_2 = X_5 = t\partial_y + \partial_v - u_y\partial_{u_t} - v_y\partial_{v_t} - w_y\partial_{w_t} - \rho_y\partial_{\rho_t} - S_y\partial_{S_t},$$
$$H_3 = X_6 = t\partial_z + \partial_w - u_z\partial_{u_t} - v_z\partial_{v_t} - w_z\partial_{w_t} - \rho_z\partial_{\rho_t} - S_z\partial_{S_t}.$$

Функционально независимая система решений инволютивной системы (2.5) для этих операторов имеет вид

$$t, \quad x, \quad u, \quad v - \frac{y}{t} = v_1, \quad \rho, \quad S; \tag{3.1}$$

$$w_t + \frac{y}{t}w_y + ww_z = w_0, \quad w_x = w_1, \quad w_y = w_2, \quad w_z = w_3, \tag{3.2}$$

и аналогичные дифференциальные выражения для функций u, ρ, p, $v - \frac{y}{t}$, из которых определяются операторы инвариантного дифференцирования, таковы:

$$Y_0 = \partial_t + \frac{y}{t}\partial_y + w\partial_z, \quad Y_1 = \partial_x, \quad Y_2 = \partial_y, \quad Y_3 = \partial_z. \tag{3.3}$$

Операторы (3.3) образуют алгебру дифференцирований с коммутаторами

$$\begin{gathered}[Y_1, Y_0] = w_1 Y_3, \quad [Y_2, Y_0] = t^{-1}Y_2 + w_2 Y_3, \quad [Y_3, Y_0] = w_3 Y_3,\\ [Y_1, Y_2] = [Y_1, Y_3] = [Y_2, Y_3] = 0.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Уравнения газовой динамики (2.1) (УГД) записываются через инварианты:

$$\begin{gathered}Y_0 u + uY_1 u + v_1 Y_2 u + \rho^{-1}Y_1 p = 0,\\ Y_0 v_1 + uY_1 v_1 + v_1 Y_2 v_1 + \rho^{-1}Y_2 p = -t^{-1}v_1,\\ w_0 + uw_1 + v_1 w_2 + \rho^{-1}Y_3 p = 0,\\ Y_0\rho + uY_1\rho + v_1 Y_2\rho + \rho(Y_1 u + Y_2 v_1 + w_3 + t^{-1}) = 0,\\ Y_0 S + uY_1 S + v_1 Y_2 S = 0.\end{gathered} \tag{3.5}$$

В базисе инвариантов (3.1) два инварианта зависят только от независимых переменных, значит, слагаемое ранга r равно 2 или 3. Для дифференциально инвариантной подмодели (ДИП) ранга $2+r_1$ пространство инвариантов нулевого порядка (3.1) замкнуто относительно действия операторами инвариантного дифференцирования. Тогда w_3 и w_0 находятся из (3.5) через независимые инварианты базиса: t, x, u, v_1, ρ, S, w_1, w_2. Итак, ДИП могут быть следующих рангов: 2+0, 2+1, 2+2, 3+0, 3+1. Рассмотрим эти случаи.

ДИП ранга 2+0 имеет представление дифференциально инвариантного решения

$$u = u(t, x), \quad v = \frac{y}{t} + v_1(t, x), \quad \rho = \rho(t, x), \quad S = S(t, x); \tag{3.6}$$

$$w_t+\frac{y}{t}w_y+ww_z=w_0(t,x),\quad w_x=w_1(t,x),\quad w_y=w_2(t,x),\quad w_z=w_3(t,x).\quad (3.7)$$

Все производные от функции w определяются, значит, происходит редукция к инвариантной подмодели (ИП) по некоторой подалгебре. Для нахождения подалгебры надо найти ее инвариант, содержащий w. Интегрирование (3.7) приводит к двум случаям:

1) $w-\frac{Cy}{t}=\varphi(t,x)$ — инвариант подалгебры $\{X_3,X_5+CX_6\}$ (C — постоянная), которая подобна подалгебре $\{X_2,X_4\}$ из [2, табл. 6].

2) $w-\frac{Cy}{t^2}-\frac{z}{t}=\varphi(t,x)$ — инвариант подалгебры $\{X_5-CX_3,X_6\}$ (C — постоянная), которая подобна подалгебре $\{X_5,X_6\}$ из [2, табл. 6].

ДИП ранга 2+2 имеет представление (3.6), а независимые дифференциальные инварианты являются функциями всех независимых переменных

$$w_1=w_1(t,x,y,z),\quad w_2=w_2(t,x,y,z).$$

Из УГД (3.5) получается подмодель, которая совпадает с РЧИП [6]:

$$w=zh(t,x)+k(t,x,y);\qquad (3.8)$$

$$\rho(u_t+uu_x)+p_x=0,\quad (tv_1)_t+u(tv_1)_x=0,$$
$$S_t+uS_x=0,\quad (t\rho)_t+(tu\rho)_x+th\rho=0,$$
$$h_t+uh_x+h^2=0,\quad k_t+uk_x+\left(v_1+\frac{y}{t}\right)k_y+kh=0.\qquad (3.9)$$

Введение лагранжевой переменной $\xi=\xi(t,x)$ по формулам $\rho=t^{-1}h\xi_x$, $\xi_t+u\xi_x=0$ приводит к интегралам системы (3.9):

$$S=S(\xi),\ h=(t+H(\xi))^{-1},\ v_1=t^{-1}V(\xi),\ k=(t+H(\xi))^{-1}K(\xi,t^{-1}(y+V(\xi))),$$

где $S(\xi)$, $H(\xi)$, $V(\xi)$, $K(\xi,v)$ — произвольные функции.

Отсюда и из (3.6), (3.8) следует, что

$$v=t^{-1}(y+V(\xi)),\quad w=(t+H(\xi))^{-1}(z+K(\xi,t^{-1}(y+V(\xi)))),$$

и подмодель сводится к одному квазилинейному уравнению 2-го порядка гиперболического типа

$$\xi_x^2\xi_{tt}-2\xi_t\xi_x\xi_{tx}+\left(\xi_t^2-c^2\xi_x^2\right)\xi_{xx}=\xi_x^3f_SS't(t+H)-c^2H'(t+H)^{-1}\xi_x^4,$$

где $c^2=f_\rho(\rho,S(\xi))$, $\rho=t^{-1}(t+H(\xi))^{-1}\xi_x$.

При $H=0$, т. е. при $h=t^{-1}$, получается ИП на подалгебре $\{X_5,X_6\}$. Если в (3.8) $h=0$ и $k_y=0$, то получается ИП на подалгебре $\{X_2,X_4\}$.

ДИП ранга 2+1 имеет одну связь в пространстве независимых дифференциальных инвариантов

$$w_y=F(t,x,w_x).\qquad (3.10)$$

Подстановка (3.8) в (3.10) дает $k=yk_1(t,x)+g(t,x)$ при $h_x\neq 0$. Получается частный случай ДИП ранга 2+2, где последнее уравнение разбивается на два уравнения

$$k_{1t}+uk_{1x}+k_1(h+t^{-1})=0,\quad g_t+gh+v_1k_1=0.$$

В лагранжевых переменных получаются интегралы

$$t(t+H(\xi))k_1=K(\xi),\quad g(t+H(\xi))=t^{-1}V(\xi)K(\xi)+G(\xi),$$

где $K(\xi)$, $G(\xi)$ — произвольные функции.

