Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 510.56

ОБ ОТНОШЕНИИ Σ–СВОДИМОСТИ МЕЖДУ ДОПУСТИМЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

А. С. Морозов

Аннотация: Изучается сводимость на допустимых множествах, являющаяся усилением обычной Σ-представимости моделей, неформальным прообразом которой может служить интерпретируемость одних вычислительных устройств в других. Получены критерии сводимости для рекурсивно развернутых и чистых множеств, введено понятие скачка и получены неулучшаемые оценки для ординалов скачков, показана переносимость сводимости на $\mathbb{HYP}$-надстройки. Приведены некоторые результаты о соотношении этой сводимости с уже известными сводимостями.

Ключевые слова: определимость, вычислимость, сводимость, допустимое множество.

1. Введение

Один из многочисленных способов неформального понимания допустимых множеств — это представление о них как о некоторых вычислительных устройствах, для которых Σ-формулы являются программами. Стоит отметить, что из этой идеи возникло целое направление, называемое семантическим программированием или Σ-программированием (см., например, [1–3]).

В практике программирования очень часто используется интерпретация одной вычислительной модели в другой. Например, можно считать, что это происходит на некоторых этапах трансляции программ, написанной на алгоритмическом языке высокого уровня, в язык машинных команд. К подобным примерам можно, видимо, также отнести и эмуляцию одной операционной системы в другой, позволяющей запускать программы, написанные для одной системы, на компьютерах с установленной другой системой (примером может служить возможность запуска некоторых программ, написанных для MS DOS, на компьютерах с операционной системой Linux).

Идейно это очень похоже на алгоритмические сводимости [4], когда один компьютер, снабженный более мощным оракулом, позволяет решать проблемы, решаемые тем же самым компьютером с подсоединенным более слабым оракулом. Однако обычно, когда говорят о сводимости, имеют в виду все-таки сводимость алгоритмических проблем, т. е. некоторых множеств. Мы же попытаемся в данной работе рассмотреть сводимость одних вычислительных устройств к другим в рамках теории допустимых множеств. Эта сводимость уже ранее рассматривалась в работе автора [5]. Близкими по духу являются $\mathrm{T}\Sigma$-сводимость на подмножествах допустимых множеств, введенная Ю. Л. Ершовым в [6], и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00593) и международным Российско-Германским грантом РФФИ–ННИО (N 01–01–04003 ННИОа).

сводимость на счетных алгебраических системах конечной сигнатуры, рассмотренная А. Н. Хисамиевым в [7].

Перейдем к определениям.

Основные понятия и результаты теории допустимых множеств можно найти в [6, 8].

Мы будем различать обозначения $f(x)$ (которое будет, как обычно, употребляться для результата применения функции f к аргументу x) и $f[x]$ (обозначающее множество $\{f(y) \mid y \in x\}$). Транзитивное замыкание элемента a будем обозначать, как обычно, через $\mathrm{TC}(a)$. Допустимое множество называется *рекурсивно развернутым*, если существует Σ-отображение из его ординала на него самого.

Основным определением, используемым в данной работе, является следующее

Определение 1 [5]. Будем говорить, что допустимое множество $\mathbb{A}_0$ Σ-*сводимо* к допустимому множеству $\mathbb{A}_1$, и обозначать этот факт как $\mathbb{A}_0 \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}_1$, если существует разнозначное отображение $i : \mathbb{A}_0 \to \mathbb{A}_1$ такое, что

1) $i[\mathbb{A}_0]$ является Σ-подмножеством $\mathbb{A}_1$;

2) для любого сигнатурного предиката P множества $\mathbb{A}_0$ (включая предикаты принадлежности $\in$ и предикат U, выделяющий праэлементы) множества

$$\{\langle i(x_1), \dots, i(x_n)\rangle \mid \mathbb{A}_0 \models P(x_1, \dots, x_n)\},$$

$$\{\langle i(x_1), \dots, i(x_n)\rangle \mid \mathbb{A}_0 \models \neg P(x_1, \dots, x_n)\}$$

являются Σ-подмножествами в $\mathbb{A}_1$;

3) над $\mathbb{A}_1$ существует Σ-функция σ такая, что $\mathrm{dom}(\sigma) = i[\mathbb{A}_0]$ и для любого $x \in \mathbb{A}_0$ выполнено $\sigma(i(x)) = i[x]$.

Будем называть допустимые множества $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ Σ-*эквивалентными*, если $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$ и $\mathbb{B} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}$.

Как заметил В. Г. Пузаренко, условие 3 в определении Σ-сводимости играет существенную роль и не следует из остальных условий. Действительно, рассмотрим вложение допустимых множеств $i : \mathbb{HYP}_\omega \to \mathbb{HF}_{\mathbb{HYP}_\omega}$ (здесь $i(x)$ равно праэлементу $x \in \mathbb{HF}_{\mathbb{HYP}_\omega}$). Оно удовлетворяет условиям 1 и 2 определения сводимости, но не удовлетворяет условию 3, поскольку в этом случае по предложению 1 было бы $\omega_1^{\mathrm{CK}} = o(\mathbb{HYP}_\omega) \le o(\mathbb{HF}_{\mathbb{HYP}_\omega}) = \omega$, что, очевидно, не так. Поэтому допустимое множество $\mathbb{HYP}_\omega$ Σ-определимо в $\mathbb{HF}_{\mathbb{HYP}_\omega}$ в смысле определения Ершова [6], но не Σ-сводимо к нему в смысле определения из данной работы.

Определение Σ-сводимости почти напоминает следующее определение Σ-определимости для моделей над допустимыми множествами, данное Ю. Л. Ершовым в [6]. (Исключение составляет только п. 3.) Мы приводим здесь эквивалентную формулировку.

Определение 2. Алгебраическая система $\mathfrak{A} = \left\langle A; P_0^{n_0}, \dots, P_k^{n_k}\right\rangle$ называется Σ-*определимой в допустимом множестве* $\mathbb{A}$, если существуют Σ-формулы (с параметрами в $\mathbb{A}$)

$$S(x),\ E^+(x,y),\ E^-(x,y),\ \Psi_i^+(x_1, \dots, x_{n_i}),\ \Psi_i^-(x_1, \dots, x_{n_i}), \quad i = 1, \dots, k,$$

такие, что

1) $S^* = \{x \in \mathbb{A} \mid \mathbb{A} \models S(x)\} \ne \varnothing$;

2) формула $E^+(x,y)$ определяет отношение конгруэнтности η на модели

$$\mathfrak{A}^* = \langle S^*; P_1^*, \dots, P_k^* \rangle\,,$$

где $P_i^* = \bigl\{\langle x_1,\dots,x_{n_i}\rangle \mid \mathbb{A} \models \Psi_i^+(x_1,\dots,x_{n_i})\bigr\}$;

3) множества, определяемые формулами E^+ и E^-, не пересекаются и дают в объединении все $(S^*)^2$;

4) множества, определяемые формулами Ψ_i^+ и Ψ_i^-, не пересекаются и дают в объединении все $(S^*)^{n_i}$;

5) $\mathfrak{A}^*/\eta \cong \mathfrak{A}$.

Мы в своем определении Σ-сводимости для допустимых множеств не приводим дополнительного условия, касающегося конгруэнций, поскольку основным объектом нашего внимания будут рекурсивно развернутые множества, для которых этот пункт является излишним.

Образ предиката $\in$ относительно вложения i из определения Σ-сводимости будем обозначать через E, т. е. $E = \{\langle i(x), i(y)\rangle \mid x,y \in \mathbb{A}_0 \ \&\ x \in y\}$.

Следующая лемма доказана в [5, с. 336] индукцией по сложности построения Σ-формул.

Лемма 1 (основное свойство). *Пусть $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$, i — соответствующее вложение из определения Σ-сводимости и S — произвольное Σ-подмножество в $\mathbb{A}^n$, $n \in \omega$. Тогда $\{\langle i(x_1),\dots,i(x_n)\rangle \mid \langle x_1,\dots,x_n\rangle \in S\}$ — Σ-подмножество в $\mathbb{B}$.* $\square$

Отношение Σ-сводимости на допустимых множествах, очевидно, рефлексивно. В доказательстве транзитивности Σ-сводимости единственным не совсем тривиальным пунктом является, пожалуй, п. 3, в котором утверждается существование функции σ. Проверим его. Пусть $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{C}$, и пусть $\sigma_\mathbb{B}$ и $\sigma_\mathbb{C}$ — соответствующие функции для первой и второй из этих сводимостей соответственно. Пусть $i_\mathbb{B} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ и $i_\mathbb{C} : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — вложения, упомянутые в определении. Пусть

$$\sigma_\mathbb{B}^* = \{\langle i_\mathbb{C}(x), i_\mathbb{C}(y)\rangle \mid \langle x,y\rangle \in \sigma_\mathbb{B}\}.$$

По лемме 1 это Σ-функция на $\mathbb{C}$. Непосредственная проверка показывает, что Σ-функция

$$\sigma(x) = \sigma_\mathbb{C}(\sigma_\mathbb{B}^*(x))$$

удовлетворяет свойству

$$\sigma((i_\mathbb{B} \circ i_\mathbb{C})(x)) = \sigma(i_\mathbb{C}(i_\mathbb{B}(x))) = (i_\mathbb{B} \circ i_\mathbb{C})[x],$$

т. е. годится в качестве соответствующей функции из п. 3 определения Σ-сводимости. Транзитивность отношения Σ-сводимости доказана.

