Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 512.542

ТЭТА–ПАРЫ И СТРУКТУРА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Сяньхуа Ли, Шихэн Ли

Аннотация: Вводится понятие θ-пары собственной подгруппы конечной группы. Даны необходимые и достаточные условия сверхразрешимости и нильпотентности конечной группы. В качестве приложения дано доказательство недавно поставленной задачи Скибы [1, проблема 15.81].

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, тэта-пара.

Все группы в данной работе конечны. Для группы G пусть $H < G$ означает, что H — собственная подгруппа G, и через G_p обозначается p-силовская подгруппа в G. Пусть $A \leq G$. Будем обозначать через A_G ядро $\bigcap\limits_{x \in G} A^x$ подгруппы A в G. Для множества простых делителей $|G|$ используется обозначение $\pi(|G|)$. Другие термины и обозначения стандартны.

Широко изучались взаимосвязи между свойствами подгрупп конечной группы G и структурой G. Предлагалось много идей для поиска подходящих путей исследования и прояснения структуры конечной разрешимой группы. Для максимальной подгруппы M группы G понятие нормального индекса, θ-пары, пополнения и θ-пополнения подгруппы M предложены в [2–4]. Затем в [5] введено понятие c-нормальности подгрупп. В некоторых школах развиваются систематические методы использования нормального индекса, θ-пары, пополнения, θ-пополнения и c-нормальности некоторой максимальной подгруппы для определения структуры группы G. Мы полагаем, что эти терминологии могут быть объединены в один подход, в связи с чем введем понятие θ-пары собственной подгруппы.

Определение 1. Для собственной подгруппы H группы G пара (A, B) называется *θ-парой подгруппы* H группы G, если

(i) $A \leq G$, $\langle H, A\rangle = G$ и $B = (A \cap H)_G$,

(ii) если A_1/B — собственная подгруппа A/B и $A_1/B \triangleleft G/B$, то $G \neq \langle H, A_1\rangle$.

Для $H < G$ обозначим через $\theta(H)$ семейство всех θ-пар в H. Если $(C, D) \in \theta(H)$ и $C \triangleleft G$, то будем называть (C, D) *нормальной θ-парой* в H.

Легко показать, что $\theta(H)$ совпадает с множеством θ-пар максимальных подгрупп в конечных группах, введенным в [3], когда H — максимальная подгруппа в G.

Определим частичный порядок $\leq$ в $\theta(H)$ так: $(C, D) \leq (C', D')$, если $C \leq C'$. Тем самым $\theta(H)$ — частично упорядоченное множество. Максимальный элемент относительно упорядоченности $\leq$ назовем *максимальной θ-парой.*

Простые свойства θ-пар собственных подгрупп конечных групп аналогичны таковым для θ-пар максимальных подгрупп. Дадим их в нескольких леммах.

Supported by the National NSF of China and NSF of Jiangsu Province and Jiangsu Province College and University (Grant N BK2001133, 03KJB110112).

Лемма 1. *Если* (A, B), $(C, D) \in \theta(H)$ *и* $(C, D) \leq (A, B)$, *то* $D \leq B$.

Доказательство. Если $D \not\leq B$, то $B < BD \leq A$, так как $D \leq C \leq A$. Тем самым $BD \leq H$, $BD \leq A$ и $BD \lhd G$, $B = (A \cap H)_G \geq BD$; противоречие. Отсюда $D \leq B$.

Лемма 2. *Пусть* H *— собственная подгруппа в* G. *Тогда*

(1) *существуют нормальная* θ*-пара* (C, D) *и нормальная максимальная* θ*-пара* (A, B) *в* H *такие, что* $A/B \cong C/D$ *и* $(C, D) \leq (A, B)$;

(2) *если* (C, D) *— нормальная максимальная* θ*-пара в* H, *то* $D = H_G$.

Доказательство. (1) Предположим, что C/H_G — минимальная нормальная подгруппа в G/H_G относительно равенства $CH = G$. Тогда $(C, H_G) \in \theta(H)$.