При $h = t^{-1}$ функция k удовлетворяет переопределенной системе

$$k_y = F(t, x, \omega), \quad \omega = k_x, \quad k_t = -uk_x - (v_1 + yt^{-1})F - kt^{-1}$$

с условием совместности

$$F_t + uF_x - F_\omega[(u_x + t^{-1})\omega + v_{1x}F] = -2Ft^{-1}.$$

ДИП ранга 3+0 имеет представление решения

$$u = u(t, x, \alpha), \quad v = \frac{y}{t} + v_1(t, x, \alpha), \quad \rho = \rho(t, x, \alpha), \quad S = S(t, x, \alpha), \tag{3.11}$$

$$w_x = w_1(t, x, \alpha), \quad w_y = w_2(t, x, \alpha), \quad w_z = w_3(t, x, \alpha),$$
$$w_t + \frac{y}{t}w_y + ww_z = w_0(t, x, \alpha), \tag{3.12}$$

где α — параметр в пространстве независимых инвариантов базиса, функционально не связанный с t, x. В качестве этого параметра может быть взята одна из величин u, v_1, ρ, S, w_1 или w_2, если соответствующая величина существенно зависит от α.

Уравнения (3.5) принимают вид

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + \rho^{-1}p_x + u_\alpha(Y_0\alpha + uY_1\alpha + v_1Y_2\alpha) + \rho^{-1}p_\alpha Y_1\alpha = 0, \\ v_{1t} + uv_{1x} + t^{-1}v_1 + v_{1\alpha}(Y_0\alpha + uY_1\alpha + v_1Y_2\alpha) + \rho^{-1}p_\alpha Y_2\alpha = 0, \\ S_t + uS_x + S_\alpha(Y_0\alpha + uY_1\alpha + v_1Y_2\alpha) = 0, \\ w_0 + uw_1 + v_1w_2 + \rho^{-1}p_\alpha Y_3\alpha = 0, \\ \rho_t + u\rho_x + \rho(u_x + t^{-1} + w_3) + \rho_\alpha(Y_0\alpha + uY_1\alpha + v_1Y_2\alpha) + \rho(u_\alpha Y_1\alpha + v_{1\alpha}Y_2\alpha) = 0. \end{gathered} \tag{3.13}$$

По определению ДИП все дифференциальные инварианты суть функции переменных t, x, α:

$$\nabla\alpha = \mathbf{a}(t, x, \alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad Y_0\alpha = \alpha_0(t, x, \alpha). \tag{3.14}$$

Условия совместности системы (3.14) с помощью соотношений (3.4) задаются системой равенств

$$\begin{aligned} \alpha_{2\alpha}\alpha_3 &= \alpha_{3\alpha}\alpha_2, \\ \alpha_{1\alpha}\alpha_2 &= \alpha_{2\alpha}\alpha_1 + \alpha_{2x}, \\ \alpha_{1\alpha}\alpha_3 &= \alpha_{3\alpha}\alpha_1 + \alpha_{3x}, \\ \alpha_{1t} + \alpha_{1\alpha}\alpha_0 &= \alpha_{0x} + \alpha_{0\alpha}\alpha_1 - w_1\alpha_3, \\ \alpha_{2t} + \alpha_{2\alpha}\alpha_0 &= \alpha_{0\alpha}\alpha_2 - t^{-1}\alpha_2 - w_2\alpha_3, \\ \alpha_{3t} + \alpha_{3\alpha}\alpha_0 &= \alpha_{0\alpha}\alpha_3 - w_3\alpha_3. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Условия совместности системы (3.12) с помощью соотношений (3.4) задаются системой равенств

$$\begin{aligned} w_{2\alpha}\alpha_3 &= w_{3\alpha}\alpha_2, \\ w_{1\alpha}\alpha_2 &= w_{2\alpha}\alpha_1 + w_{2x}, \\ w_{1\alpha}\alpha_3 &= w_{3\alpha}\alpha_1 + w_{3x}, \\ w_{1t} + \alpha_0 w_{1\alpha} &= w_{0x} + \alpha_1 w_{0\alpha} - w_1 w_3, \\ w_{2t} + \alpha_0 w_{2\alpha} &= \alpha_2 w_{0\alpha} - w_2(w_3 + t^{-1}), \\ w_{3t} + \alpha_0 w_{3\alpha} &= \alpha_3 w_{0\alpha} - w_3^2. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Системы (3.15), (3.16) инволютивны и определяют функции α_j, w_j, $j = 0, 1, 2, 3$.

Если $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, то α функционально связано с t, x, значит, $\alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0$.

Из первых трех уравнений систем (3.15) и (3.16) следует представление решения $\alpha_3 = \alpha_2\chi(t)$, $w_3 = w_2\chi(t) + \sigma(t)$ при $\alpha_2 \neq 0$ или $\alpha_2 = \alpha_3\chi_1(t)$, $w_2 = w_3\chi_1(t) + \sigma_1(t)$ при $\alpha_3 \neq 0$. Отсюда при $\chi \neq 0$ получим равенства $\chi_1 = \chi^{-1}$, $\sigma_1 = -\sigma\chi^{-1}$. Окончательно система (3.15) интегрируется в виде

$$\begin{gathered} \alpha_2 = \mu_\alpha^{-1}, \quad \alpha_1 = -\mu_x\mu_\alpha^{-1}, \quad \alpha_3 = -\chi\mu_\alpha^{-1} \quad \text{при} \quad \alpha_2 \neq 0; \\ \alpha_3 = \mu_{1\alpha}^{-1}, \quad \alpha_1 = -\mu_{1x}\mu_{1\alpha}^{-1}, \quad \alpha_2 = -\chi_1\mu_{1\alpha}^{-1} \quad \text{при} \quad \alpha_3 \neq 0, \end{gathered} \tag{3.17}$$

где $\mu = \chi\mu_1$, $\mu_1(t, x, \alpha)$ — произвольная функция.

Соотношения (3.16) дают

$$\begin{gathered} w_1 = (\mu_{1t} + \alpha_0\mu_{1\alpha})_x - \mu_{1x}\mu_{1\alpha}^{-1}(\mu_{1t} + \alpha_0\mu_{1\alpha})_\alpha, \\ w_2 = \chi_1 w_3 + \sigma_1, \quad w_3 = \mu_{1\alpha}^{-1}(\mu_{1t} + \alpha_0\mu_{1\alpha})_\alpha, \\ w_0 = (\mu_{1t} + \alpha_0\mu_{1\alpha})_t + \alpha_0(\mu_{1t} + \alpha_0\mu_{1\alpha})_\alpha, \end{gathered} \tag{3.18}$$

$$\chi_1' = -t^{-1}\chi_1 - \sigma_1, \quad \sigma_1' = -t^{-1}\sigma_1. \tag{3.19}$$

Теперь интегрируются системы (3.2), (3.14) и (3.19) в силу (3.18), (3.17):

$$\mu_1(t, x, \alpha) = z + \chi_1(t)y, \quad w = \sigma_1 y + \mu_{1t} + \alpha_0\mu_{1\alpha}, \tag{3.20}$$

где $\sigma_1 = C_1t^{-1}$, $\chi_1 = -C_1 + C_2t^{-1}$; C_1, C_2 — постоянные; $\mu_1(t, x, \alpha)$, $\alpha_0(t, x, \alpha)$ — произвольные функции.