В доказательствах нам понадобится теорема Ганди. Приведем ее формулировку. Пусть $\varphi(x_1,\dots, x_n, R)$ — Σ-формула в языке, расширенном дополнительным n-местным предикатом R, все вхождения которого в эту формулу позитивны. С каждой такой формулой φ свяжем оператор, который переводит каждое подмножество $X \subseteq \mathbb{A}^n$ в множество $\Gamma^\varphi(X) \rightleftharpoons \{\bar{x} \in \mathbb{A}^n \mid \mathbb{A} \models \varphi(\bar{x}, X)\}$. Теперь для каждого ординала α определим

$$\Gamma_\alpha^\varphi \rightleftharpoons \Gamma^\varphi\Bigl(\bigcup_{\gamma<\alpha} \Gamma_\gamma^\varphi\Bigr).$$

Легко проверить, что множества Γ_α^φ образуют возрастающую цепочку: $\Gamma_0^\varphi \subseteq \Gamma_1^\varphi \subseteq \dots$. Из теоретико-множественных соображений существует наименьший ординал, обычно обозначаемый через $|\Gamma^\varphi|$, такой, что $\Gamma_{|\Gamma^\varphi|+1}^\varphi = \Gamma_{|\Gamma^\varphi|}^\varphi$. Множество $\Gamma_{|\Gamma^\varphi|}^\varphi$ называется *наименьшей неподвижной точкой* оператора Γ^φ.

Теорема 1 (Р. Ганди, см. [6] или [8]). *Пусть предикат R имеет только позитивные вхождения в формулу $\varphi(\bar{x}, R)$. Тогда*

1) $|\Gamma^\varphi| \leq o(\mathbb{A})$;

2) *каждое множество Γ^φ_α является Σ-подмножеством в $\mathbb{A}$;*

3) *наименьшая неподвижная точка оператора Γ^φ является Σ-подмножеством в $\mathbb{A}$.*

Следующее утверждение доказано в [5]. Мы приводим его доказательство для полноты изложения.

Предложение 1 [5]. *Пусть $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$. Тогда $o(\mathbb{A}) \leq o(\mathbb{B})$*

Доказательство. Покажем, что существует взаимно однозначное отображение из начального сегмента ординала $o(\mathbb{B})$ на ординал $o(\mathbb{A})$, сохраняющее порядок. В силу существования вложения i для этого достаточно построить взаимно однозначное отображение f из начального сегмента ординала $o(\mathbb{B})$ на множество $i[o(\mathbb{A})]$, сохраняющее порядок по типу $o(\mathbb{A})$, заданный отношением $x \in \sigma(y)$.

Это отображение f может быть определено как наименьшая неподвижная точка Σ-оператора

$$\Gamma(f) = f \cup \{\langle \alpha, b\rangle \mid \forall x \in \sigma(b) \exists \beta \in \alpha(\langle \beta, x\rangle) \in f \ \& \forall \beta \in \alpha \exists x \in \sigma(b)(\langle \beta, x\rangle \in f)\}.$$

Нетрудно установить, что область определения f — начальный сегмент $o(\mathbb{B})$, а область значений — все множество $i[o(\mathbb{A})]$. Действительно, если бы область определения и область значений f были бы собственными начальными сегментами в $o(\mathbb{B})$ и $i[o(\mathbb{A})]$ (упорядоченного отношением E) соответственно, то f не была бы наименьшей неподвижной точкой оператора Γ. Если бы область значений f была начальным сегментом $i[o(\mathbb{A})]$, а область определения равнялась всему множеству $o(\mathbb{B})$, то по Σ-выборке мы получили бы одно из хорошо известных противоречий в теории допустимых множеств: $o(\mathbb{B}) \in \mathbb{B}$. □

2. Критерии Σ-сводимости для рекурсивно развернутых допустимых множеств

Напомним, что через $\mathbb{V}_\mathfrak{M}$ обозначается класс всех множеств, которые можно получить из элементов множества $\mathfrak{M}$ как из праэлементов (см. [8]).

Допустимые множества, существование которых утверждается в следующем предложении, играют важную роль в дальнейшем.

Предложение 2. *Пусть $\mathbb{A} \leq_{\mathrm{end}} \mathbb{V}_\mathfrak{M}$ — допустимое множество. Для любого одноместного Δ-предиката $R \subseteq o(\mathbb{A})$ над $\mathbb{A}$ существует наименьшее по включению множество $G[R]$ такое, что модель $\mathbb{G}[R] = \langle G[R]; \in, R\rangle$ является чистым допустимым множеством, $\mathbb{G}[R] \leq_{\mathrm{end}} \mathbb{A}$ и $R \subseteq G[R]$. Носитель $G[R]$ этого допустимого множества не зависит от выбора $\mathbb{A}$ и совпадает с пересечением всех допустимых множеств произвольной сигнатуры, в которых R является Δ-подмножеством. Допустимое множество $\mathbb{G}[R]$ является рекурсивно развернутым. Оно же является пересечением всех допустимых множеств $\mathbb{B}$, содержащих R как подмножество, для которых $\langle \mathbb{B}, R\rangle$ — допустимое множество. Кроме того, выполнено $\mathbb{G}[R] \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}$.*

Доказательство почти дословно повторяет известные доказательства существования $\mathbb{HYP}$ над моделями (см., например, [6, 8]). Разница только в том, что для построения нам потребуется выполнение дополнительного условия $R \subseteq$

$\mathbb{G}[R]$. Поскольку некоторые идеи и определения из доказательства нам потребуются в дальнейшем, мы приводим схему доказательства.

Расширим сигнатуру допустимого множества $\mathbb{A}$ новым предикатным символом $\widehat{R}$, интерпретируемым как R. Хорошо известно [8], что в расширенной сигнатуре множество $\mathbb{A}$ остается допустимым множеством. Зафиксируем две различные переменные x и p, а также некоторую Σ-формулу, задающую во всех допустимых множествах отображение $n \mapsto \psi_n(x,p)$ из ω на множество всех формул первого порядка сигнатуры $\langle \in, \widehat{R}\rangle$, все свободные переменные которых содержатся в множестве $\{x,p\}$.

Определим индукцией по α функцию $L_\alpha[R]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} L_0[R] &= \varnothing;\\ L_{\alpha+1}[R] &= L_\alpha[R] \cup \{L_\alpha[R]\} \cup \mathrm{Def}^\alpha(L_\alpha[R] \cup \{L_\alpha[R]\});\\ L_\lambda[R] &= \bigcup_{\alpha<\lambda} L_\alpha[R], \quad \text{если } \lambda \text{ — предельный ординал,} \end{aligned}$$

где Σ-функция $\mathrm{Def}^\alpha(S)$ определена, как множество всех множеств, определимых как показано ниже, исходя из параметров из множества S и формул с номерами, не превосходящими α. Более точно,

$$\mathrm{Def}^\alpha(S) = \mathrm{Def}^\alpha_d(S) \cup \mathrm{Def}^\alpha_u(S) \cup \mathrm{Def}^\alpha_p(S),$$

где

$$\mathrm{Def}^\alpha_d(S) = \{t \mid \exists n < \alpha \exists p \in S\, (t = \{x \in S \mid \langle S; \in, R\rangle \models \psi_n(x,p)\})\};$$

$$\mathrm{Def}^\alpha_u(S) = \{\cup x \mid x \in S\}; \quad \mathrm{Def}^\alpha_p(S) = \{\{x,y\} \mid x,y \in S\}.$$

Далее доказывается следующая

Лемма 2. *Для любого допустимого множества $\mathbb{A}$, в котором R является Δ-подмножеством в $o(\mathbb{A})$, семейство $\widehat{\mathbb{A}}[R] = \bigcup\limits_{\alpha<o(\mathbb{A})} L_\alpha[R]$ — допустимое множество в сигнатуре $\langle \in, R\rangle$.*

Таким образом, существует хотя бы один ординал $\alpha \le o(\mathbb{A})$, для которого $L_\alpha[R]$ — допустимое множество в сигнатуре, расширенной предикатом для R, и R является подмножеством в $L_\alpha[R]$. Возьмем теперь наименьший ординал γ такой, что множество $L_\gamma[R]$ является допустимым множеством в расширенной сигнатуре и $R \subseteq L_\gamma[R]$. Допустимое множество $L_\gamma[R]$ (в сигнатуре $\langle \in, R\rangle$) будет искомым.

Заметим также, что допустимое множество $\mathbb{G}[R]$ является рекурсивно развернутым. Соответствующее Σ-отображение из его ординала на него самого строится стандартным образом точно так же, как и для конструктивных множеств в [8]. $\square$

Отметим, что для любого $R \in \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$ существует хотя бы одно допустимое множество $\mathbb{A}$, в котором R — Δ-предикат. Достаточно взять кардинал $\kappa = (|\,\mathrm{TC}(R)|)^+$ и рассмотреть допустимое множество $\mathbb{H}_\kappa(\mathfrak{M}) = \{a \in \mathbb{V}_{\mathfrak{M}} \mid |\,\mathrm{TC}(a)| < \kappa\}$. Поэтому в силу предложения 2 допустимое множество $\mathbb{G}[R]$ однозначно определено для любого множества $R \in \mathbb{V}_{\mathfrak{M}}$, состоящего из ординалов, и, стало быть, условие существования $\mathbb{A}$ в предложении 2 является излишним.

Теорема 2. *Любое рекурсивно развернутое допустимое множество Σ-эквивалентно некоторому чистому рекурсивно развернутому допустимому множеству.*

Доказательство. Сначала введем понятие правильного перечисления и диаграммы допустимого множества.

Определение 3. Пусть $\mathbb{A}$ — рекурсивно развернутое допустимое множество и Σ-отображение $e : o(\mathbb{A}) \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{A}$ перечисляет его с помощью ординалов. Назовем e *правильным перечислением*, если для любых x, y из $\mathbb{A}$ выполняется условие $x \in y \to e^{-1}(x) < e^{-1}(y)$.