Пусть (C, D) — нормальная θ-пара подгруппы H. Существует максимальная θ-пара (A, B) в H такая, что $(C, D) \leq (A, B)$. Тогда $D \leq B$ по лемме 1, так что $B \leq BC \leq A$. Поскольку $(BC)H = BG = G$ и $(BC) \trianglelefteq G$, по определению θ-пары будет $BC = A$, тем самым $A \trianglelefteq G$ и $A/B \cong C/C \cap B$. Итак, $D = (C \cap H)_G \geq B \cap C$, ибо $B \cap C \leq H \cap C$ и $B \cap C \trianglelefteq G$. Кроме того, $D \leq B \cap C$, откуда $D = B \cap C$. Следовательно, $A/B \cong C/D$ и $(C, D) \leq (A, B)$.

(2) Если $D < H_G$, то $H_G \not\leq C$, откуда $CH_G > C$. Рассмотрим (CH_G, H_G). Пусть B — нормальная подгруппа в G, удовлетворяющая соотношениям $CH_G \geq B \geq H_G$ и $BH = G$. Тогда $B = B \cap CH_G = H_G(B \cap C)$, $H(B \cap C) = G$, а также $B \cap C \trianglelefteq G$ и $B \cap C \geq D$. Следовательно, $B \cap C = C$, так как $(C, D) \in \theta(H)$. Значит, $B = CH_G$. Отсюда $(CH_G, H_G) \in \theta(H)$, а это противоречит тому, что (C, D) — нормальная максимальная θ-пара подгруппы H. Итак, $D = H_G$.

Лемма 3. *Предположим, что* $H < G$.

(1) *Если* $N \trianglelefteq G$ *и* $N \leq D$, *то* (C, D) *—* θ*-пара подгруппы* H *в* G *тогда и только тогда, когда* $(C/N,\ D/N)$ *—* θ*-пара подгруппы* H/N *в* G/N.

(2) *Пусть* $N \trianglelefteq G$ *и* $N \leq H$, *но* $N \not\leq D$. *Если* (C, D) *— максимальная* θ*-пара подгруппы* H, *то существует нормальная* θ*-пара* $(A, B) \in \theta(H)$ *такая, что* $N \leq B$ *и* A/B *— секция* CN/DN.

Доказательство. (1) Используя определение 1, легко доказать (1).

(2) Поскольку $N \not\leq D$, то $D < ND$. Кроме того, $N \not\leq C$, так как $D = (C \cap H)_G$, тем самым $NC > C$. Пусть $B = (NC \cap H)_G$, тогда $ND \leq B$. (C, D) — максимальная θ-пара для H, а значит, $(NC, B) \not\leq \theta(H)$. Пара (NC, B) удовлетворяет условию (i) в определении 1, ибо $B = (NC \cap H)_G$ и $\langle NC, H\rangle = \langle C, H\rangle = G$. Поэтому существует минимальная нормальная подгруппа A/B в G/B относительно соотношений $AH = G$ и $A/B \leq NC/B$. Так как $B \leq A \cap H$, то $B \leq (A \cap H)_G$, а также $B = (NC \cap H)_G \geq (A \cap H)_G$. Тем самым $B = (A \cap H)_G$. Тогда (A, B) удовлетворяет (i) в определении 1, ибо $AH = G$. Отсюда $(A, B) \in \theta(H)$. Поскольку $ND \leq B < A \leq NC$, то A/B — секция CN/DN.

Определение 2 [5]. Пусть G — группа и $N \leq G$. Будем называть N *c-нормальной подгруппой в* G, если найдется нормальная подгруппа K в G такая, что $G = NK$ и $N \cap K \leq N_G$.

В определении 2 N будем называть *c-дополняемой подгруппой в* G, если поставим фразу «подгруппа в G» вместо фразы «нормальная подгруппа в G»; N будем называть *слабой c-нормальной подгруппой в* G, если подставляется фраза «субнормальная подгруппа в G» вместо «нормальная подгруппа в G».