Подстановка представления решения (3.20) в (3.13) приводит к ДИП ранга 3+0:

$$\begin{gathered} \mu_{1\alpha}(u_t + uu_x + \rho^{-1}p_x) - u_\alpha(\alpha_0\mu_{1\alpha} + \chi_1 v_1 - u\mu_{1x}) - \rho^{-1}p_\alpha\mu_{1x} = 0, \\ \mu_{1\alpha}(v_{1t} + uv_{1x} + t^{-1}v_1) + v_{1\alpha}(\alpha_0\mu_{1\alpha} + \chi_1 v_1 - u\mu_{1x}) + \rho^{-1}p_\alpha\chi_1 = 0, \\ \mu_{1\alpha}(S_t + uS_x) + S_\alpha(\alpha_0\mu_{1\alpha} + \chi_1 v_1 - u\mu_{1x}) = 0, \end{gathered} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} \mu_{1\alpha}[(\mu_{1t}+\alpha_0\mu_{1\alpha})_t+\alpha_0(\mu_{1t}+\alpha_0\mu_{1\alpha})_\alpha]+u[\mu_{1\alpha}(\mu_{1t}+\alpha_0\mu_{1\alpha})_x-\mu_{1x}(\mu_{1t}+\alpha_0\mu_{1\alpha})_\alpha] \\ + v_1[\sigma_1\mu_{1\alpha} + \chi_1(\mu_{1t} + \alpha_0\mu_{1\alpha})_\alpha] + \rho^{-1}p_\alpha = 0, \end{aligned}$$

$$\mu_{1\alpha}\left[\rho_t + (u\rho)_x + \rho t^{-1}\right] + \rho(\mu_{1t} + \alpha_0\mu_{1\alpha})_\alpha + \chi_1(\rho v_1)_\alpha - \mu_{1x}(u\rho)_\alpha + \alpha_0\rho_\alpha\mu_{1\alpha} = 0.$$

Подмодель состоит из пяти уравнений для шести функций u, v_1, ρ, S, μ_1, α_0 от трех переменных t, x, α. Любая из функций может быть выбрана равной α, например $\alpha_0 = \alpha$, тогда

$$w = \sigma_1 y + \mu_{1t} + \alpha\mu_{1\alpha}, \tag{3.22}$$

$$\mu_1(t, x, \alpha) = z + \chi_1(t)y \tag{3.23}$$

и система (3.21) определяет функции μ_1, u, v_1, ρ, S; равенство (3.23) определяет неявно функцию $\alpha = \alpha(t, x, y, z)$ и после подстановки в (3.22) и (3.11) получается решение УГД (2.1).

При $\chi = 0$ получается особый случай. Соотношения (3.15) и (3.16) дополнительно к (3.17) дают

$$\begin{gathered} w_1 = \nu_x - \nu_\alpha\mu_x\mu_\alpha^{-1}, \quad w_2 = \nu_\alpha\mu_\alpha^{-1}, \quad w_3 = \sigma(t), \\ w_0 = \nu_t + \nu_\alpha\mu_\alpha^{-1}(t^{-1}\mu - \mu_t) + \sigma\nu, \quad \sigma' = -\sigma^2, \end{gathered} \tag{3.24}$$

где $\nu(t,x,\alpha)$ — произвольная функция.

С точностью до преобразований, допускаемых системой УГД, интегрируются соотношения (3.2) и (3.14) в силу (3.24): $\mu(t,x,\alpha)=y$, $\sigma=(t+C_0)^{-1}$, $w=\nu+\sigma z$, где C_0 — постоянная.

Подстановка в (3.13) приводит к ДИП ранга 3+0 особого случая:

$$\mu_\alpha(u_t+uu_x+\rho^{-1}p_x)+u_\alpha(v_1-u\mu_x-\mu_t+t^{-1}\mu)-\rho^{-1}p_\alpha\mu_x=0,$$

$$\mu_\alpha(v_{1t}+uv_{1x}+t^{-1}v_1)+v_{1\alpha}(v_1-u\mu_x-\mu_t+t^{-1}\mu)+\rho^{-1}p_\alpha=0,$$

$$\mu_\alpha(S_t+uS_x)+S_\alpha(v_1-u\mu_x-\mu_t+t^{-1}\mu)=0,$$

$$\mu_\alpha(\rho_t+u\rho_x+\rho(u_x+\sigma+t^{-1}))+\rho_\alpha(v_1-u\mu_x-\mu_t+t^{-1}\mu)+\rho(v_{1\alpha}-u_\alpha\mu_x)=0,$$

$$\mu_\alpha\nu_t-\nu_\alpha\mu_t+\sigma\nu\mu_\alpha+t^{-1}\mu\nu_\alpha+u(\mu_\alpha\nu_x-\mu_x\nu_\alpha)+v_1\nu_\alpha=0.$$

Подмодель состоит из пяти уравнений для шести функций u, v_1, ρ, S, μ, ν от переменных t, x, α. Любая из функций может быть взята равной α, например $\nu=\alpha$.

ДИП ранга 3+1 имеет представление (3.11), а все дифференциальные инварианты порядка, большего нуля, являются функциями переменных t, x, y, z или t, x, α, z. Подмодель совпадает с НЧИП ранга 3 дефекта 2. Из (3.13) для решений общего положения ($S_\alpha\neq 0$, $p_\alpha\neq 0$) следует, что $Y_0\alpha=\alpha_0(t,x,\alpha)$, $Y_1\alpha=\alpha_1(t,x,\alpha)$, $Y_2\alpha=\alpha_2(t,x,\alpha)$, $w_z=w_3(t,x,\alpha)$. Условия совместности с помощью (3.4) задаются модифицированными равенствами (3.15), где в левую часть последнего равенства добавляется слагаемое $w\alpha_{3z}$.

Интегрирование условий совместности дает представление решения

$$\alpha_1=-\frac{\mu_x}{\mu_\alpha},\quad \alpha_2=\frac{1}{\mu_\alpha},\quad \alpha_3=\frac{Ct}{\mu_\alpha(z+k_1)}\Rightarrow \mu(t,x,\alpha)=y+Ct\ln(z+k_1),$$

$$w=-k_1'+\frac{z+k_1}{Ct}\left(\mu_t-\frac{\mu}{t}+\alpha_0\mu_\alpha\right),$$

где $\mu(t,x,\alpha)$, $\alpha_0(t,x,\alpha)$, $k_1(t)$ — произвольные функции, $C\neq 0$ — постоянная.

Подстановка в 4-е уравнение системы (3.13) дифференциальных инвариантов, выраженных через новые функции μ, α_0, приводит к равенству вида

$$-k_1''\mu_\alpha+(z+k_1)(Ct)^{-1}\Phi(t,x,\alpha)+\rho^{-1}p_\alpha Ct(z+k_1)^{-1}=0.$$

Здесь z — свободная переменная, значит, $p_\alpha=0$; противоречие.

Итак, ДИП ранга 3+1 может быть лишь при $p_\alpha=0$, при этом из (3.13) определяются выражения $Y_0\alpha+uY_1\alpha+v_1Y_2\alpha=\nu(t,x,\alpha)$ (иначе получается ДИП ранга $2+r_1$) и $w_0=-uw_1-v_1w_2$, $w_3+u_\alpha Y_1\alpha+v_{1\alpha}Y_2\alpha=\mu(t,x,\alpha)$.

В итоге мы приходим к переопределенной системе, которую надлежит исследовать на совместность с помощью соотношений (3.4). Эта задача трудоемка так же, как исследование любого частично инвариантного решения дефекта, большего 1.