Другими словами, перечисление e правильное, если оно перечисляет любой элемент a не ранее, чем будут перечислены все элементы $x \in a$.

Лемма 3 (о правильном перечислении). *У каждого рекурсивно развернутого допустимого множества существует взаимно однозначное правильное перечисление.*

Доказательство. Пусть $e_0 : o(\mathbb{A}) \to \mathbb{A}$ — некоторое перечисление допустимого множества $\mathbb{A}$. Определим отображение e индукцией по транзитивному замыканию следующим образом:

$$e(\alpha) = e_0(\min\{\beta \mid \forall x \in e_0(\beta)(x \in \mathrm{range}(e\restriction\alpha)) \;\&\; e_0(\beta) \notin \mathrm{range}(e\restriction\alpha)\}).$$

В силу своего определения e — разнозначная взаимно однозначная Σ-функция. Нетрудно также убедиться, что ее область определения есть начальный сегмент $o(\mathbb{A})$.

Сначала покажем, что область значений функции e есть все $\mathbb{A}$. Предположим, что это не так. Тогда по фундированности существуют элементы x, не попавшие в range(e), но все элементы y, удовлетворяющие условию $y \in x$, содержатся в range(e). Среди всех таких элементов возьмем элемент a, имеющий наименьший e_0-номер. По Σ-выборке найдется ординал α_0 такой, что $e[\alpha_0] \supseteq a$. Тогда в силу определения $e(\alpha_0) = a$; противоречие.

Далее, область определения этой функции совпадает с $o(\mathbb{A})$, поскольку в противном случае мы получаем Σ-отображение e^{-1} из ординала $o(\mathbb{A})$ в свой начальный сегмент.

Осталось заметить, что функция e правильно перечисляет $\mathbb{A}$, ибо каждый раз, когда новое значение попадает в range(e), все его элементы к этому моменту уже находятся там. Лемма доказана.

Зафиксируем для дальнейшего некоторое правильное перечисление e для $\mathbb{A}$.

Определим теперь понятие *диаграммы*. Сначала заметим, что существует Σ-формула $\pi(x, y, z)$ без параметров, задающая на любом допустимом множестве $\mathbb{A}$ взаимно однозначное отображение

$$c : o(\mathbb{A}) \times o(\mathbb{A}) \to o(\mathbb{A}); \quad c(x, y) = z \overset{df}{\iff} \pi(x, y, z),$$

т. е. кодирующая пары ординалов. При этом отображения c, определенные для разных допустимых ординалов, продолжают друг друга. Это можно доказать, сначала рассмотрев на семействе конструктивных элементов $L(\mathbb{A})$ множества $\mathbb{A}$ стандартное перечисление $e : o(L(\mathbb{A})) \to L(\mathbb{A})$ $(o(L(\mathbb{A})) = o(\mathbb{A}))$, заданное во всех таких множествах одной и той же Σ-формулой без параметров (см. [8]), потом выделив из него Σ-перечисление множества всех пар ординалов (соответствующим образом преобразовав эту формулу). Искомая формула

$\pi(x,y,z)$ получается из последней формулы релятивизацией всех неограниченных кванторов существования относительно Σ-предиката $x \in L$ (т. е. «x — конструктивный элемент»). Функции раскодирования $(z)_0 = x \leftrightarrow \exists y c(x,y) = z$ и $(z)_1 = y \leftrightarrow \exists y c(x,y) = z$ также задаются во всех допустимых множествах Σ-формулами без параметров. Мы будем использовать также функции для кодирования n-ок ординалов. Они определяются, как обычно:

$$c^2(x_0,x_1) = c(x_0,x_1); \quad c^{n+1}(x_0,\dots,x_n) = c(x_0, c^n(x_1,\dots,x_n)).$$

Нетрудно показать, что для любого $n \geq 2$ существуют также Σ-функции $(\cdot)_0^n,\dots,(\cdot)_{n-1}^n$ для раскодирования n-ок, удовлетворяющие условиям:

$$(c^n(x_0,\dots,x_{n-1}))_k^n = x_k \quad \text{для всех } k = 0,\dots,n-1;$$
$$c^n\big((x)_0^n,\dots,(x)_{n-1}^n\big) = x.$$

Легко видеть, что все эти Σ-функции могут быть определены Σ-формулами без параметров, поскольку они выразимы через c, $(\cdot)_0$ и $(\cdot)_1$. Так, например, $(x)_0^n = (x)_0$, $(x)_1^n = ((x)_1)_0$ и т. д.

Если A и B — два множества ординалов, то под $A \oplus B$ будем понимать множество $\{c(\alpha,0) \mid \alpha \in A\} \cup \{c(\alpha,1) \mid \alpha \in B\}$. Зафиксируем какой-нибудь способ расстановки скобок, например, считаем, что $A \oplus B \oplus C = (A \oplus B) \oplus C$.

Теперь мы можем определить понятие *диаграммы* рекурсивно развернутого допустимого множества $\mathbb{A}$. Пусть $Q(x_1,\dots,x_n)$ — произвольный сигнатурный предикат допустимого множества $\mathbb{A}$. Определим

$$\mathrm{D}_Q^e(\mathbb{A}) = \{c^n(\alpha_1,\dots\alpha_n) \mid \mathbb{A} \models Q(e(\alpha_1),\dots e(\alpha_n))\} \\ \oplus \{c^n(\alpha_1,\dots\alpha_n) \mid \mathbb{A} \models \neg Q(e(\alpha_1),\dots e(\alpha_n))\}.$$

Определение 4. Назовем *диаграммой допустимого множества* $\mathbb{A}$ *относительно его правильного перечисления* e множество ординалов

$$\mathrm{D}^e(\mathbb{A}) = \mathrm{D}_U^e(\mathbb{A}) \oplus \mathrm{D}_\in^e(\mathbb{A}) \oplus \mathrm{D}_{P_1}^e(\mathbb{A}) \oplus \dots \oplus \mathrm{D}_{P_k}^e(\mathbb{A});$$

здесь суммирование берется по всем сигнатурным предикатам из $\mathbb{A}$. В дальнейшем индекс e будет опускаться.

Нам будут важны следующие свойства диаграмм:

1) $\mathrm{D}(\mathbb{A})$ есть Δ-подмножество $\mathbb{A}$;

2) если $\mathrm{D}(\mathbb{A})$ — Σ-подмножество некоторого допустимого множества $\mathbb{B}$, то $\mathrm{D}(\mathbb{A})$ — Δ-подмножество $\mathbb{B}$.

Последнее свойство следует из того, что для любого предиката $P_i^{n_i}$ и для любых ординалов $\alpha_1,\dots,\alpha_{n_i}$ выполнено либо $\langle c^{n_i}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n_i}),0\rangle \in \mathrm{D}_{P_i}(\mathbb{A})$, либо $\langle c^{n_i}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n_i}),1\rangle \in \mathrm{D}_{P_i}(\mathbb{A})$.

Докажем, что каждое рекурсивно развернутое множество $\mathbb{A}$ эквивалентно чистому множеству $\mathbb{G}[\mathrm{D}(\mathbb{A})]$, откуда и будет следовать утверждение теоремы. Поскольку, как легко видеть, $\sup \mathrm{D}(\mathbb{A}) = o(\mathbb{A})$, имеем $o(\mathbb{G}[\mathrm{D}(\mathbb{A})]) \geq o(\mathbb{A})$. Определим вложение $i : \mathbb{A} \to \mathbb{G}[\mathrm{D}(\mathbb{A})]$ следующим образом: $i(x) = e^{-1}(x)$. Образ этого вложения является начальным отрезком ординала $o(\mathbb{G}[D(\mathbb{A})])$ и поэтому является Σ-подмножеством. Свойство 2 определения Σ-сводимости вытекает из того, что $\mathrm{D}(\mathbb{A})$ — Δ-подмножество в $\mathbb{G}[\mathrm{D}(\mathbb{A})]$. Докажем справедливость свойства 3. При определении функции σ существенно используется правильность перечисления e. Поскольку e — правильное перечисление, функция σ может быть определена так:

$$\sigma(\alpha) = \{\beta < \alpha \mid \mathrm{D}(\mathbb{A}) \text{ утверждает, что } e(\beta) \in e(\alpha)\}.$$

Таким образом, $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{G}[\mathrm{D}(\mathbb{A})]$.

Сводимость $\mathbb{G}[\mathrm{D}(\mathbb{A})] \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}$ следует из описания построения семейства $\mathbb{G}[\mathrm{D}(\mathbb{A})]$. □

Учитывая введенные в доказательстве обозначения, можно уточнить теорему 2 следующим образом.