Лемма 4 [6, лемма 2.1]. *Пусть G — группа и H — подгруппа в G.*

(1) *Если H c-дополняема в G и $H \leq M \leq G$, то H c-дополняема в M.*

(2) *Пусть $N \lhd G$ и $N \leq H$. Тогда H c-дополняема в G в том и только в том случае, если H/N c-дополняема в G/N.*

(3) *Пусть π — множество простых чисел. Пусть N — нормальная π'-подгруппа и H — π-подгруппа в G. Если H c-дополняема в G, то HN/N c-дополняема в G/N.*

(4) *Пусть $H \leq G$ и $L \leq \Phi(H)$. Если L c-дополняема в G, то $L \lhd G$ и $L \leq \Phi(G)$.*

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа и $H < G$. Тогда*

(1) *H — c-нормальная подгруппа в G в том и только в том случае, если существует нормальная θ-пара (A, B) подгруппы H такая, что $H \cap A = B \trianglelefteq G$.*

(2) *H — слабо c-нормальная подгруппа в G в том и только в том случае, если существует субнормальная θ-пара (A, B) подгруппы H такая, что $H \cap A = B$ и $G = AH$.*

(3) *H — c-дополняемая подгруппа в G в том и только в том случае, если существует θ-пара (A, B) подгруппы H такая, что $H \cap A = B$ и $G = AH$.*

Доказательство. (1) Предположим, что H — c-нормальная подгруппа в G. Согласно [7, лемма 2.4] найдется $K \trianglelefteq G$ такая, что $G = HK$ и $H \cap K = H_G$. Пусть A/H_G — нормальная подгруппа в G/H_G, минимальная относительно соотношений $A/H_G \leq K/H_G$ и $G = HA$. Пусть $B = H_G$. Так как $H \geq H_G$ и $A \geq H_G$, имеем $B \leq (A \cap H)_G$, а также $(A \cap H)_G \leq H \cap K = H_G$. Отсюда $B = (A \cap H)_G$. Тогда (A, B) удовлетворяет (i) в определении 1, ибо $\langle H, A\rangle = HA = G$. Поэтому $(A, B) \in \theta(H)$ и, кроме того, $A \trianglelefteq G$ и $H \cap A = B \trianglelefteq G$.

Обратное тривиально.

(2) Утверждение доказывается аналогично (1).

(3) Предположим, что H — c-дополняемая подгруппа в G. Тогда существует $K \trianglelefteq G$ такая, что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_G$. Пусть $C = KH_G$. Тогда $G = HC$ и $H \cap C = H_G(K \cap H) = H_G$. Пусть $B = H_G$. Если C/B не содержит нормальной подгруппы V/B из G/B такой, что $V/B > 1$ и $G = HV$, то $(C, B) \in \theta(H)$. Пусть $A = C$. Тогда $(A, B) \in \theta(H)$, $G = HA$, $H \cap A = B$. Если C/B содержит нормальную подгруппу A/B из G/B такую, что $A/B > 1$ и $G = HA$, не уменьшая общности, предположим, что A/B — нормальная подгруппа в G/B, минимальная относительно выполнения соотношений $A/B \leq C/B$ и $G = HA$. Тогда $G = HA$ и если $V \trianglelefteq G$ и $V/B < A/B$, то $HV < G$. Таким образом, $(A, B) \in \theta(H)$ по определению 1 и $G = HA$, $H \cap A = B$. Тем самым есть $(A, B) \in \theta(H)$ такая, что $G = HA$ и $H \cap A = B$.

Обратное утверждение тривиально.

Согласно теореме 1 свойства c-нормальности и т. п. связаны с некоторыми условиями на θ-пары. Тем самым все результаты, получаемые с использованием c-нормальной подгруппы, слабо c-нормальной подгруппы, s-нормальной подгруппы, c-дополняемой подгруппы в G, выражаются в терминах θ-пар подгрупп в G. Далее, используя понятие θ-пары подгруппы в G, мы охарактеризуем сверхразрешимость и нильпотентность конечной группы. В доказательствах мы не будем пользоваться теоремой о разрешимости групп нечетного порядка и другими знаменитыми сложными теоремами.

Теорема 2. *Предположим, что G — конечная группа. Если есть θ-пара (C, D) для любой максимальной подгруппы P_1 любой нециклической подгруппы в G такая, что C/D сверхразрешима и $G = P_1C$, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Будем использовать метод минимального контрпримера. Пусть теорема не верна, и пусть G — минимальный контрпример на $|G|$.