§ 4. Дифференциально инвариантные подмодели подалгебры 3.10^0

Базис подалгебры 3.10^0 задается операторами

$$X_5=t\cos\theta\partial_r+r^{-1}t\sin\theta(\partial_\vartheta-\partial_\theta),\quad X_6=t\sin\theta\partial_r+r^{-1}t\cos\theta(\partial_\theta-\partial_\vartheta),\quad X_7=\partial_\theta$$

в цилиндрической системе координат

$$y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta, \quad v = V\cos\theta - W\sin\theta, \quad w = V\sin\theta + W\cos\theta$$

с дополнительной заменой

$$V = \frac{r}{t} + Q\cos\vartheta, \quad W = Q\sin\vartheta.$$

Базис дифференциальных инвариантов таков: t, x, U, Q, ρ, S,

$$\begin{gathered}\vartheta_t + rt^{-1}\vartheta_r = J_0, \quad \vartheta_x = J_1, \quad \vartheta_r\cos\vartheta + r^{-1}\sin\vartheta(\vartheta_\theta + 1) = J_2,\\ \vartheta_r\sin\vartheta - r^{-1}\cos\vartheta(\vartheta_\theta + 1) = J_3.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Операторы инвариантного дифференцирования

$$\begin{gathered}Y_0 = \partial_t + rt^{-1}\partial_r, \quad Y_1 = \partial_x, \quad Y_2 = \cos\vartheta\partial_r + r^{-1}\sin\vartheta\partial_\theta,\\ Y_3 = \sin\vartheta\partial_r - r^{-1}\cos\vartheta\partial_\theta\end{gathered} \tag{4.2}$$

образуют алгебру дифференцирований с коммутаторами

$$\begin{gathered}[Y_0, Y_1] = 0, \quad [Y_0, Y_2] = -t^{-1}Y_2 - J_0Y_3, \quad [Y_0, Y_3] = J_0Y_2 - t^{-1}Y_3,\\ [Y_1, Y_2] = -J_1Y_3, \quad [Y_1, Y_3] = J_1Y_2, \quad [Y_2, Y_3] = J_2Y_2 + J_3Y_3.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Уравнения газовой динамики (3.1) записываются через инварианты

$$\begin{gathered}Y_0U + UY_1U + QY_2U + \rho^{-1}Y_1p = 0,\\ Y_0Q + UY_1Q + QY_2Q + \rho^{-1}Y_2p = -t^{-1}Q,\\ Q(J_0 + UJ_1 + QJ_2) - \rho^{-1}Y_3p = 0,\\ Y_0\rho + UY_1\rho + QY_2\rho + \rho(Y_1U + Y_2Q - QJ_3 + 2t^{-1}) = 0,\\ Y_0S + UY_1S + QY_2S = 0.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Для ДИП ранга $2+r_1$ пространство инвариантов нулевого порядка замкнуто относительно операторов инвариантного дифференцирования.

ДИП ранга 2+0 имеет представление дифференциально инвариантного решения

$$U = U(t,x), \quad Q = Q(t,x), \quad \rho = \rho(t,x), \quad S = S(t,x); \tag{4.5}$$

$$\vartheta_t + rt^{-1}\vartheta_r = J_0(t,x), \quad \vartheta_x = J_1(t,x), \tag{4.6}$$

$$\vartheta_r\cos\vartheta + r^{-1}\sin\vartheta(\vartheta_\theta + 1) = J_2(t,x), \quad \vartheta_r\sin\vartheta - r^{-1}\cos\vartheta(\vartheta_\theta + 1) = J_3(t,x).$$

Все производные от функции ϑ определяются, значит, происходит редукция к ИП по некоторой подалгебре. Для нахождения подалгебры надо найти представление для ϑ, которое задает инвариант искомой подалгебры. Приравнивая смешанные производные функции ϑ, получим $J_2 = J_3 = 0$. Отсюда следует, что $\vartheta + \theta = \vartheta_1(t,x)$ есть инвариант подалгебры $\{X_5, X_6\}$. Инвариантное решение ранга 2 на подалгебре $\{X_5, X_6\}$ проще рассмотреть в декартовой системе координат. Представление решения имеет вид $u = u(t,x)$, $v = yt^{-1} + v_1(t,x)$, $w = zt^{-1} + w_1(t,x)$, $\rho = \rho(t,x)$, $S = S(t,x)$.

Если ввести функцию тока $\psi = \psi(t,x)$ по формулам

$$\rho = t^{-2}\psi_x, \quad u = -\psi_t\psi_x^{-1},$$

то УГД имеет три интеграла:

$$S = S(\psi), \quad v_1 = t^{-1}A(\psi), \quad w_1 = t^{-1}B(\psi),$$

и ИП сводится к одному квазилинейному уравнению

$$\psi_x^2\psi_{tt} - 2\psi_t\psi_x\psi_{tx} + \big(\psi_t^2 - c^2\psi_x^2\big)\psi_{xx} = t^2 f_S S'\psi_x^3,$$

где $c^2 = f_\rho(t^{-2}\psi_x, S(\psi))$.

ДИП ранга 2+2 имеет представление для функций U, Q, ρ, S такое же, как в ДИП ранга 2+0 (4.5), а дифференциальные инварианты J_2, J_3 являются функциями t, x, J_0, J_1 или t, x, r, θ. Из УГД следуют уравнения

$$\begin{gathered} U_t + UU_x + \rho^{-1}p_x = 0, \quad Q_t + UQ_x = -t^{-1}Q, \quad S_t + US_x = 0, \\ \rho_t + U\rho_x + \rho(U_x + 2t^{-1}) = \rho Q J_3, \quad J_0 + UJ_1 + QJ_2 = 0. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Последние два уравнения системы (4.7) суть уравнения для ϑ:

$$\vartheta_r \sin\vartheta - r^{-1}\cos\vartheta(\vartheta_\theta + 1) = J_3(t,x), \tag{4.8}$$

$$\vartheta_t + rt^{-1}\vartheta_r + U\vartheta_x + Q(\vartheta_r\cos\vartheta + r^{-1}\sin\vartheta(\vartheta_\theta + 1)) = 0.$$

Следуя [8], представим решение системы (4.8) в неявном виде $\Phi(t,x,r,\theta,\vartheta) = 0$, $\Phi_\vartheta \neq 0$. Тогда Φ будет инвариантом операторов

$$Z_1 = \sin\vartheta\partial_r - r^{-1}\cos\vartheta\partial_\theta + (J_3 + r^{-1}\cos\vartheta)\partial_\vartheta,$$

$$Z_2 = \partial_t + U\partial_x + (rt^{-1} + Q\cos\vartheta)\partial_r + r^{-1}Q\sin\vartheta\partial_\theta - r^{-1}Q\sin\vartheta\partial_\vartheta.$$

Условие совместности системы (4.8) есть линейное однородное уравнение, которое задается коммутатором

$$[Z_1, Z_2] = (t^{-1} - QJ_3)Z_1 - \big(J_{3t} + UJ_{3x} - QJ_3^2 + t^{-1}J_3\big)\partial_\vartheta$$

и, следовательно, является уравнением для J_3

$$J_{3t} + UJ_{3x} - QJ_3^2 + t^{-1}J_3 = 0. \tag{4.9}$$

Если ввести лагранжеву координату $\xi = \xi(t,x)$, удовлетворяющую уравнению $\xi_t + U\xi_x = 0$, то система (4.7), (4.8) имеет интегралы

$$Q = t^{-1}Q_1(\xi), \quad S = S(\xi), \quad J_3 = (Q_1(\xi) + tJ(\xi))^{-1} \tag{4.10}$$

и сводится к одному квазилинейному уравнению для обратной функции $x = x(t,\xi)$:

$$x_\xi^2 x_{tt} - c^2 x_{\xi\xi} = c^2 x_\xi\left(\frac{tJ' + Q_1'}{tJ + Q_1} - \frac{R'}{R}\right) - R^{-1}x_\xi f_S S' t(tJ + Q_1), \tag{4.11}$$

при этом

$$U = x_t, \quad \rho = R(\xi)(Jt + Q_1)^{-1}t^{-1}x_\xi^{-1}, \quad c^2 = f_\rho(\rho, S). \tag{4.12}$$

Инволютивная система (4.8) принимает вид

$$t\cos\vartheta\Phi_t + (r\cos\vartheta + Q_1)\Phi_r + Q_1\sin\vartheta(tJ + Q_1)^{-1}\Phi_\vartheta = 0,$$

$$t\sin\vartheta\Phi_t + r\sin\vartheta\Phi_r + r^{-1}Q_1\Phi_\theta - Q_1(r^{-1} + \cos\vartheta(tJ + Q_1)^{-1})\Phi_\vartheta = 0.$$

Функционально независимый набор инвариантов первого уравнения таков: ξ, θ, $C_1 = (J + t^{-1}Q_1)\sin\vartheta$, $C_2 = rt^{-1} + (J + t^{-1}Q_1)\cos\vartheta$. Второе уравнение в инвариантах первого принимает вид

$$\Phi_\theta - C_2\Phi_{C_1} + C_1\Phi_{C_2} = 0$$

и имеет инварианты $\eta^2 = C_1^2 + C_2^2$, $\theta + \operatorname{arctg}(C_1/C_2) = \zeta$, ξ.