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{A}$ — рекурсивно развернутое допустимое множество. Тогда $\mathbb{G}[D(\mathbb{A})] \equiv_\Sigma \mathbb{A}$.*

Теорема 4 (критерий Σ-сводимости для рекурсивно развернутых множеств). *Пусть $\mathbb{A}$ — рекурсивно развернутое допустимое множество и $\mathbb{B}$ — произвольное допустимое множество. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$*;*

(2) *любое Σ-подмножество $S \subseteq o(\mathbb{A})$ в $\mathbb{A}$ является Σ-подмножеством в $\mathbb{B}$;*

(3) *любое Δ-подмножество $S \subseteq o(\mathbb{A})$ в $\mathbb{A}$ является Δ-подмножеством в $\mathbb{B}$;*

(4) $\mathrm{D}(\mathbb{A})$ *является Δ-подмножеством $\mathbb{B}$;*

(5) $\mathrm{D}(\mathbb{A})$ *является Σ-подмножеством $\mathbb{B}$.*

Доказательство. (1) → (2). Пусть $\mathbb{A} \sqsubseteq \mathbb{B}$ и $C \subseteq o(\mathbb{A})$ — Σ-подмножество в $\mathbb{A}$. Пусть также i — соответствующее вложение из определения Σ-сводимости. По лемме 1 множество $i[S]$ будет Σ-подмножеством $\mathbb{B}$. Для доказательства достаточно построить Σ-функцию g из начального отрезка ординалов допустимого множества $\mathbb{B}$ на множество $i[o(\mathbb{A})]$ такую, что для любых $\alpha, \beta < o(\mathbb{A})$ будет справедливо $\alpha \in \beta \Leftrightarrow g(\alpha) \,\mathrm{E}\, g(\beta)$. Такая функция может быть определена индукцией по транзитивному замыканию для всех $\alpha < o(\mathbb{A})$ следующим образом:

$$g(\alpha) = y \Leftrightarrow \sigma(y) = \{g(\beta) \mid \beta \in \alpha\}.$$

Область определения функции g есть $o(\mathbb{A}) \subseteq o(\mathbb{B})$, а область ее значений — все $i[o(\mathbb{A})]$. Теперь можно определить S внутри $\mathbb{B}$ как $g^{-1}[i[S]]$, откуда и получим, что S — Σ-подмножество $\mathbb{B}$.

(2) → (3) → (4) → (5) очевидно.

(5) → (4) → (1) вытекает из определения $\mathrm{D}(\mathbb{A})$. □

Следующая теорема показывает, что на чистых рекурсивно развернутых множествах отношение Σ-сводимости фактически сводится к включению в качестве начального сегмента, являющегося Σ-подмножеством.

Теорема 5 (критерий Σ-определимости для чистых множеств).

(1) *Пусть $\mathbb{A}$ — чистое допустимые множество, $\mathbb{B}$ — произвольное допустимое множество и $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$. Тогда множество элементов $\mathbb{A}$ есть Σ-подмножество в $\mathbb{B}$ и все сигнатурные предикаты $\mathbb{A}$, а также их дополнения относительно $\mathbb{A}$ являются Σ-определимыми в $\mathbb{B}$. При этом универсум допустимого множества $\mathbb{A}$ будет начальным сегментом допустимого множества $\mathbb{B}$.*

(2) *Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — допустимые множества, $\mathbb{A}$ — начальный сегмент в $\mathbb{B}$ и одновременно Σ-подмножество в $\mathbb{B}$. Пусть при этом все сигнатурные предикаты в $\mathbb{A}$ а также их дополнения относительно $\mathbb{A}$ являются Σ-предикатами в $\mathbb{B}$. Тогда $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$.*

Доказательство. (1) Пусть $i : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ — вложение из $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$, как в определении Σ-сводимости, и пусть σ — Σ-функция из определения Σ-сводимости.

Используя теорему Ганди, определим разнозначную Σ-функцию $h : i[\mathbb{A}] \to \mathbb{B}$ как наименьшую неподвижную точку оператора

$$\Gamma(X) = X \cup \{\langle a, b\rangle \mid \forall x \in \sigma(a) \exists y \in b(\langle x, y\rangle \in X) \ \&\ \forall y \in b \exists x \in \sigma(a)(\langle x, y\rangle \in X)\}.$$

Проверка по индукции показывает, что эта функция разнозначна и задает изоморфизм из структуры $\langle i[\mathbb{A}], E\rangle$ на начальный сегмент допустимого множества $\mathbb{B}$. Отсюда следует, что композиция $i \circ h : x \mapsto h(i(x))$ является изоморфизмом из $\mathbb{A}$ на начальный сегмент $\mathbb{B}$. В силу того, что по лемме о корректности образ любого Σ-подмножества в $\mathbb{A}$ относительно i является Σ-подмножеством в $\mathbb{B}$ и h — Σ-отображение, образ любого Σ-предиката относительно $i \circ h$ является Σ-предикатом над $\mathbb{B}$. Отсюда получаем Σ-определимость всех сигнатурных предикатов допустимого множества $\mathbb{A}$ и их дополнений относительно $\mathbb{A}$.

(2) Очевидно. $\square$

Следствие 1. *Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — Σ-эквивалентные рекурсивно развернутые чистые допустимые множества. Тогда носители этих допустимых множеств совпадают и предикаты каждого из них Δ-определимы в другом.* $\square$

Следствие 2. *Пусть $\mathbb{A}$ — чистое рекурсивно развернутое допустимое множество. Тогда имеет место равенство множеств $\mathbb{A} = \mathbb{G}[\mathrm{D}(\mathbb{A})]$. (Заметим, что при этом дополнительный предикат в $\mathbb{G}[\mathrm{D}(\mathbb{A})]$, выделяющий $\mathrm{D}(\mathbb{A})$, Δ-определим, исходя из остальных предикатов этого множества.)* $\square$

Таким образом, у каждого рекурсивно развернутого допустимого множества имеется Σ-эквивалентный ему представитель, являющийся чистым допустимым множеством, и Σ-сводимость на этих представителях выглядит как включение в виде начального Σ-сегмента плюс Σ-определимость всех предикатов и их отрицаний.

3. Дальнейшие свойства Σ-сводимости

Теперь можно перейти к доказательству существования точных верхних граней для отношения Σ-сводимости по модулю Σ-эквивалентности для рекурсивно развернутых допустимых множеств.

Теорема 6. *Для любых двух рекурсивно развернутых множеств $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ существует рекурсивно развернутое допустимое множество $\mathbb{C}$ такое, что $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{C}$, $\mathbb{B} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{C}$, и для любого допустимого множества $\mathbb{C}'$ такого, что $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{C}'$ и $\mathbb{B} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{C}'$, выполнено $\mathbb{C} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{C}'$.*

Доказательство. Покажем, что множество $\mathbb{C} = \mathbb{G}[\mathrm{D}(\mathbb{A}) \oplus \mathrm{D}(\mathbb{B})]$ годится в качестве искомого. В самом деле, по предложению 2 и теореме 4 имеем $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{C}$, $\mathbb{B} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{C}$. С другой стороны, если рекурсивно развернутое множество $\mathbb{C}'$ таково, что $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{C}'$ и $\mathbb{B} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{C}'$, то по теореме 4 $\mathrm{D}(\mathbb{A})$ и $\mathrm{D}(\mathbb{B})$ являются Δ-подмножествами $\mathbb{C}'$. Заметим, что в силу предложения 2 выполнено $\mathbb{C} = \mathbb{G}[\mathrm{D}(\mathbb{A}) \oplus \mathrm{D}(\mathbb{B})] \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{C}'$. $\square$

Не рекурсивно развернутое допустимое множество может оказаться эквивалентным рекурсивно развернутому. Простым примером является пара допустимых множеств $\mathbb{HF}_\omega$ и $\mathbb{HF}_S$, где S — счетное множество. Таким образом, из эквивалентности некоторого допустимого множества рекурсивно развернутому множеству не следует, что оно рекурсивно развернуто, а из эквивалентности некоторого допустимого множества нерекурсивно развернутому множеству еще не следует отсутствие в нем свойства рекурсивной развернутости.

Нетрудно также доказать следующую теорему.

Теорема 7. *Существует допустимое множество, не эквивалентное никакому чистому допустимому множеству и никакому рекурсивно развернутому допустимому множеству.*

Доказательство. Напомним, что согласно предложению 1 эквивалентные допустимые множества имеют одинаковые ординалы.

Рассмотрим множество $\mathbb{HF}_X$, где X — множество праэлементов мощности ω_1. Если оно Σ-эквивалентно какому-нибудь чистому допустимому множеству, то ординал этого множества равен ω, откуда легко получить, что это множество равно $\mathbb{HF}_\varnothing$, т. е. счетно. Если же $\mathbb{HF}_X$ эквивалентно некоторому рекурсивно развернутому допустимому множеству, то ординал такого допустимого множества равен ω, откуда опять получается счетность этого допустимого множества. Но допустимое множество $\mathbb{HF}_X$ не может быть Σ-эквивалентно никакому счетному допустимому множеству из мощностных соображений. □

Теорема 8. *Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — допустимые множества. Тогда*
1) *если $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$, то $\mathbb{HYP}(\mathbb{A}) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{HYP}(\mathbb{B})$;*
2) *если $\mathbb{A} \equiv_\Sigma \mathbb{B}$, то $\mathbb{HYP}(\mathbb{A}) \equiv_\Sigma \mathbb{HYP}(\mathbb{B})$.*

Доказательство. Заметим, что второй пункт теоремы есть следствие первого. Поэтому мы докажем первый пункт.