Если N — разрешимая минимальная нормальная подгруппа в G, легко доказать, что G/N удовлетворяет предположениям относительно G, откуда G/N сверхразрешима. Значит, если в G есть две минимальные разрешимые нормальные подгруппы N_1 и N_2, то, так как класс сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, $G \cong G/(N_1 \cap N_2)$ сверхразрешима. Предположим, что G имеет единственную разрешимую нормальную подгруппу N. Поскольку G не сверхразрешима, $N \not\leq \Phi(G)$ и $\Phi(G) = 1$. Значит, есть максимальная подгруппа M в G такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$ и $M_G = 1$. Так как $M \cong G/N$, то M сверхразрешима и G разрешима. Согласно [8, теорема 15.2, предложение 15.8] $N = F(G) = C_G(N)$. Если N циклическая, то G сверхразрешима; противоречие. Допустим теперь, что N нециклическая. Пусть $N \in \mathrm{Syl}_p(G)$. Пусть P_1 — максимальная подгруппа в N. Исходя из условий теоремы 2 и того, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, получаем, что есть θ-пара $(C, 1)$ подгруппы P_1 такая, что $G = P_1C$ и C сверхразрешима. Поскольку $N = N \cap P_1C = P_1(N \cap C)$, имеем $N \cap C > 1$ и $N \cap C \lhd G$. Итак, $N \cap C = N$, $N \leq C$, значит, $G = NC = C$ сверхразрешима; противоречие. Теперь допустим, что $N \notin \mathrm{Syl}_p(G)$. Тогда $NM_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$ и $M_p > 1$. Пусть q — наибольший простой делитель $|G|$ и Q — q-силовская подгруппа в G. Тогда QN/N — q-силовская подгруппа в G/N и $QN/N \trianglelefteq G/N$, откуда $QN \trianglelefteq G$. Если $p = q$, то $N \leq Q$ и тем самым $Q \trianglelefteq G$. Итак, $Q \leq F(G) = N$, что противоречит соотношению $N \notin \mathrm{Syl}_p(G)$. Предположим теперь, что $q > p$ и $Q \leq M$. Поскольку M сверхразрешима, $M = N_G(Q)$. Пусть P — силовская подгруппа в G, P_1 — максимальная подгруппа в P и $M_p \leq P_1$. Так как $N \leq P$ и $QN/N \trianglelefteq G/N$ сверхразрешима, PQ — подгруппа в G. Пусть H — максимальная подгруппа в P или Q. Согласно условиям на G существует θ-пара (C, D) подгруппы H такая, что $G = HC$, по тождеству Дедекинда $PQ = PQ \cap HC = H(PQ \cap C)$, откуда PQ удовлетворяет условиям на G. Поэтому если PQ — собственная подгруппа в G, то PQ сверхразрешима, так как G — контрпример наименьшего порядка. Итак, $Q \trianglelefteq PQ$. Тем самым $NQ = N \times Q$ и $Q \leq C_G(N) \leq N$; противоречие с тем, что $N = C_G(N)$. Предположим, что $G = PQ$. По условиям на G найдется θ-пара (A, B) такая, что $G = P_1A$ и A/B сверхразрешима. Имеем $N \not\leq P_1$, $B = 1$, откуда A сверхразрешима. Поскольку $A_q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ и $G = NN_G(Q)$, найдется $x \in N$ такой, что $Q^x = A_q$. Так как $P_1^x = P_1$, $G = P_1A^{x^{-1}}$, можно считать $Q \leq A$. Тем самым $A \leq N_G(Q) = M$. Из соотношений $G = P_1A$ и $M_p \leq P_1$ получаем, что $G = P_1M = P_1M_pQ = P_1Q$. Однако $|P_1Q| < |G|$; противоречие.