Итак, общее решение системы (4.8) имеет представление

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0, \tag{4.13}$$

где Φ — произвольная функция, а η, ζ определяются неявно из соотношений

$$(J + t^{-1}Q_1)\sin\vartheta = \eta\sin(\zeta - \theta), \quad rt^{-1} + (J + t^{-1}Q_1)\cos\vartheta = \eta\cos(\zeta - \theta). \tag{4.14}$$

Подмодель задается уравнением (4.11), а решение УГД (3.1) определяется равенствами (4.10), (4.12)–(4.14).

ДИП ранга 2+1 имеет представление (4.5), а дифференциальные инварианты J_0–J_3 из (4.1) являются функциями t, x и параметра $\alpha = \alpha(t, x, r, \theta)$, который может быть какой-либо функцией от инвариантов базиса, существенно зависящей от дифференциальных инвариантов порядка, большего нуля.

Из системы (4.4) после подстановки представления решения получается система (4.7), откуда следует, что

$$J_3 = J_3(t, x), \quad J_0 = -UJ_1 - QJ_2. \tag{4.15}$$

Пространство инвариантов размерности 3 замкнуто относительно операторов (4.2), значит,

$$Y_0\alpha = K_0(t, x, \alpha), \quad Y_1\alpha = K_1(t, x, \alpha), \quad Y_2\alpha = K_2(t, x, \alpha), \quad Y_3\alpha = K_3(t, x, \alpha). \tag{4.16}$$

Из выражений для инвариантов (4.1) следуют равенства

$$\begin{gathered} Y_0\vartheta = J_0(t, x, \alpha), \quad Y_1\vartheta = J_1(t, x, \alpha), \quad Y_2\vartheta = J_2(t, x, \alpha) - r^{-1}\sin\vartheta, \\ Y_3\vartheta = J_3(t, x, \alpha) + r^{-1}\cos\vartheta. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Используя таблицу коммутаторов (4.3), получим условия совместности системы (4.16):

$$\begin{gathered} K_2K_{1\alpha} = K_{2x} + K_1K_{2\alpha} + K_3J_1, \quad K_3K_{1\alpha} = K_{3x} + K_1K_{3\alpha} - K_2J_1, \\ K_{1t} + K_0K_{1\alpha} = K_{0x} + K_1K_{0\alpha}, \quad K_2K_{3\alpha} = K_3K_{2\alpha} + K_2J_2 + K_3J_3, \\ K_{2t} + K_0K_{2\alpha} + K_3J_0 = K_2K_{0\alpha} - t^{-1}K_2, \\ K_{3t} + K_0K_{3\alpha} - K_2J_0 = K_3K_{0\alpha} - t^{-1}K_3, \end{gathered} \tag{4.18}$$

и аналогичные условия для системы (4.17):

$$\begin{gathered} K_2J_{1\alpha} = J_{2x} + K_1J_{2\alpha} + J_1J_3, \quad K_3J_{1\alpha} = J_{3x} + K_1J_{3\alpha} - J_1J_2, \\ J_{1t} + K_0J_{1\alpha} = J_{0x} + K_1J_{0\alpha}, \quad K_2J_{3\alpha} = K_3J_{2\alpha} + J_2^2 + J_3^2, \\ J_{2t} + K_0J_{2\alpha} + J_0J_3 = K_2J_{0\alpha} - t^{-1}J_2, \quad J_{3t} + K_0J_{3\alpha} - J_0J_2 = K_3J_{0\alpha} - t^{-1}J_3. \end{gathered} \tag{4.19}$$

Так как операторы (4.2) образуют алгебру, система (4.18), (4.19) находится в инволюции.

Система (4.18) состоит из шести уравнений для восьми функций K_i, J_i, $i = 0, 1, 2, 3$. Общее решение зависит от трех произвольных функций $\lambda = \lambda(t, x, \alpha)$, $\psi = \psi(t, x, \alpha)$, $J = J(t, x, \alpha)$:

$$K_1 = -\frac{\psi_x}{\psi_\alpha}, \quad K_0 = -\frac{\psi_t}{\psi_\alpha}, \quad K_2 = -\frac{\cos\lambda}{t\psi_\alpha}, \quad K_3 = -\frac{\sin\lambda}{t\psi_\alpha};$$

$$J_1 = \lambda_x - \frac{\psi_x}{\psi_\alpha}\lambda_\alpha, \quad J_0 = \lambda_t - \frac{\psi_t}{\psi_\alpha}\lambda_\alpha, \tag{4.20}$$

$$J_2 = J\sin\lambda - \frac{\lambda_\alpha}{t\psi_\alpha}\cos\lambda, \quad J_3 = -J\cos\lambda - \frac{\lambda_\alpha}{t\psi_\alpha}\sin\lambda.$$

Подстановка в (4.19) дает $J_\alpha = J^2 t\psi_\alpha$, $\psi_\alpha J_x = \psi_x J_\alpha$, $\psi_\alpha (tJ)_t = t\psi_t J_\alpha$. Отсюда следует равенство

$$J = -(t\psi)^{-1}. \tag{4.21}$$

Подстановка (4.20), (4.21) в (4.16), (4.17) приводит к уравнениям, из которых определяется неявное представление для функций α, ϑ:

$$\psi(t, x, \alpha) = \Psi(s, \theta), \quad \vartheta = \lambda(t, x, \alpha) + \Theta(s, \theta), \quad s = rt^{-1}, \tag{4.22}$$

а функции Ψ, Θ удовлетворяют системе уравнений

$$\Psi_s = -\cos\Theta, \quad \Psi_\theta = -s\sin\Theta,$$

$$\Psi_s(\Theta_s\Psi - \sin\Theta) = 0, \quad \Psi_\theta(\Psi(\Theta_\theta + 1) + s\cos\Theta) = 0. \tag{4.23}$$

Все решения уравнения (4.23) могут быть записаны в виде

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{D_0\cos\theta}{D_0\sin\theta - s}, \quad \Psi = \frac{D_0\cos\theta}{\sin\Theta} \tag{4.24}$$

с точностью до несущественных постоянных, где D_0 — произвольная постоянная ($\Psi \to -s$ при $D_0 \to 0$, $\Theta \to 0$).

В итоге получаем, что общее решение уравнений (4.16), (4.17) задается формулами (4.22), (4.24).

Для нахождения ДИП ранга 2+1 надо удовлетворить равенствам (4.15), которые принимают вид

$$tJ_3(t, x)\psi_\alpha\psi + \lambda_\alpha\psi\sin\lambda = \psi_\alpha\cos\lambda,$$

$$t\psi(\lambda_t\psi_\alpha - \psi_t\lambda_\alpha) + tU\psi(\lambda_x\psi_\alpha - \psi_x\lambda_\alpha) = Q(\psi\lambda_\alpha\cos\lambda + \psi_\alpha\sin\lambda).$$

Из первого равенства следует интеграл

$$\cos\lambda = 2^{-1}tJ_3\psi - \psi^{-1}\Lambda(t, x). \tag{4.25}$$

Второе равенство в силу (4.25) имеет вид

$$2(\Lambda_t + U\Lambda_x - QJ_3\Lambda - t^{-1}Q) = \psi^2\big(J_{3t} + UJ_{3x} - QJ_3^2 + t^{-1}J_3\big).$$

Так как ψ существенно зависит от α ($\psi_\alpha \neq 0$), а переменные t, x, α независимы, то переменная ψ в последнем равенстве свободная. Приравнивая к нулю коэффициенты при различных степенях переменной ψ, получим уравнения для Λ и J_3 (одно из них совпадает с (4.9)). В лагранжевых переменных уравнения интегрируются (4.10) и

$$\Lambda = \frac{2t^2\Lambda_1(\xi) - 2tJQ_1 - Q_1^2}{2t(tJ + Q_1)}. \tag{4.26}$$

Подмодель сводится к уравнению (4.11), а решение УГД (3.1) определяется формулами (4.5), (4.10), (4.22), (4.24)–(4.26) с произвольными функциями $\psi(t,x,\alpha)$, $\Lambda_1(\xi)$, $J(\xi)$, $Q_1(\xi)$, $S(\xi)$.