Напомним один из методов построения $\mathbb{HYP}$ над $\mathbb{A}$. (Мы дадим это определение в духе соответствующего определения из [6], от которого оно отличается лишь непринципиальными вариациями. Данная конструкция фактически использовалась при доказательстве предложения 2.) Сначала фиксируется некоторое Σ-перечисление $\varphi_i(x,p)$, $i \in \omega$, всех формул первого порядка исходной сигнатуры $\left\langle \in, U, P_0^{n_0}, \dots, P_k^{n_k} \right\rangle$ допустимого множества $\mathbb{A}$ со свободными переменными из множества $\{x, p\}$ $(x \neq p)$, определяемое во всех допустимых множествах некоторой формулой без параметров. Потом предполагается, что универсум множества $\mathbb{A}$ (обозначаемый здесь через $|\mathbb{A}|$) — транзитивный элемент некоторого допустимого множества $\mathbb{C}$ (такие множества существуют; таково, например, допустимое множество, состоящее из всех множеств, у которых носитель есть подмножество $|\mathbb{A}|$, а транзитивное замыкание имеет мощность меньше, чем $\mathrm{card}(\mathbb{A})^+$ [8]). Затем на ординалах множества $\mathbb{C}$ определяется Σ-функция L_α:

$$L_0 = |\mathbb{A}|;$$
$$L_{\alpha+1} = L_\alpha \cup \{L_\alpha\} \cup \mathrm{Def}_\alpha(L_\alpha \cup \{L_\alpha\});$$
$$L_\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} L_\gamma,$$

где Σ-функция $\mathrm{Def}_\alpha(S)$ определена как множество всех множеств, определимых, как показано ниже, исходя из параметров из множества S и формул с номерами, не превосходящими α. Более точно,

$$\mathrm{Def}_\alpha(S) = \mathrm{Def\,D}_\alpha(S) \cup \mathrm{Def\,U}_\alpha(S) \cup \mathrm{Def\,P}_\alpha(S),$$

где

$$\mathrm{Def\,D}_\alpha(S) = \{t \mid \exists n < \alpha \exists p \in S\ (t = \{x \in S \mid \langle S; \in, U, P_0^{n_0}, \dots, P_k^{n_k} \rangle \models \varphi_n(x,p)\})\};$$

$$\mathrm{Def\,U}_\alpha(S) = \{\cup x \mid x \in S\}; \quad \mathrm{Def\,P}_\alpha(S) = \{\{x,y\} \mid x, y \in S\}.$$

Потом доказывается, что $L_{o(\mathbb{C})}$ образует допустимое множество. Наконец, берется наименьший ординал α_0 такой, что L_{α_0} образует допустимое множество, и для него получается $\mathbb{HYP}(\mathbb{A}) = L_{\alpha_0}$. При этом оказывается, что $\mathbb{HYP}(\mathbb{A})$ не зависит от выбора $\mathbb{C}$.

Возьмем вложение $i : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ из определения Σ-сводимости для допустимых множеств и по нему определим другое вложение $i^* : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, которое тоже будет годиться для определения Σ-сводимости и обладать рядом полезных свойств, указанных ниже в доказательстве, главным из которых будет возможность по шагам естественно расширять образ этого отображения в процессе построения $\mathbb{HYP}(\mathbb{A})$. Мы получим $i^* : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ как композицию $j \circ i$, где j — отображение из $i[\mathbb{A}]$ в $\mathbb{B}$, заданное следующим образом:

$$j(p) = \langle p, 0\rangle, \quad \text{если } p \text{ — образ праэлемента относительно } i;$$
$$j(a) = \{\langle j(x), 1\rangle \mid x \in \sigma(a)\} \quad \text{в противном случае.}$$

Отображение j Σ-определимо, поскольку является наименьшей неподвижной точкой Σ-оператора Γ, определенного как

$$\Gamma(f) = f \cup \{\langle i(p), 0\rangle \mid \mathbb{A} \models U(p)\} \cup \{\langle x, y\rangle \mid x \in i[\mathbb{A}]$$
$$\& \mathbb{A} \models U(i^{-1}(x)) \& \forall t \in \sigma(x)(\langle f(t), 1\rangle \in y) \& \forall t \in y \exists u \in \sigma(x)(t = \langle f(u), 1\rangle)\}.$$

Покажем, что j — разнозначное отображение. Пусть $j(a_0) = j(b_0)$ для некоторых $a_0, b_0 \in i[\mathbb{A}]$, $a_0 \neq b_0$. Если оба элемента $i^{-1}(a_0)$ и $i^{-1}(b_0)$ — праэлементы, то из определения j следует, что $a_0 = b_0$. Значит, этот случай невозможен.

Рассмотрим теперь случай, когда $i^{-1}(a_0)$ — праэлемент в $\mathbb{A}$, а $i^{-1}(b_0)$ — нет. Это предположение приводит к равенствам вида

$$\{\{x, \varnothing\}, \{\varnothing\}\} = \langle x, 0\rangle = \{\langle \xi, 1\rangle, \langle \zeta, 1\rangle \dots\} = \{\{\{\xi, 1\}, \{1\}\}, \{\{\zeta, 1\}, \{1\}\} \dots\}.$$

Но тогда, несмотря на то, что $\langle x, 0\rangle$ включает в себя элемент, содержащий $\varnothing$, это не выполнено для последней части цепочки равенств. Значит, этот случай тоже невозможен.

Единственно возможный случай: $i^{-1}(a_0)$ и $i^{-1}(b_0)$ не праэлементы в $\mathbb{A}$. Рассмотрим

$$c_0 = \{\langle j(x), 1\rangle \mid x \in \sigma(a_0)\} = j(a_0) = j(b_0) = \{\langle j(x), 1\rangle \mid x \in \sigma(b_0)\}.$$

Среди элементов множества $\{z \mid \langle z, 1\rangle \in c_0\}$ есть элемент c_1 такой, что $j(a_1) = j(b_1) = c_1$ для некоторых $a_1, b_1 \in i[\mathbb{A}]$, $a_1 \neq b_1$ (иначе бы было $\sigma(a_0) = \sigma(b_0)$, откуда $a_0 = b_0$). Продолжая этот процесс, получим бесконечную убывающую цепочку:

$$c_0 \ni \langle c_1, 1\rangle \ni \{c_1, 1\} \ni c_1 \ni \langle c_2, 1\rangle \ni \{c_2, 1\} \ni c_2 \ni \dots,$$

что противоречит фундированности отношения $\in$.

Композиция $i^* = i \circ j$ является, таким образом, вложением из $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$. В силу того, что j — Σ-определимая функция, отображение i^* тоже годится в качестве вложения из определения Σ-сводимости. Обозначим образ отношения принадлежности относительно i^* через E^*, образ предиката U через U^*, а образы остальных сигнатурных предикатов $P_0, \dots, P_k$ — через $P_0^*, \dots, P_k^*$ соответственно. Достоинствами этого отображения i^* являются единообразные определения основных отношений:

1) $\forall x, y \in i^*[\mathbb{A}](x \,\mathrm{E}^*\, y \Leftrightarrow \langle x, 1\rangle \in y)$;

2) $\forall x \in i^*[\mathbb{A}](U^*(x) \Leftrightarrow \exists y(x = \langle y, 0\rangle))$;

3) функция $\sigma^*(x)$ из определения Σ-сводимости, выдающая по x множество $\{y \in i^*[\mathbb{A}] \mid y \,\mathrm{E}^*\, x\}$, определяется как $\sigma^*(x) = \{y \mid \langle y, 1\rangle \in x\}$;

4) если $\langle x, 1\rangle \in y \in i^*[\mathbb{A}]$, то $x \in i^*[\mathbb{A}]$.
Эти свойства, в частности, позволяют некоторым единым способом расширять множество $i^*[\mathbb{A}]$ на шагах построения $\mathbb{HYP}$.

Определим на всем $\mathbb{B}$

$$x \in^* y \Leftrightarrow \langle x, 1\rangle \in y.$$

Очевидно, что $\mathrm{E}^* \subseteq \in^*$.

Теперь мы будем строить Σ-функцию L^* из $o(\mathbb{HYP}(\mathbb{B}))$ в $\mathbb{HYP}(\mathbb{B})$ одновременно с семейством изоморфизмов

$$\delta_\alpha : \langle L_\alpha, \in, U, P_0, \dots, P_k\rangle \to \left\langle L^*_\alpha, \in^*, U^*, P^*_0, \dots, P^*_k\right\rangle, \quad \alpha < o(\mathbb{HYP}(\mathbb{B})),$$

которые будут удовлетворять условиям

$$\delta_0 = i^*,$$

$$\delta_\alpha \subseteq \delta_\beta \quad \text{при } \alpha \le \beta < o(\mathbb{HYP}(\mathbb{B})).$$

Пусть формула $\varphi^*_i(x, p)$ в упомянутом выше перечислении получается заменой всех вхождений $\in$ на $\in^*$, U на U^*, P_i на P^*_i, $i = 0, \dots, k$. Определим Σ-функцию $\alpha \mapsto L^*_\alpha$, $\alpha : o(\mathbb{HYP}(\mathbb{B})) \to \mathbb{HYP}(\mathbb{B})$, таким образом:

$$L^*_0 = i^*[\mathbb{A}];$$
$$L^*_{\alpha+1} = L^*_\alpha \cup \bigl(L^*_\alpha \times \{1\}\bigr) \cup \mathrm{Def}^*_\alpha\bigl(L^*_\alpha \cup (L^*_\alpha \times \{1\})\bigr);$$
$$L^*_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} L^*_\alpha, \quad \text{если } \lambda \text{ — предельный ординал,}$$

где $\mathrm{Def}^*_\alpha(S)$ — это аналог функции L_α для отношения $\in^*$ из доказательства предложения 2. А именно,

$$\mathrm{Def}^*_\alpha(S) = \mathrm{Def\,D}^*_\alpha(S) \cup \mathrm{Def\,U}^*_\alpha(S) \cup \mathrm{Def\,P}^*_\alpha(S),$$

где отображения $\mathrm{Def\,D}^*_\alpha(S)$, $\mathrm{Def\,U}^*_\alpha(S)$ и $\mathrm{Def\,P}^*_\alpha(S)$ заданы следующим образом.