Предположим, что $O_r(G) = 1$ для любого $r \in \pi(|G|)$. Пусть p — наименьший простой делитель $|G|$. Пусть P — силовская p-подгруппа в G. Если P циклическая, то G p-нильпотентна, G разрешима; противоречие. Предположим, что P нециклическая. Пусть P_1 — максимальная подгруппа в P. В силу предположений существует θ-пара $(C, 1)$ подгруппы P_1 такая, что C сверхразрешима и $G = CP_1$. Тогда C p-нильпотентна, ибо p — наименьший простой делитель $|C|$. Пусть $C = C_pC_{p'}$ и $N = N_G(C_{p'})$, тогда $C \leq N$. Если $P \cap N < P$, можно выбрать максимальную подгруппу P_2 в P такую, что $P \cap N \leq P_2$. Согласно предположениям существует θ-пара $(A, 1)$ такая, что $G = AP_2$ и A сверхразрешима. Положим $A = A_pA_{p'}$. Тогда $C_{p'}$ и $A_{p'}$ суть холловские p'-подгруппы в G. Так как $p \geq 2$, обе эти холловские подгруппы сопряженны в G по теореме Гросса [9]. Тогда существует $g \in G$ такой, что $C_{p'} = (A_{p'})^g$. Поскольку $G = AP_2$ и $A_{p'} \trianglelefteq A$, можно выбрать $g \in P_2$. Тогда A^g нормализует $(A_{p'})^g = C_{p'}$. Итак, $A^g \leq N$. Отсюда $G = G^g = (P_2A)^g = P_2N$. Тем самым $P = P \cap G = P_2(P \cap N) \leq P_2$; противоречие. Если $P \cap N = P$, то $P \leq N$, тем самым $G = CP_1 = NP_1 = N$, откуда G p-нильпотентна. Тогда G разрешима; противоречие с тем, что $O_r(G) = 1$ для $r \in \pi(|G|)$.

Теорема доказана.

В последнем выпуске «Коуровской тетради» А. Н. Скиба сформулировал следующий вопрос, касающийся дополняемых максимальных подгрупп силовских подгрупп конечной группы (см. [1, вопрос 15.81]). *Верно ли, что любая конечная несверхразрешимая группа G обладает нециклической силовской подгруппой, максимальная подгруппа которой не имеет собственного дополнения в G?*

Дадим доказательство положительного ответа на обобщение поставленного вопроса.

Следствие. *Пусть G — конечная группа. Если каждая максимальная подгруппа нециклической силовской подгруппы H в G c-дополняема в G, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть G — минимальный контрпример на $|G|$.

Если N — разрешимая минимальная нормальная подгруппа в G, то с помощью леммы 4 легко проверить, что G/N удовлетворяет условиям на G, откуда G/N сверхразрешима. Если G обладает двумя минимальными нормальными подгруппами N_1 и N_2 в G, то $G \cong G/(N_1 \cap N_2)$ сверхразрешима, поскольку класс сверхразрешимых групп является насыщенной формацией. Предположим, что G имеет единственную разрешимую минимальную нормальную подгруппу N, и пусть $|N| = p^a$. Поскольку G не сверхразрешима, $N \not\leq \Phi(G)$ и мы можем положить $\Phi(G) = 1$. Тем самым есть максимальная подгруппа M в G такая, что $G = NM$ и $N \cap M = 1$. Так как $M \cong G/N$, подгруппа M сверхразрешима, так что $M_G = 1$. Согласно [8, теорема 15.2] имеем $N = F(G) = C_G(N) = C_{G_q}(N)$. Если N циклическая, то G сверхразрешима; противоречие. Допустим, что N нециклическая. Пусть H — нециклическая r-силовская подгруппа в G и H_1 — максимальная подгруппа в H. Согласно предположениям и теореме 1 мы можем считать, что (A, B) — θ-пара подгруппы H_1 такая, что $G = H_1A$ и $H_1 \cap A = B$. Если $r \neq p$, то A — собственная подгруппа в G, ибо $N \not\leq H_1$, $B = 1$. Для $q \in \pi(|A|)$ если $q = r$, то A_q циклическая; если $q \neq r$, то $A_q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, и для максимальной подгруппы T в A_q по лемме 4 и теореме 1 существует θ-пара (K, L) подгруппы T в A такая, что $A = TK$ и $T \cap K = L$. Поскольку G — минимальный контрпример на $|G|$, то A сверхразрешима. Если $r = p$, то $N \leq H$. Если $N \not\leq H_1$, то $B = H_1 \cap A = 1$. По лемме 4 A удовлетворяет условиям следствия и $|A| < |G|$, так что A сверхразрешима. Если $N \leq H_1$, то $G = H_1M$ и $M_G = 1$. Отсюда $(M, 1) \in \theta(H_1)$ и M сверхразрешима. Подводя итог, получаем, что существует θ-пара (C, D) подгруппы H_1 такая, что $A = H_1C$ и C/D сверхразрешима. По теореме 2 G сверхразрешима; противоречие.