ДИП ранга 3+0 имеет представление

$$U = U(t,x,\alpha), \quad Q = Q(t,x,\alpha), \quad \rho = \rho(t,x,\alpha), \quad p = p(t,x,\alpha), \tag{4.27}$$

а также задается равенствами (4.16), (4.17), общее решение которых представляется формулами (4.22), (4.24).

УГД (4.4) принимает вид

$$\psi_\alpha(U_t + UU_x + \rho^{-1}p_x) = U_\alpha(\psi_t + U\psi_x + t^{-1}Q\cos\lambda) + \rho^{-1}p_\alpha\psi_x,$$

$$\psi_\alpha(Q_t + UQ_x + t^{-1}Q) = Q_\alpha(\psi_t + U\psi_x + t^{-1}Q\cos\lambda) + t^{-1}\rho^{-1}p_\alpha\cos\lambda,$$

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\rho_t + U\rho_x + \rho(U_x + 2t^{-1} - Qt^{-1}\psi^{-1}\cos\lambda)) &= \rho_\alpha(\psi_t + U\psi_x + t^{-1}Q\cos\lambda) \\ &\quad + \rho(U_\alpha\psi_x + Q_\alpha t^{-1}\cos\lambda - t^{-1}Q\lambda_\alpha\sin\lambda),\end{aligned}$$

$$\psi_\alpha(S_t + US_x) = S_\alpha(\psi_t + U\psi_x + t^{-1}Q\cos\lambda),$$

$$\rho Q[\psi_\alpha(\lambda_t + U\lambda_x - t^{-1}Q\psi^{-1}\sin\lambda) - \lambda_\alpha(\psi_t + U\psi_x + t^{-1}Q\cos\lambda)] + t^{-1}p_\alpha\cos\lambda = 0.$$

Здесь пять уравнений для шести функций U, Q, ρ, S, ψ, λ ($p = f(\rho, S)$), поэтому между вспомогательными функциями ψ, λ можно взять любое соотношение.

ДИП ранга 3+1 имеет представление (4.27), при этом α, ϑ — произвольные функции переменных t, x, r, θ. Такое представление задает НЧИП ранга 3 дефекта 2:

$$\begin{gathered}U_t + UU_x + \rho^{-1}p_x + U_\alpha(Y_0\alpha + U\alpha_x + QY_2\alpha) + \rho^{-1}p_\alpha\alpha_x = 0,\\ Q_t + UQ_x + t^{-1}Q + Q_\alpha(Y_0\alpha + U\alpha_x + QY_2\alpha) + \rho^{-1}p_\alpha Y_2\alpha = 0,\\ \rho_t + U\rho_x + \rho(U_x + 2t^{-1}) + \rho_\alpha(Y_0\alpha + U\alpha_x + QY_2\alpha) + \rho(U_\alpha\alpha_x + Q_\alpha Y_2\alpha) = \rho QJ_3,\\ S_t + US_x + S_\alpha(Y_0\alpha + U\alpha_x + QY_2\alpha) = 0, \quad \rho Q(J_0 + UJ_1 + QJ_2) = p_\alpha Y_3\alpha.\end{gathered} \tag{4.28}$$

Для решений общего положения ($S_\alpha \neq 0$, $p_\alpha \neq 0$, $\rho \neq 0$, $Q \neq 0$) из (4.28) определяются следующие дифференциальные инварианты: $\alpha_x = K_1(t,x,\alpha)$, $Y_0\alpha = K_0(t,x,\alpha)$, $Y_2\alpha = K_2(t,x,\alpha)$, $J_3 = J_3(t,x,\alpha)$.

Остальные инварианты $Y_3\alpha = K_3$, J_0–J_2 нужно считать произвольными функциями от t, x, α, θ. Условия совместности будут модифицированными системами (4.18), (4.19): в 4-м уравнении системы (4.18) добавляется слагаемое $r^{-1}K_{3\theta}\sin\vartheta$ в правую часть, в 1-м, 2-м, 5-м и 6-м уравнениях системы (4.19) добавляются слагаемые $r^{-1}J_{1\theta}\sin\vartheta$, $-r^{-1}J_{1\theta}\cos\vartheta$, $r^{-1}J_{1\theta}\sin\vartheta$, $-r^{-1}J_{1\theta}\cos\vartheta$ в левые части соответственно.

Интегрирование модифицированных систем (4.18), (4.19) показывает, что функции K_3, J_0–J_2 не зависят от θ. Значит, происходит редукция к ДИП ранга 3.

Для специальных решений, например при $p_\alpha = 0$, получается переопределенная система, которую надо приводить в инволюцию.

§ 5. Дифференциально инвариантные подмодели группы вращений

Подалгебра 3.8 группы вращений $\{X_7, X_8, X_9\}$ рассматривалась в [5] для нахождения частично инвариантных решений. Вводится сферическая система координат

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$
$$U = u\sin\theta\cos\varphi + v\sin\theta\sin\varphi + w\cos\theta,$$
$$V = u\cos\theta\cos\varphi + v\cos\theta\sin\varphi - w\sin\theta,$$
$$W = -u\sin\varphi + v\cos\varphi.$$

В касательной к сфере $r = \mathrm{const}$ плоскости Π удобно ввести полярные координаты для скоростей

$$V = H\cos\omega, \quad W = H\sin\omega,$$

где ω — угол отклонения вектора $(V, W) \in \Pi$ от меридиана.

Базис из десяти дифференциальных инвариантов таков:

$$\begin{gathered} t, \quad r, \quad U, \quad H, \quad \rho, \quad p; \quad \omega_t = \omega_0, \quad \omega_r = \omega_1, \\ \omega_\theta\cos\omega + (\omega_\varphi\sin^{-1}\theta + \operatorname{ctg}\theta)\sin\omega = \omega_2, \\ -\omega_\theta\sin\omega + (\omega_\varphi\sin^{-1}\theta + \operatorname{ctg}\theta)\cos\omega = \omega_3. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Операторы инвариантного дифференцирования имеют вид

$$\partial_t, \quad \partial_r, \quad Y_2 = \sin\omega\sin^{-1}\theta\partial_\varphi + \cos\omega\partial_\theta, \quad Y_3 = \cos\omega\sin^{-1}\theta\partial_\varphi - \sin\omega\partial_\theta \tag{5.2}$$

и образуют алгебру с коммутаторами

$$\begin{gathered} [\partial_t, \partial_r] = 0, \quad [\partial_t, Y_2] = \omega_0 Y_3, \quad [\partial_t, Y_3] = -\omega_0 Y_2, \\ [\partial_r, Y_2] = \omega_1 Y_3, \quad [\partial_r, Y_3] = -\omega_1 Y_2, \quad [Y_3, Y_2] = \omega_3 Y_3 + \omega_2 Y_2. \end{gathered} \tag{5.3}$$

УГД (3.1) записываются через дифференциальные инварианты

$$\begin{gathered} U_t + UU_r + r^{-1}HY_2U + \rho^{-1}p_r = r^{-1}H^2, \\ H_t + UH_r + r^{-1}HY_2H + r^{-1}\rho^{-1}Y_2p = -r^{-1}HU, \\ \rho_t + U\rho_r + r^{-1}HY_2\rho + \rho(U_r + 2r^{-1}U + r^{-1}(Y_2H + H\omega_3)) = 0, \\ S_t + US_r + r^{-1}HY_2S = 0, \quad r\rho H(\omega_0 + U\omega_1 + r^{-1}H\omega_2) + Y_3p = 0. \end{gathered} \tag{5.4}$$

ДИП ранга 2+2 является РЧИП, рассмотренной в [8]. Представление решения имеет вид

$$U = U(t,r), \quad H = H(t,r), \quad \rho = \rho(t,r), \quad S = S(t,r), \quad \omega = \omega(t,r,\theta,\varphi). \tag{5.5}$$

Подстановка в (5.4) дает уравнения на инварианты нулевого порядка:

$$U_t + UU_r + \rho^{-1}p_r = r^{-1}H^2, \quad rH_t + U(rH)_r = 0, \quad S_t + US_r = 0, \tag{5.6}$$

$$k(h_t + Uh_r) = h^2 + 1, \tag{5.7}$$

где $k = rH^{-1}$, $h = k(\rho^{-1}(\rho_t + U\rho_r) + U_r + 2r^{-1}U)$, и уравнения на инварианты первого порядка:

$$\omega_2 + k(\omega_t + U\omega_r) = 0, \quad \omega_3 = h. \tag{5.8}$$

Уравнение (5.7) является уравнением совместности переопределенной системы (5.8) для функции ω. Общее решение системы (5.8) найдено в [8].

Из системы (5.4) следует, что ω_0, ω_1 суть два независимых дифференциальных инварианта порядка, большего нуля, из базиса (5.1). Если их положить равными функциям, зависящим от t, r, то получится инвариантная подмодель (**ДИП ранга 2**), отвечающая комплексной двумерной подалгебре:

$$h = K_0 \cos\alpha, \quad k(\alpha_t + U\alpha_r) = K_0 \sin\alpha, \quad K_0^2 + 1 = 0,$$
$$\omega = \alpha(t,r) - 2\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(2^{-1}\varphi)(\cos\theta + K_0\sin\theta)].$$

ДИП ранга 2+1 получается из ДИП ранга 2+2 с дополнительной связью между независимыми дифференциальными инвариантами порядка, большего нуля:

$$\omega_t = \Omega(t, r, \omega_r). \tag{5.9}$$

Из (5.1), (5.8) и (5.9) следуют соотношения

$$Y_2\omega = -\operatorname{ctg}\theta\sin\omega - k(\Omega + U\omega_r), \quad Y_3\omega = -\operatorname{ctg}\theta\cos\omega - h.$$

Соотношения (5.3) в силу (5.7) приводят к уравнениям совместности

$$\begin{gathered}\Omega_s(h_r + sk(\Omega + Us)) = h_t + k\Omega(\Omega + Us),\\ k(\Omega_t + U\Omega_r) + (s(h - (kU)_r) - k_r\Omega)\Omega_s = \Omega(h - k_t) - s(kU)_t,\end{gathered} \tag{5.10}$$

где $s = \omega_r$, $\Omega = \omega_t$.

Решение переопределенной системы (5.10) имеет вид

$$s = m(t,r)\sqrt{k^2(\Omega + sU)^2 + h^2 + 1} + \frac{kh_r}{h^2 + 1}(\Omega + sU), \tag{5.11}$$

где функция $m = m(t, r)$ удовлетворяет уравнению

$$m_t + (Um)_r = 0. \tag{5.12}$$

Итак, подмодель задается R-системой (5.6), (5.7), (5.12) и инволютивной A-системой (5.8), (5.9), (5.11).

ДИП ранга 3+0 имеет представление

$$U = U(t,r,\alpha), \quad H = H(t,r,\alpha), \quad S = S(t,r,\alpha), \quad \rho = \rho(t,r,\alpha), \tag{5.13}$$

где α — параметр в пространстве инвариантов.

Все дифференциальные инварианты в УГД (5.4) должны быть функциями t, r, α:

$$\alpha_t = \alpha_0(t,r,\alpha), \quad \alpha_r = \alpha_1(t,r,\alpha), \quad Y_2\alpha = \alpha_2(t,r,\alpha), \quad Y_3\alpha = \alpha_3(t,r,\alpha); \tag{5.14}$$

$$\begin{gathered}\omega_t = \omega_0(t,r,\alpha), \quad \omega_r = \omega_1(t,r,\alpha), \quad Y_2\omega + \operatorname{ctg}\theta\sin\omega = \omega_2(t,r,\alpha),\\ Y_3\omega + \operatorname{ctg}\theta\cos\omega = \omega_3(t,r,\alpha).\end{gathered} \tag{5.15}$$

Используя таблицу коммутаторов (5.3), получим условия совместности системы (5.14):

$$\begin{gathered}\alpha_{1t} + \alpha_0\alpha_{1\alpha} = \alpha_{0r} + \alpha_1\alpha_{0\alpha}, \quad \alpha_{2t} + \alpha_0\alpha_{2\alpha} = \alpha_2\alpha_{0\alpha} + \omega_0\alpha_3,\\ \alpha_{3t} + \alpha_0\alpha_{3\alpha} = \alpha_3\alpha_{0\alpha} - \omega_0\alpha_2, \quad \alpha_{2r} + \alpha_1\alpha_{2\alpha} = \alpha_2\alpha_{1\alpha} + \omega_1\alpha_3,\\ \alpha_{3r} + \alpha_1\alpha_{3\alpha} = \alpha_3\alpha_{1\alpha} - \omega_1\alpha_2, \quad \alpha_3\alpha_{2\alpha} = \alpha_2\alpha_{3\alpha} + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3;\end{gathered} \tag{5.16}$$

и аналогичные условия совместности для системы (5.15):

$$\begin{gathered}\omega_{0r}+\alpha_1\omega_{0\alpha}=\omega_{1t}+\alpha_0\omega_{1\alpha},\quad \omega_{2t}+\alpha_0\omega_{2\alpha}=\omega_0\omega_3+\alpha_2\omega_{0\alpha},\\ \omega_{3t}+\alpha_0\omega_{3\alpha}=-\omega_0\omega_2+\alpha_3\omega_{0\alpha},\quad \omega_{2r}+\alpha_1\omega_{2\alpha}=\omega_3\omega_1+\alpha_2\omega_{1\alpha},\\ \omega_{3r}+\alpha_1\omega_{3\alpha}=-\omega_1\omega_2+\alpha_3\omega_{1\alpha},\quad 1+\omega_2^2+\omega_3^2=\alpha_3\omega_{2\alpha}-\alpha_2\omega_{3\alpha}.\end{gathered}\tag{5.17}$$

Решение системы (5.16) представляется через две функции χ, σ, зависящие от переменных t, r, α:

$$\alpha_1=-\chi_r\chi_\alpha^{-1},\quad \alpha_0=-\chi_t\chi_\alpha^{-1},\quad \alpha_2=-\chi_\alpha^{-1}\cos\sigma,\quad \alpha_3=-\chi_\alpha^{-1}\sin\sigma.\tag{5.18}$$

При этом ω_i, $i=0,1,2,3$, имеют вид

$$\begin{gathered}\omega_0=-\sigma_t+\sigma_\alpha\chi_t\chi_\alpha^{-1},\quad \omega_1=-\sigma_r+\sigma_\alpha\chi_r\chi_\alpha^{-1},\\ \omega_2=\sigma_\alpha\chi_\alpha^{-1}\cos\sigma+k(\sigma,\chi),\quad \omega_3=\sigma_\alpha\chi_\alpha^{-1}\sin\sigma+h(\sigma,\chi).\end{gathered}\tag{5.19}$$

Условия совместности (5.16), (5.17) трансформируются в равенства

$$\begin{gathered}h\sin\sigma+k\cos\sigma=0,\\ (h+k_\sigma)(\chi_t\sigma_\alpha-\sigma_t\chi_\alpha)=0,\quad (k-h_\sigma)(\chi_t\sigma_\alpha-\sigma_t\chi_\alpha)=0,\\ \chi_\alpha(1+k^2+h^2)=(h_\sigma\sigma_\alpha+h_\chi\chi_\alpha)\cos\sigma-(k_\sigma\sigma_\alpha+k_\chi\chi_\alpha)\sin\sigma.\end{gathered}\tag{5.20}$$

Если $\omega_0\neq 0$, т. е. $\chi_t\sigma_\alpha\neq\sigma_t\chi_\alpha$, то решение (5.20) таково:

$$k=-\operatorname{tg}\chi\sin\sigma,\quad h=\operatorname{tg}\chi\cos\sigma,\tag{5.21}$$

и все дифференциальные инварианты определяются через две произвольные функции χ, σ.

Системы (5.14), (5.18) и (5.15), (5.19) при условии (5.21) интегрируются, и решение записывается неявно в виде

$$\sin\chi-\sin\theta_0\cos\theta+\cos\theta_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_0)=0,\tag{5.22}$$

$$\sin(\omega+\sigma)\cos\chi+\cos\theta_0\sin(\varphi-\varphi_0)=0,\tag{5.23}$$

где θ_0, φ_0 — произвольные постоянные.

Подстановка дифференциальных инвариантов (5.18), (5.19) в УГД (5.4) дает ДИП ранга 3+0 для подалгебры вращений:

$$\begin{gathered}\chi_\alpha(U_t+UU_r+\rho^{-1}p_r)-U_\alpha(\chi_t+U\chi_r+r^{-1}H\cos\sigma)-\rho^{-1}p_\alpha\chi_r=r^{-1}H^2\chi_\alpha,\\ \chi_\alpha(rH_t+U(rH)_r)-rH_\alpha(\chi_t+U\chi_r)-(HH_\alpha+\rho^{-1}p_\alpha)\cos\sigma=0,\\ \chi_\alpha(S_t+US_r)-S_\alpha(\chi_t+U\chi_r+r^{-1}H\cos\sigma)=0,\\ \chi_\alpha[\rho_t+U\rho_r+\rho(U_r+2r^{-1}U)]-\rho_\alpha(\chi_t+U\chi_r)\\ +r^{-1}H(\chi_\alpha\operatorname{tg}\chi\cos\sigma+\sigma_\alpha\sin\sigma)-r^{-1}(H\rho)_\alpha\cos\sigma-\rho U_\alpha\chi_r=0,\\ \chi_t\sigma_\alpha-\chi_\alpha\sigma_t+U(\chi_r\sigma_\alpha-\chi_\alpha\sigma_r)\\ +r^{-1}H(\sigma_\alpha\cos\sigma-\chi_\alpha\operatorname{tg}\chi\sin\sigma)-r^{-1}p_\alpha(\rho H)^{-1}\sin\sigma=0.\end{gathered}\tag{5.24}$$

Подмодель из пяти уравнений для шести функций U, H, S, ρ, χ, σ от переменных t, r, α. Любую из функций можно выбрать равной α, тогда получится замкнутая подмодель, например $\sigma=\alpha$.

По любому решению системы (5.24) формула (5.22) определяет параметр $\alpha = \alpha(t, r, \theta, \varphi)$. Подстановка в (5.23) дает функцию ω. Наконец, формулы (5.13) окончательно определяют решение УГД (2.1).

ДИП ранга 3+1 имеет представление (5.13), а все дифференциальные инварианты порядка, большего нуля, являются функциями t, r, θ, φ или t, r, θ, α. Подмодель совпадает с нерегулярной частично инвариантной подмоделью ранга 3 дефекта 2.

УГД (5.4) для представления (5.13) принимает вид

$$\begin{gathered}
U_t + UU_r + \rho^{-1}p_r - r^{-1}H^2 + U_\alpha(\alpha_t + U\alpha_r + r^{-1}HY_2\alpha) + \rho^{-1}p_\alpha\alpha_r = 0,\\
H_t + UH_r + r^{-1}HU + H_\alpha(\alpha_t + U\alpha_r + r^{-1}HY_2\alpha) + r^{-1}\rho^{-1}p_\alpha Y_2\alpha = 0,\\
S_t + US_r + S_\alpha(\alpha_t + U\alpha_r + r^{-1}HY_2\alpha) = 0,
\end{gathered} \tag{5.25}$$

$$\begin{gathered}
\rho_t + U\rho_r + \rho(U_r + 2r^{-1}U) + \rho_\alpha(\alpha_t + U\alpha_r + r^{-1}HY_2\alpha)\\
+ \rho(U_\alpha\alpha_r + r^{-1}(H_\alpha Y_2\alpha + H\omega_3)) = 0,\\
r\rho H(\omega_0 + U\omega_1 + r^{-1}H\omega_2) + p_\alpha Y_3\alpha = 0.
\end{gathered}$$

Для решений системы (5.25) общего положения ($S_\alpha \neq 0$, $p_\alpha \neq 0$) следует, что

$$\alpha_t = \alpha_0(t, r, \alpha), \quad \alpha_r = \alpha_1(t, r, \alpha), \quad Y_2\alpha = \alpha_2(t, r, \alpha), \quad \omega_3 = \omega_3(t, r, \alpha). \tag{5.26}$$

Совместность первых двух уравнений (5.26) дает уравнение

$$\alpha_{1t} + \alpha_0\alpha_{1\alpha} = \alpha_{0r} + \alpha_1\alpha_{0\alpha},$$

общее решение которого можно представить через две произвольные функции $\chi(t, r, \alpha)$ и $g(r, \chi)$:

$$\alpha_0 = -\chi_t\chi_\alpha^{-1}, \quad \alpha_1 = -(\chi_r + g(r, \chi))\chi_\alpha^{-1}.$$

Тогда α определяется неявно равенством $\chi(t, r, \alpha) = X(r, \varphi, \theta)$. Подстановка в (5.26) дает переопределенную систему

$$\begin{gathered}
\frac{\sin\omega}{\sin\theta}X_\varphi + X_\theta\cos\omega = \lambda(t, r, X), \quad X_r = -g(r, X),\\
-\omega_\theta\sin\omega + \Big(\frac{\omega_\varphi}{\sin\theta} + \operatorname{ctg}\theta\Big)\cos\omega = \mu(t, r, X)
\end{gathered} \tag{5.27}$$

с некоторыми функциями λ и μ.

Приведение системы (5.27) в инволюцию дает R-систему для функций g, λ, μ и A-систему для функции ω.

После этого определяются дифференциальные инварианты, подстановка которых в (5.25) приведет к ДИП ранга $3 + 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Овсянников Л. В.* Программа подмодели. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
3. *Овсянников Л. В.* Некоторые итоги выполнения программы ПОДМОДЕЛИ для уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 362–372.
4. *Хабиров С. В.* Инвариантные решения уравнений газовой динамики // Вестн. УГАТУ. 2001. Т. 1, № 3. С. 47–52.

5. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
6. *Овсянников Л. В.*, *Чупахин А. П.* Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 990–999.
7. *Овсянников Л. В.* Регулярные типа (2.1) подмодели уравнений газовой динамики // Прикл. механика и техн. физика. 1996. Т. 37, № 2. С. 3–13.
8. *Овсянников Л. В.* Особый вихрь // Прикл. механика и техн. физика. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.

Статья поступила 25 марта 2003 г.

Хабиров Салават Валеевич
Институт механики Уфимского научного центра РАН,
К. Маркса, 12, кор. 6, Уфа 450000
habirov@anrb.ru