$\mathrm{Def\,D}^*_\alpha(S)$ задает семейство всех «подмножеств» (в смысле отношения $\in^*$), формульно определимых в модели $\left\langle S; \in^*, U^*, P^*_0 \restriction S, \dots, P^*_k \restriction S\right\rangle$ с параметром $p \in S$ формулами $\varphi^*_i(x, p)$, $i < \alpha$, т. е.

$$\mathrm{Def\,D}^*_\alpha(S) = \bigl\{\bigl\{\langle x, 1\rangle \mid \langle S; U^*, \in^*, P^*_0, \dots, P^*_k\rangle \models \varphi^*_i(x, p)\bigr\} \mid i < \alpha,\ p \in S\bigr\}.$$

Ясно, что в нашем случае функция $\mathrm{Def\,D}^*_\alpha(S)$ Σ-определима.

$\mathrm{Def\,U}^*_\alpha(S)$ задает семейство всех «объединений» (относительно модифицированного отношения принадлежности $\in^*$) элементов из S. Точнее, определим операцию $\cup^* x$ так же, как определяется операция обычного объединения, но с заменой $\in$ на $\in^*$:

$$\forall t (t \in^* \cup^* x \Leftrightarrow \exists y \in^* x (t \in^* y)).$$

Операция $\cup^*$ является Σ-отображением на $\mathbb{B}$, поскольку может быть задана следующим способом:

$$\cup^* x = \{t \in \mathrm{TC}(x) \times \{1\} \mid \exists y \in \mathrm{TC}(x)(\langle y, 1\rangle \in x \& \langle t, 1\rangle \in y)\}.$$

Функция $\mathrm{DefU}^*_\alpha(S)$ тоже, очевидно, Σ-определима.

$\mathrm{Def\,P}^*_\alpha(S)$ задает множество всех «пар» элементов $x, y \in S$ относительно отношения $\in^*$, т. е.

$$\mathrm{Def\,P}^*_\alpha(S) = \{\{\langle x, 1\rangle, \langle y, 1\rangle\} \mid x, y \in S\}.$$

Ясно, что и функция $\mathrm{Def}\,\mathrm{P}^*_\alpha(S)$ в нашем случае Σ-определима.

Вложение δ_α расширяется до вложения $\delta_{\alpha+1}$ естественным единственным образом.

Теперь если мы докажем, что модель $\mathbb{L}^* = \langle L^*, \in^*, U^*, P^*_o, \ldots, P^*_k \rangle$, где $L^* = \bigcup\limits_{\alpha<\langle o(\mathbb{HYP}(\mathbb{B}))} L^*_\alpha$, удовлетворяет всем аксиомам KPU, то это будет означать, что вложение $\delta_{o(\mathbb{HYP}(\mathbb{A}))}$ вкладывает $\mathbb{HYP}(\mathbb{A})$ в $\mathbb{HYP}(\mathbb{B})$, при этом выполнение всех остальных условий определения Σ-сводимости для этого вложения достаточно очевидно, т. е. теорема будет доказана.

Видимо, самая сложная аксиома KPU для проверки в данном случае — это Δ_0-выборка. Проверим ее истинность. Предположим, что

$$\mathbb{L}^* \models \forall x \in^* a \exists y \varphi^*(x, y, p).$$

Заменим в формуле φ все вхождения подформул вида $u \in^* v$ на $\langle u, 1\rangle \in v$ и все вхождения остальных предикатов на их Σ- или Π-определения (в зависимости от того, положительно или отрицательно данное вхождение предиката), ограниченные кванторы $\exists u \in^* v(\ldots)$ на $\exists u \in \mathrm{TC}(a)(\langle u, 1\rangle \in v \& (\ldots)$, ограниченные кванторы $\forall u \in^* v(\ldots)$ на $\forall u \in \mathrm{TC}(a)(\langle u, 1\rangle \in v \Rightarrow (\ldots)$. В результате получится Σ-формула $\varphi(x, y, p)$ такая, что для любых $x, y \in L^*$ $\mathbb{B} \models \varphi(x, y, p)$ эквивалентно $\mathbb{L}^* \models \varphi^*(x, y, p)$. Тогда

$$\mathbb{B} \models \forall x \in \mathrm{TC}(a)(\langle x, 1\rangle \in a \to \exists\alpha \exists y \in L^*_\alpha \varphi(x, y, p)).$$

По Σ-выборке найдется ординал $\alpha_0 < o(\mathbb{B})$ такой, что

$$\mathbb{B} \models \forall x \in \mathrm{TC}(a)(\langle x, 1\rangle \in a \to \exists y \in L^*_{\alpha_0} \varphi(x, y, p)).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{L}^* \models \forall x \in^* a \exists y \in L^*_\alpha \varphi^*(x, y, p),$$

откуда, в свою очередь, получаем

$$\mathbb{L}^* \models \forall x \in^* a \exists y \in^* L^*_{\alpha+1} \varphi^*(x, y, p),$$

что доказывает теорему. $\square$

4. Σ-сводимость как сводимость на множествах ординалов

Изучаемая нами Σ-сводимость на чистых рекурсивно развернутых допустимых множествах находится в тесной естественной связи со следующей сводимостью на множествах ординалов.

Определение 5. Пусть A и B — множества ординалов. Будем говорить, что A *слабо Σ-сводится к* B (и обозначать через $A \sqsubseteq_\Sigma B$), если A есть Δ-подмножество в $\mathbb{G}[B]$. Будем говорить, что A *Σ-эквивалентно* B (и обозначать через $A \equiv_\Sigma B$), если $A \sqsubseteq_\Sigma B$ и $B \sqsubseteq_\Sigma A$.

Следующие утверждения легко вытекают из рассуждений, приведенных выше.

Теорема 9. *Пусть A и B — множества ординалов. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $A \sqsubseteq_\Sigma B$;

2) $\mathbb{G}[A] \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{G}[B]$. $\square$

Теорема 10. *Пусть* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *— рекурсивно развернутые допустимые множества. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B}$*;*

2) $D(\mathbb{A}) \sqsubseteq_\Sigma D(\mathbb{B})$. $\square$

Далее, как обычно, факторизуя отношения $\equiv_\Sigma$ сводимости на множествах ординалов и на допустимых множествах, обозначая класс эквивалентности объекта S (т. е. его степень) через $S/_\equiv$ и, наконец, перенося отношения сводимости $\sqsubseteq_\Sigma$ на соответствующие степени, получим следующую теорему.

Теорема 11. *Отображение* $A/_\equiv \mapsto \mathbb{G}[A]/_\equiv$ *является корректно определенным изоморфным отображением из класса всех степеней множеств ординалов по слабой* Σ*-сводимости на класс всех степеней рекурсивно развернутых множеств по* Σ*-сводимости.*

Доказательство. Корректность и сохранение отношения сводимости следуют из теоремы 9, а сюръективность — из теоремы 3. $\square$

5. Скачки

Определение 6. Пусть $\mathbb{A}$ — рекурсивно развернутое допустимое множество и $W_\mathbb{A}$ — универсальный Σ-предикат над $\mathbb{A}$ для подмножеств из $o(\mathbb{A})$. Назовем допустимое множество $\mathbb{G}[W_\mathbb{A}]$ *скачком* для $\mathbb{A}$ и будем обозначать его через $\mathrm{J}(\mathbb{A})$.

Предложение 3. *Пусть* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{B}$ *— рекурсивно развернутые допустимые множества. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathrm{J}(\mathbb{A})$*;*

(2) $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{B} \Rightarrow \mathrm{J}(\mathbb{A}) \sqsubseteq_\Sigma \mathrm{J}(\mathbb{B})$*;*

(3) $\mathbb{A} \equiv_\Sigma \mathbb{B} \Rightarrow \mathrm{J}(\mathbb{A}) \equiv_\Sigma \mathrm{J}(\mathbb{B})$*;*

(4) $\mathrm{J}(\mathbb{A}) \not\sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}$.

Доказательство. (1) Поскольку $W_\mathbb{A}$ — универсальный Σ-предикат над $\mathbb{A}$ и $\mathrm{D}[\mathbb{A}]$ — Σ-подмножество (даже Δ-подмножество) ординалов в $\mathbb{A}$, найдется $i < o(\mathbb{A})$ такое, что

$$\mathrm{D}[\mathbb{A}] = \{x \mid c(x,i) \in W_\mathbb{A}\}.$$

Так как $W_\mathbb{A}$ — Δ-подмножество в $\mathbb{G}[W_\mathbb{A}]$, получаем, что $\mathrm{D}[\mathbb{A}]$ — Δ-подмножество в $\mathbb{G}[W_\mathbb{A}]$, откуда ввиду теоремы 4 выводим (1).

(2) Поскольку множество $W_\mathbb{A} \subseteq o(\mathbb{A})$ Σ-определимо над $\mathbb{A}$, по теореме 4 оно же Σ-определимо и над $\mathbb{B}$. Значит, существует i такое, что

$$W_\mathbb{A} = \{x \mid c(x,i) \in W_\mathbb{B}\}.$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает Δ-определимость множества $W_\mathbb{A}$ над $\mathbb{G}[W_\mathbb{B}] = \mathrm{J}(\mathbb{B})$. Наконец, из этого по теореме 9 получаем требуемое.

(3) Следует из (2).

(4) Следует из того, что если (4) неверно, то $W_\mathbb{A}$ Δ-определимо в $\mathbb{A}$. Отсюда следует Δ-определимость множества $\{x \mid c(x,x) \notin W_\mathbb{A}\}$. Это влечет равенство

$$\{x \mid c(x,a) \in W_\mathbb{A}\} = \{x \mid c(x,x) \notin W_\mathbb{A}\}$$

для подходящего $a < o(\mathbb{A})$, т. е. $\forall x \in \mathbb{A}(c(x,a) \in W_\mathbb{A} \Leftrightarrow c(x,x) \notin W_\mathbb{A})$. При $x = a$ получаем противоречие: $c(a,a) \in W_\mathbb{A} \Leftrightarrow c(a,a) \notin W_\mathbb{A}$. $\square$

Напомним, что допустимое множество $\mathbb{A}$ называется *проектируемым в свое* Σ*-подмножество* $C \subseteq \mathbb{A}$, если над ним существует Σ-отображение τ такое, что при любых $x \neq y$ значениями $\tau(x)$ и $\tau(y)$ являются непустые непересекающиеся подмножества множества C [8].