Допустим, что $O_r(G) = 1$ для $r \in \pi(|G|)$. Пусть p — наименьший простой делитель $|G|$. Пусть P — p-силовская подгруппа в G. Если P циклическая, то G p-нильпотентна и G разрешима. Найдется $r \in \pi(|G|)$ такое, что $O_r(G) \neq 1$; противоречие. Допустим, что P нециклическая. Пусть P_1 — максимальная подгруппа в P. По условиям следствия и теоремы 1 есть θ-пара $(C, 1)$ подгруппы P_1 такая, что $G = P_1C$ и $P_1 \cap C = 1$. Тогда $|C_p| = p$, поэтому C p-нильпотентна, так как p — наименьший простой делитель $|C|$. Поскольку для $r \in \pi(|C|)$ такого, что $r \neq p$ и $C_r \in \mathrm{Syl}_r(G)$, по лемме 4 C удовлетворяет условиям на G, то C сверхразрешима. По теореме 2 G сверхразрешима; окончательное противоречие.

Следствие доказано.

Теорема 3. *Пусть G — конечная группа. Если есть θ-пара (C, D) для всякой максимальной подгруппы силовской подгруппы в G такая, что C/D нильпотентна и $G = P_1C$, то G нильпотентна.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть G — минимальный контрпример на $|G|$.

Очевидно, условие теоремы 3 удовлетворяет предположениям из теоремы 2, так что G сверхразрешима. Пусть N — разрешимая минимальная нормальная подгруппа в G и $N \leq O_p(G)$, где p — наибольший простой делитель $|G|$. Тогда $|N| = p$. Если G обладает двумя разрешимыми минимальными нормальными подгруппами N_1 и N_2 в G, то $G \cong G/(N_1 \cap N_2)$ нильпотентна, поскольку класс нильпотентных групп является насыщенной формацией; противоречие. Значит, N — единственная разрешимая минимальная нормальная подгруппа в G, откуда, используя теорему 15.2 из [8] и равенство $C_N(G_p) \neq 1$, получаем $N = F(G) = C_G(N) = C_{G_p}(N) = G_p$. Ясно, что $\{1\}$ — максимальная подгруппа в N, $(G, 1)$ — единственная θ-пара подгруппы $\{1\}$, откуда G нильпотентна; противоречие.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нерешенные вопросы* теории групп. Коуровская тетрадь. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2002. Вып. 15.
2. *Deskins W. E.* On maximal subgroups // Proc. Symp. Pure Math. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1959. V. 1. P. 100–104.
3. *Mukherjee N. P., Bhattacharya P.* On theta pairs for a maximal subgroup // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109, N 3. P. 589–596.
4. *Zhao Yaoqing.* On the Deskins completions, theta completions and theta pairs for maximal subgroups // Comm. Algebra. 1998. V. 26, N 10. P. 3141–3153.
5. *Yanming Wang.* C-Normality of groups and its properties // J. Algebra. 1996. V. 180. P. 954–965.
6. *Yanming Wang.* Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c-supplemented // J. Algebra. 2000. V. 224. P. 467–478.
7. *Li Deyu, Guo Xiuyun.* The influence of c-normality of subgroups on the structure of finite groups. II // Comm. Algebra. 1998. V. 26, N 6. P. 1913–1922.
8. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter De Gruyter, 1992.
9. *Gross F.* Conjugacy of odd order Hall subgroups // London Math. Soc. 1987. V. 19, N 4. P. 311–319.

Статья поступила 16 июня 2003 г.

Сяньхуа Ли (Xianhua Li),
Department of Mathematics,
Suzhou University
Suzhou Jiangsu 215006,
People's Republic of China
xhli@suda.edu.cn

Шихэн Ли (Shiheng Li)