Назовем допустимое множество $\mathbb{A}$ *проектируемым в себя*, если оно проектируемо в некоторый свой элемент a.

Известно, что $\mathbb{HYP}_\omega$ проектируемо в себя [8].

Теорема 12. *Пусть $\mathbb{A}$ — рекурсивно развернутое чистое допустимое множество. Тогда*

(1) $o(\mathbb{A}) \leq o(\mathrm{J}(\mathbb{A})) \leq o(\mathbb{HYP}(\mathbb{A}))$;

(2) если $\mathbb{A}$ проектируемо в себя, то $o(\mathrm{J}(\mathbb{A})) = o(\mathbb{HYP}(\mathbb{A}))$;

(3) если $o(\mathbb{A})$ — регулярный кардинал, то $o(\mathrm{J}(\mathbb{A})) = o(\mathbb{A})$.

Доказательство. (1) Сначала докажем левое неравенство. Покажем, что $\mathrm{D}(\mathbb{A})$ является Δ-подмножеством в $\mathrm{J}(\mathbb{A})$. В самом деле, $\mathrm{J}(\mathbb{A})$ содержит $\mathrm{D}(\mathbb{A})$ как подмножество, поскольку $W_{\mathbb{A}}$ есть Δ-подмножество в $\mathrm{J}(\mathbb{A})$, и для подходящего $i \in \mathrm{J}(\mathbb{A})$ выполнено

$$\mathrm{D}(\mathbb{A}) = \{(x)_0 \mid x \in W_{\mathbb{A}} \& (x)_1 = i\}.$$

Σ-функции $(\cdot)_0$ и $(\cdot)_1$ не зависят от выбора допустимого множества, и, кроме того, любое допустимое множество замкнуто относительно них. Далее, $\mathrm{D}(\mathbb{A})$ является Δ-подмножеством в $\mathrm{J}(\mathbb{A})$, поскольку для любого ординала выполнено

$$x \in \mathrm{D}(\mathbb{A}) \Leftrightarrow c(x, i) \in W_{\mathbb{A}}.$$

Отсюда по теореме 4 получим $\mathbb{A} \sqsubseteq_\Sigma J(\mathbb{A})$. По теореме 5 $\mathbb{A}$ — начальный сегмент $\mathrm{J}(\mathbb{A})$, откуда $o(\mathrm{J}(\mathbb{A})) \geq o(\mathbb{A})$.

Второе неравенство $o(\mathrm{J}(\mathbb{A})) \leq o(\mathbb{HYP}(\mathbb{A}))$ следует из того, что $W_{\mathbb{A}}$ является элементом и, в частности, Δ-подмножеством в $\mathbb{HYP}(\mathbb{A})$. Тем самым процесс построения множества $\mathbb{G}[W_{\mathbb{A}}]$, описанный в предложении 2, приведет к успеху не более чем за $o(\mathbb{HYP}(\mathbb{A}))$ ординальных шагов. При этом будет выполнено $\mathbb{G}[W_{\mathbb{A}}] \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{HYP}(\mathbb{A})$, откуда по предложению 1 получаем $o(\mathrm{J}(\mathbb{A})) = o(\mathbb{G}[W_{\mathbb{A}}]) \leq o(\mathbb{HYP}(\mathbb{A}))$.

(2) Из условия проектируемости и аксиомы Δ-выборки вытекает, что $\mathbb{A} \in \mathrm{J}(\mathbb{A})$. Из стандартного способа построения $\mathbb{HYP}$ «изнутри» (см. [6] или [8]) следует, что $\mathbb{HYP}(\mathbb{A}) \sqsubseteq_\Sigma \mathrm{J}(\mathbb{A})$. Поэтому $o(\mathbb{HYP}(\mathbb{A})) \leq o(\mathrm{J}(\mathbb{A}))$. Отсюда и из первого условия получим, что $o(\mathrm{J}(\mathbb{A})) = o(\mathbb{HYP}(\mathbb{A}))$.

(3) В [8] доказывается, что для любого кардинала $\varkappa$ семейство $\mathrm{H}_\varkappa$, состоящее из всех чистых множеств, у которых транзитивное замыкание имеет мощность менее $\varkappa$, является допустимым множеством. В случае, когда $o(\mathbb{A})$ — регулярный кардинал, имеем $W_{\mathbb{A}} \subseteq \mathrm{H}_{o(\mathbb{A})}$ и $\langle \mathrm{H}_{o(\mathbb{A})}, W_{\mathbb{A}} \rangle$ образует допустимое множество, ординал которого равен $o(\mathbb{A})$. Отсюда $\mathbb{G}[W_{\mathbb{A}}] \sqsubseteq_\Sigma \langle \mathrm{H}_{o(\mathbb{A})}, W_{\mathbb{A}} \rangle$. Следовательно,

$$o(\mathrm{J}(\mathbb{A})) = o(\mathbb{G}[W_{\mathbb{A}}]) \leq o(\mathbb{A}).$$

Осталось применить п. 1. $\square$

Напомним, что допустимый ординал α называется *проектируемым*, если допустимое множество $L(\alpha)$ проектируемо в некоторый ординал $\beta < \alpha$.

Следствие 3. *Пусть α — допустимый проектируемый ординал. Тогда ординал $o(\mathrm{J}(L(\alpha)))$ равен наименьшему допустимому ординалу, большему α.*

Доказательство. Достаточно заметить, что наименьший допустимый ординал, больший α, совпадает с $o(\mathbb{HYP}(L(\alpha)))$, и применить теорему 12. $\square$

6. Сравнение с некоторыми другими сводимостями

Теорема 13. *Полурешетка тьюринговых степеней изоморфна полурешетке классов Σ-эквивалентных рекурсивно развернутых допустимых множеств высоты ω. Последняя является подполурешеткой в структуре Σ-степеней допустимых множеств.*

Доказательство. Определим естественное вложение j верхней полурешетки тьюринговых степеней в структуру, образуемую классами Σ-эквивалентных рекурсивно развернутых допустимых множеств, как указано ниже. Для каждого множества натуральных чисел X пусть $\mathbb{A}(X)$ будет допустимым множеством $\langle \mathbb{HF}_\varnothing, X\rangle$, т. е. множеством $\mathbb{HF}_\varnothing$, расширенным сигнатурным предикатом, выделяющим X. Легко проверить, что $X \leq_T Y$ эквивалентно $\mathbb{A}(X) \sqsubseteq_\Sigma \mathbb{A}(Y)$. Пусть теперь $j(\deg(X))$ будет равным классу Σ-эквивалентности всех рекурсивно развернутых допустимых множеств высоты ω, эквивалентных $\mathbb{A}(X)$. Легко проверить, что это вложение сохраняет точные верхние грани. На самом деле j является отображением «на». Это следует из того, что любое рекурсивно развернутое допустимое множество $\mathbb{B}$ высоты ω Σ-эквивалентно допустимому множеству $\mathbb{A}(D(\mathbb{B}))$. Мы опускаем достаточно простое доказательство этого факта. $\square$

Замечание. Образ упомянутого вложения не замкнут вниз относительно $\sqsubseteq_\Sigma$. Например, рассмотрим счетную модель $\mathfrak{M}$ такую, что для нее не существует наименьшей тьюринговой степени $\mathbf{d}$, в которой модель $\mathfrak{M}$ имеет $\mathbf{d}$-вычислимую изоморфную копию. Такие модели существуют (см., например, [9] или [10]). Очевидно, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \sqsubseteq_\Sigma \langle \mathbb{HF}_0, X\rangle$ для подходящего $X \subseteq \omega$, т. е. $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ сводится к некоторому рекурсивно развернутому допустимому множеству высоты ω. Предположим, что допустимое множество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ Σ-эквивалентно некоторому рекурсивно развернутому множеству $\mathbb{A}$. Ввиду теоремы 3 можно считать, что $\mathbb{A}$ — чистое рекурсивно развернутое множество. Докажем, что для любого $H \subseteq \omega$ выполнено утверждение

$$(\mathfrak{M} \text{ изоморфна некоторой } H\text{-рекурсивной модели}) \Leftrightarrow \mathrm{D}(\mathbb{A}) \leq_T H.$$

Мы дадим набросок доказательства этого факта.

Возьмем произвольное множество $H \subseteq \omega$. Поскольку $\mathfrak{M}$ изоморфна H-рекурсивной модели, ввиду Σ-эквивалентности $\mathrm{D}(\mathbb{A})$ есть Δ-подмножество в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, это множество $\mathrm{D}(\mathbb{A})$ является рекурсивным в H. Предположим теперь, что $\mathrm{D}(\mathbb{A}) \leq_T H$. Тогда существует H-рекурсивная изоморфная копия для $\mathbb{A}$, в которой можно по номеру любого элемента $a \in \mathbb{A}$ эффективно относительно H вычислить индекс конечного множества, состоящего из всех номеров элементов, принадлежащих a. Так как модель $\mathfrak{M}$ Σ-определима над $\mathbb{A}$, отсюда следует, что она изоморфна некоторой H-рекурсивной модели.

Можно привести и другие примеры к замечанию, сделанному выше. Достаточно заметить, что если $\mathbb{A}$ — чистое допустимое множество, то для произвольного $X \subseteq \omega$ выполнено

$$X \ \Sigma\text{-определимо над } \mathbb{A} \Leftrightarrow X \text{ перечислимо в } \mathrm{D}(\mathbb{A}).$$

Теперь остается упомянуть следующий результат.

Теорема 14 (Морозов, Пузаренко [11]). *Для любого непустого семейства I множеств натуральных чисел, замкнутых вниз относительно e-сводимости и* *операции $\oplus$, найдется модель $\mathfrak{M}$ такая, что I есть в точности семейство всех Σ-подмножеств ω в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

Таким образом, можно взять любое семейство I, как в теореме 14, не совпадающее ни с каким семейством вида $\{X \subseteq \omega \mid X$ перечислимо в $S\}$, и рассмотреть соответствующее допустимое множество вида $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, как в теореме 14. Оно Σ-сводится к некоторому рекурсивно развернутому допустимому множеству, но не Σ-эквивалентно никакому рекурсивно развернутому допустимому множеству, поскольку, как нетрудно убедиться, Σ-эквивалентные допустимые множества имеют одни и те же Σ-подмножества ординалов.

Теперь докажем один факт о соотношении слабой Σ-сводимости и $\mathrm{T}\Sigma$-сводимости, введенной Ю. Л. Ершовым. Напомним определение этой сводимости из [6] (там же можно найти дополнительную информацию об этой сводимости и ее обсуждение).

Сначала нам понадобятся некоторые вспомогательные определения. Обозначим через $\mathscr{P}(A)$ множество всех подмножеств A.

Определение 7. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество. Оператор $F : \mathscr{P}(\mathbb{A})^n \to \mathscr{P}(\mathbb{A})$ называется *сильно непрерывным в точке* $\langle S_1, \dots, S_n\rangle$, если

$$\forall a \in \mathbb{A}[a \subseteq F(S_1, \dots, S_n) \to \exists b_1 \subseteq S_1 \dots \exists b_n \subseteq S_n(a \subseteq F(b_1, \dots, b_n))].$$

Определение 8. Оператор $F : \mathscr{P}(\mathbb{A})^n \to \mathscr{P}(\mathbb{A})$ называется Σ-*оператором*, если существует Σ-формула $\Phi(a_1, \dots, a_n, x)$ с параметрами такая, что для любых $x \in \mathbb{A}$, $S_1, \dots, S_n \in \mathscr{P}(\mathbb{A})$ выполнено

$$x \in F(S_1, \dots, S_n) \Leftrightarrow \exists a_1 \dots \exists a_n \left[\bigwedge_{i=1}^{n} \neg U(a_i) \& \bigwedge_{i=1}^{n} a_i \subseteq S_i \& \mathbb{A} \models \Phi(a_1, \dots, a_n, x)\right].$$

При этом говорят, что оператор F *задается формулой* Φ с соответствующими параметрами.

Определение 9. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, и пусть $B, C \subseteq \mathbb{A}$. Будем говорить, что B $\mathrm{T}\Sigma$-*сводится к* C *над допустимым множеством* $\mathbb{A}$, если существуют двухместные Σ-операторы F_0 и F_1, сильно непрерывные в точке $\langle C, \mathbb{A} \setminus C\rangle$, такие, что $B = F_0(C, \mathbb{A} \setminus C)$ и $\mathbb{A} \setminus B = F_1(C, \mathbb{A} \setminus C)$. Этот факт обозначается так: $B \leq^{\mathbb{A}}_{\mathrm{T}\Sigma} C$.

Теорема 15. *Пусть B и C — множества ординалов. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *множество B $\mathrm{T}\Sigma$-сводится к C над допустимым множеством $\mathbb{G}[C]$, рассматриваемым без дополнительного предиката, выделяющего C;*

(2) $B \sqsubseteq_\Sigma C$.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) достаточно очевидна.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Из условия (2) следует, что множества B и $G[C] \setminus B$ определимы Σ-формулами с параметрами над $\langle G[C], \in\rangle$. Искомая импликация вытекает из следующего общего факта.

Лемма 4. *Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество, и пусть $Y \subseteq \mathbb{A}$ таково, что $\langle \mathbb{A}, Y\rangle$ — допустимое множество. Пусть также множество $X \subseteq \mathbb{A}$ определимо над $\langle \mathbb{A}, Y\rangle$ Σ-формулой с параметрами. Тогда*

1) *существует двухместный Σ-оператор, переводящий $\langle Y, \mathbb{A} \setminus Y\rangle$ в X;*

2) *любой двухместный Σ-оператор сильно непрерывен в точке* $\langle Y, \mathbb{A} \setminus Y \rangle$.

Доказательство леммы. П. 2 легко следует из Σ-выборки. Докажем п. 1.

Предположим, что для подходящей Σ-формулы $\varphi(Y, x, p)$ с параметром p выполнено $x \in X \Leftrightarrow \mathbb{A} \models \varphi(Y, x, p)$ (можно считать, что параметр всего один). Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(Y, x, p)$ имеет вид $\exists u \psi(Y, x, p, u)$, где ψ — Δ_0-формула. Пусть $\mathrm{Trans}(w)$ служит обозначением для формулы, утверждающей, что w транзитивно. Определим формулу $\Phi(a_1, a_2, x, p)$ как

$$\exists w \exists u(\mathrm{Trans}(w) \& x, p, u \in w \& a_1 \cap a_2 = \varnothing \& a_1 \cup a_2 = w \& \psi^*(a_1, a_2, x, p, u)),$$

где формула $\psi^*(a_1, a_2, x, p, u)$ получается из $\psi(Y, x, p, u)$ заменой всех позитивных вхождений подформул вида $Y(v)$ на $v \in a_1$ и всех негативных вхождений подформул вида $Y(v)$ на $v \in a_2$. По п. 2 этой леммы оператор, заданный формулой Φ с параметром p, будет непрерывен в точке $\langle Y, \mathbb{A} \setminus Y \rangle$. Осталось только проверить, что для любого $x \in \mathbb{A}$ выполнено

$$x \in X \Leftrightarrow \exists a_1 \exists a_2 \in \mathbb{A}(a_1 \subseteq Y \& a_2 \subseteq \mathbb{A} \setminus Y \& \Phi(a_1, a_2, x, p)). \tag{1}$$

Сначала предположим, что $x \in X$. Это означает, что $\mathbb{A} \models \exists u \psi(Y, x, p, u)$. Зафиксируем u такое, что $\mathbb{A} \models \psi(Y, x, p, u)$. Пусть $w = \mathrm{TC}(\{x, p, u\})$. Положим $a_1 = w \cap Y$, $a_2 = w \setminus Y$. Тогда ввиду того, что $\psi(Y, x, p, u)$ — Δ_0-формула, она будет истинна на ограничении допустимого множества $\mathbb{A}$ на w. Тем самым на этой же модели будет истинна Δ_0-формула $\psi^*(a_1, a_2, x, p, u)$. Значит, на $\mathbb{A}$ будет истинно

$$\mathrm{Trans}(w) \& x, p, u \in w \& a_1 \cap a_2 = \varnothing \& a_1 \cup a_2 = w \& \psi^*(a_1, a_2, x, p, u),$$

откуда следует правая часть (1).

Предположим теперь, что справедлива правая часть (1). Возьмем a_1 и a_2, существование которых в ней утверждается. Возьмем также w и u, существование которых утверждается формулой $\Phi(a_1, a_2, x, p)$. Из этой формулы и из того, что a_1 и a_2 не пересекаются и в объединении дают все w, а также из того, что $a_1 \subseteq Y$, $a_2 \subseteq \mathbb{A} \setminus Y$, следует, что на ограничении допустимого множества $\mathbb{A}$ на w с дополнительным предикатом a_1 (здесь этот элемент рассматривается как множество) выполнено $\psi(Y, x, p, u)$. Ввиду транзитивности w получаем $\mathbb{A} \models \psi(Y, x, p, u)$. Отсюда $x \in X$. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны. □

Из этой теоремы нетрудно получить, что для любых $A, B \subseteq \omega$ условие $A \sqsubseteq_\Sigma B$ эквивалентно $A \leq_T B$.

В заключение автор благодарит рецензента за исправление неточностей и за ряд ценных замечаний, существенно улучшивших изложение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С., Свириденко Д. И.* Логическое программирование в широком смысле // Теория алгоритмов и ее применения (Вычислительные системы). 1989. Т. 129. С. 3–48.
2. *Гончаров С. С., Свириденко Д. И.* Математические основы семантического программирования // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 6. С. 1324–1328.
3. *Sviridenko D. I. Goncharov S. S., Ershov Yu. L.* Semantic programming // Information processing: Proc. IFIP 10th World Comput. Congr., Dublin (Ireland), 1986. P. 1113–1120.
4. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
5. *Morozov A. S.* Σ-Definability of admissible sets // Proc. of Logic Colloquium-98. Praha,. 2000. P. 334–351.

6. *Ершов Ю. Л.* Вычислимость и определимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
7. *Khisamiev A. N.* Degrees of algebraic structures and Σ-definability // Logic Colloquium'2002: Abstr. of contributed papers. Münster (Germany), 2002. P. 39.
8. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1975.
9. *Richter L. J.* Degrees of structures // J. Symbolic Logic. 1981. V. 46, N 4. P. 723–731.
10. *Slaman T. A.* Relative to any nonrecursive set // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126, N 7. P. 2117–2122.
11. *Морозов А. С., Пузаренко В. Г.* О Σ-подмножествах натуральных чисел // Алгебра и логика. (В печати).

Статья поступила 24 июня 2003 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru