Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 514.745.82

МАГНИТНЫЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК В ОДНОРОДНОМ ПОЛЕ НА КОМПЛЕКСНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Д. И. Ефимов

Аннотация: Доказана коммутативная интегрируемость гамильтоновой системы на касательном расслоении комплексного проективного пространства, гамильтониан которой совпадает с гамильтонианом геодезического потока, а скобка Пуассона изменена добавлением формы Фубини — Штуди к стандартной симплектической форме.

Ключевые слова: геодезический поток, коммутативная интегрируемость, комплексное проективное пространство, форма Фубини — Штуди, метод Тимма.

1. Введение

Пусть M^n — многообразие с римановой метрикой g_{ij}, которая задает изоморфизм касательного и кокасательного расслоений (преобразование Лежандра)

$$\xi \in T_x M^n \to p \in T_x^* M^n$$

по формуле

$$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n) \to p = (p_1, \dots, p_n), \quad p_k = g_{ki}\xi^i, \quad k = 1, \dots, n.$$

Симплектическая форма $\omega = dp_i \wedge dx^i$ задает на пространстве гладких функций на кокасательном расслоении скобки Пуассона

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right).$$

При этом пространство функций становится алгеброй Ли со скобками Пуассона в качестве коммутатора. Говорят, что функции f, g *находятся в инволюции*, если их скобка Пуассона тождественно равна нулю: $\{f, g\} \equiv 0$.

Гамильтоновой системой с гамильтонианом $H : T^*M^n \to \mathbb{R}$ на симплектическом многообразии T^*M^n называется поток, который задается уравнением

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\},$$

определяющим изменение любой гладкой функции вдоль потока. Функции, которые инвариантны относительно потока, называются *первыми интегралами* или *интегралами движения потока*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00403).

Гамильтонова система называется *интегрируемой* (в коммутативном смысле), если она имеет n первых интегралов в инволюции, градиенты которых независимы почти всюду на T^*M^n. Такое семейство первых интегралов называется *полным коммутативным набором* независимых интегралов.

Геодезический поток, описывающий движение частицы по инерции с кинетической энергией $|\dot{x}|^2/2 = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j/2$, задается гамильтонианом

$$H(x,p) = \frac{1}{2}g^{ij}(x)p_ip_j,$$

где $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$.

Включение магнитного поля, которое согласно уравнениям Максвелла описывается замкнутой 2-формой

$$F = F_{ij}dx^i \wedge dx^j,$$

не изменяет гамильтониан, а состоит в деформации скобок Пуассона, принимающих вид

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x^i}\right) + \sum_{i,j=1}^n F_{ij}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}$$

(см. [1]). Полученная гамильтонова система называется *магнитным геодезическим потоком.*

В то время как интегрируемость геодезических потоков на однородных пространствах достаточно хорошо изучена, аналогичная проблема для магнитных геодезических потоков вообще не рассматривалась.

На $\mathbb{C}P^n$ с римановой метрикой, определяемой вещественной частью индуцированного из $\mathbb{C}^{n+1}$ эрмитова скалярного произведения, рассмотрим геодезический поток в магнитном поле, заданном формой Фубини — Штуди. В работе доказана

Теорема 1. *Магнитный геодезический поток на $T\mathbb{C}P^n$ допускает полный коммутативный набор независимых интегралов, т. е. он интегрируем.*

В работе существенно используется набор интегралов, построенный Тиммом [2] для геодезического потока на $T\mathbb{C}P^n$.

Автор благодарит И. А. Тайманова за постановку задачи и полезные обсуждения и Я. В. Базайкина за полезные обсуждения.

2. Метрики Фубини — Штуди

Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ — это многообразие проходящих через точку 0 комплексных прямых в $(n+1)$-мерном комплексном линейном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$.

Стандартное эрмитово скалярное произведение

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum \xi^k \bar{\eta}^k \tag{1}$$

на $\mathbb{C}^{n+1}$ индуцирует на касательных пространствах к $\mathbb{C}P^n$ эрмитову структуру.

Пусть $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus 0 \to \mathbb{C}P^n$ — проекция, сопоставляющая точке $z \neq 0$ комплексную прямую, проходящую через 0 и z. Каждый вектор ζ, касательный к $\mathbb{C}P^n$ в точке $\pi(z)$, представляется (неоднозначно) в виде

$$\zeta = \pi_*\xi, \quad \xi \in T_z\mathbb{C}^{n+1}.$$

Формула
$$\langle\zeta_1,\zeta_2\rangle = \frac{\langle\xi_1,\xi_2\rangle\langle z,z\rangle - \langle\xi_1,z\rangle\langle z,\xi_2\rangle}{\langle z,z\rangle^2} \tag{2}$$
задает эрмитову метрику на касательных векторах к $\mathbb{C}P^n$.

Вещественная и мнимая части этой эрмитовой метрики определяют соответственно риманову метрику на $\mathbb{C}P^n$ (метрику Фубини — Штуди) и невырожденную кососимметрическую форму
$$\Omega(\zeta_1,\zeta_2) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\langle\zeta_1,\zeta_2\rangle. \tag{3}$$
Эта форма замкнута и, следовательно, задает на $\mathbb{C}P^n$ симплектическую структуру (форма Фубини — Штуди).

Линейные преобразования $\mathbb{C}^n$, сохраняющие эрмитово скалярное произведение (1) (унитарные преобразования), индуцируют преобразования $\mathbb{C}P^n$, сохраняющие эрмитову структуру (2).

Геодезические потоки метрики Фубини — Штуди интегрируемы. Мы будем рассматривать магнитные геодезические потоки, полученные включением магнитного поля
$$F = \Omega.$$
Функция Гамильтона остается первым интегралом деформированного фазового потока, что неверно для дополнительных первых интегралов. Дополнительные первые интегралы старой системы уравнений не будут интегралами новой, но в данной работе показано, что первые интегралы геодезического потока могут быть продеформированы в первые интегралы магнитного геодезического потока.

Линейные дополнительные интегралы геодезического потока обусловлены симметриями метрики Фубини — Штуди. Эти симметрии задаются унитарными преобразованиями $\mathbb{C}^n$. А именно, нужно взять поле Киллинга однопараметрической группы унитарных преобразований, тогда компонента импульса вдоль этого поля Киллинга будет первым интегралом (теорема Нётер). Оказывается, если подставить это поле Киллинга в форму (3), то получится точная 1-форма, т. е. существует такая функция на $\mathbb{C}P^n$, что ее дифференциал равен получившейся 1-форме. Если добавить эту функцию к соответствующему интегралу геодезического потока, то получается интеграл деформированного фазового потока. Таким образом, каждый линейный интеграл геодезического потока добавлением соответствующей функции может быть достроен до интеграла нового потока. Для полной интегрируемости магнитного геодезического потока на $\mathbb{C}P^n$ одних линейных интегралов недостаточно, однако описанная конструкция понадобится нам для корректировки отображения момента. Перейдем к доказательству.

3. Свойства формы Фубини — Штуди

Следуя статье Тимма [2], представим $\mathbb{C}P^n$ как
$$\mathbb{C}P^n = \mathbf{G}/\mathbf{H},$$
где $\mathbf{G} = \mathbf{U}(n+1)$, $\mathbf{H} = \mathbf{U}(n)\times\mathbf{U}(1)$. На $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n+1)$ есть $\mathrm{Ad}(\mathbf{G})$-инвариантная невырожденная симметричная положительная билинейная форма
$$B(X,Y) = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\operatorname{tr}(X\cdot Y), \quad X,Y\in\mathfrak{g}. \tag{4}$$

$\mathrm{Ad}(\mathbf{G})$-инвариантность следует из свойств следа матрицы

$$B(X,Y) = B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) \quad \forall g \in \mathbf{G},$$

где $\mathrm{Ad}(g)X = gXg^{-1}$. Ортогональным дополнением $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(n)\times\mathfrak{u}(1)$ относительно формы B будет

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ -\bar{x}^T & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathrm{M}(n,1;\mathbb{C}) \right\},$$

где $\mathrm{M}(n,1;\mathbb{C})$ — пространство $n\times 1$-матриц над $\mathbb{C}$. Пространство $\mathfrak{m}$ отождествляется с $T_{\pi(e)}\mathbb{C}P^n$ при помощи $\pi_*|_e$, где $\pi : \mathbf{G} \to \mathbb{C}P^n$ — каноническая проекция. Так как $\mathfrak{m}$ инвариантно относительно действия $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$ ($\mathrm{Ad}(\mathbf{H})\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$) и ограничение формы (4) на $\mathfrak{m}$ будет невырожденной положительной $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантной формой, то таким образом $B|_{\mathfrak{m}\times\mathfrak{m}}$ определяет на $\mathbb{C}P^n$ риманову $\mathbf{G}$-инвариантную метрику, которая совпадает с метрикой Фубини — Штуди (вещественная часть эрмитовой структуры (2)).

Далее отождествляются $\mathfrak{u}(n+1)$ и $\mathfrak{u}^*(n+1)$ с помощью (4), а также касательное и кокасательное расслоения $\mathbb{C}P^n$ с помощью $\mathbf{G}$-инвариантной римановой метрики.

Форма Фубини — Штуди (3) также $\mathbf{G}$-инвариантна. На $\mathfrak{m}$ она определяется следующим образом:

$$\Omega_0(X,Y) = -\frac{1}{\pi}B(J,[X,Y]), \tag{5}$$

$X, Y \in \mathfrak{m}$, а матрица J имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad i = \sqrt{-1},$$

т. е. все ее элементы нулевые, кроме одного. Для произвольных касательных векторов $gX, gY \in T_{\pi(g)}\mathbb{C}P^n$, $X, Y \in \mathfrak{m}$, положим

$$\Omega(gX, gY) = \Omega_0(X,Y) = -\frac{1}{\pi}B(J,[X,Y]).$$

Корректность этого определения следует из того, что форма B $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантна и матрица J инвариантна относительно присоединенного действия $\mathbf{H}$:

$$J = \mathrm{Ad}(h)J \quad \forall h \in \mathbf{H}.$$

Пусть теперь A_φ — однопараметрическая подгруппа $\mathbf{G}$, которая является однопараметрической группой преобразований $\mathbb{C}P^n$ и сохраняет метрику и форму Фубини — Штуди. Обозначим через $\tilde{g}_\varphi$ точку, в которую переводит A_φ точку g (для малых φ эта точка близка к g в силу однопараметричности A_φ). Поскольку $\tilde{g}_\varphi = A_\varphi g$, то

$$\left.\frac{d\tilde{g}_\varphi}{d\varphi}\right|_0 = \left.\frac{dA_\varphi}{d\varphi}\right|_0 g = K$$

— поле Киллинга, и так как A_φ фактически однопараметрическая группа унитарных матриц, существует такая косоэрмитова матрица X, что A_φ будет ее матричной экспонентой $A_\varphi = \exp(X\varphi)$. Тогда

$$K = \left.\frac{dA_\varphi}{d\varphi}\right|_0 g = Xg.$$

Лемма 3.1. *Для любого поля Киллинга K существует такая функция f, что*

$$df = \Omega(K, \cdot).$$

Доказательство. Для киллингова поля $K = Xg$ рассмотрим функцию

$$f_X(g) = -\frac{1}{\pi} B(J, g^{-1}Xg).$$

Посчитаем значение дифференциала этой функции в точке $\pi(g)$ на векторе $gY \in T_{\pi(g)}\mathbb{C}P^n, Y \in \mathfrak{m}$:

$$df_X|_g(gY) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\bigg|_0 B(J, \exp(-Yt)g^{-1}Xg\exp(Yt))$$
$$= -\frac{1}{\pi}\, B(J, [g^{-1}Xg, Y]) = \Omega(Xg, gY).$$

В силу произвольности вектора gY это доказывает утверждение леммы. $\square$

Доказанное в лемме 3.1 свойство формы Фубини — Штуди пригодится в следующем разделе.

4. Отображение момента

Форма $\widetilde{\omega} = \omega + \varepsilon\Omega$, где ω — стандартная симплектическая форма на кокасательном расслоении, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, Ω — форма Фубини — Штуди, задает структуру симплектического многообразия на $T^*\mathbb{C}P^n$. Параметр ε позволяет проследить за деформацией геодезического потока с добавлением магнитного поля. Группа $\mathbf{G}$ действует на $T^*\mathbb{C}P^n$ симплектическими диффеоморфизмами, причем это действие гамильтоново. Это значит, что для любого $X \in \mathfrak{g}$ однопараметрическая группа $\exp(Xt)$ индуцирует векторное поле на $T^*\mathbb{C}P^n$, которое будет гамильтоновым с некоторой функцией Гамильтона, вид которой будет дан позже. Форма $\widetilde{\omega}$ устанавливает соответствие между ковекторами и векторами $\omega^1 \mapsto \eta$ по правилу

$$\omega^1(\xi) = \widetilde{\omega}(\xi, \eta).$$

В частности, каждой функции $f \in C^\infty(T^*\mathbb{C}P^n)$ можно сопоставить векторное поле $\operatorname{sgrad} f$ («косой градиент»):

$$df(\xi) = \widetilde{\omega}(\xi, \operatorname{sgrad} f).$$

Структуру алгебры Ли на $C^\infty(T^*\mathbb{C}P^n)$ задает скобка Пуассона

$$\{f, g\} = \widetilde{\omega}(\operatorname{sgrad} g, \operatorname{sgrad} f). \tag{6}$$

Используя риманову метрику, можно отождествить касательное и кокасательное расслоения, поэтому все выкладки будем проводить в касательном расслоении.

Пространство $T_XT\mathbb{C}P^n, X \in \mathfrak{m} = T_{\pi(e)}\mathbb{C}P^n$, можно отождествить (см. [2]) с

$$\left\{\left(v, -\frac{1}{2}[v, X] + w\right), v, w \in \mathfrak{m}\right\} \subset T_X(T\mathbf{G}) = T_X(\mathbf{G} \times \mathfrak{g}).$$

Симплектическая структура на пространстве $T_XT\mathbb{C}P^n$ определяется с помощью формы (4)

$$\widetilde{\omega}_X\left(\left(v_1, -\frac{1}{2}[v_1, X] + w_1\right), \left(v_2, -\frac{1}{2}[v_2, X] + w_2\right)\right)$$
$$= B(w_1, v_2) - B(w_2, v_1) + \varepsilon\Omega(v_1, v_2).$$

Используя симплектическое действие группы $\mathbf{G}$ на $T\mathbb{C}P^n$, можно получить выражение для симплектической структуры в произвольной точке $gX \in T\mathbb{C}P^n$, $X \in \mathfrak{m}$, $g \in \mathbf{G}$. Справедлива

Лемма 4.1 (см. [2]). *Симплектическая структура на $T\mathbb{C}P^n$ в точке gX имеет вид*

$$\widetilde{\omega}_{gX}\left(g_{*|X}\left(v_1, -\frac{1}{2}[v_1, X] + w_1\right), g_{*|X}\left(v_2, -\frac{1}{2}[v_2, X] + w_2\right)\right) \\ = B(w_1, v_2) - B(w_2, v_1) + \varepsilon\Omega(v_1, v_2). \quad \square$$

$\mathbf{G}$-инвариантные функции f на $T\mathbb{C}P^n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантными функциями $h : \mathfrak{m} \to \mathbb{R}$, которое устанавливается по правилу $f(gX) = h(X)$. Градиент $\operatorname{grad} h(X)$ произвольной функции $h \in C^\infty(\mathfrak{g})$ в точке $X \in \mathfrak{g}$ определяется с помощью формы B следующим образом:

$$dh(X)(Y) = B(\operatorname{grad} h(X), Y), \quad Y \in \mathfrak{g}.$$

Лемма 4.2. *Пусть $f : T\mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}$ — произвольная $\mathbf{G}$-инвариантная функция, определенная $\mathrm{Ad}(\mathbf{H})$-инвариантной функцией $h : \mathfrak{m} \to \mathbb{R}$. Гамильтоново векторное поле функции f дается формулой*

$$\operatorname{sgrad} f(gX) = g_{*|X}\left(v, -\frac{1}{2}[v, X] + w\right),$$

где $v = \operatorname{grad} h(X)$ и

$$w = -\frac{1}{2}[\operatorname{grad} h(X), X]_{\mathfrak{m}} + \varepsilon\frac{1}{\pi}[J, \operatorname{grad} h(X)]_{\mathfrak{m}}.$$

Доказательство. Согласно [2, предложение 3.4] $\forall v_1, w_1 \in \mathfrak{m}$

$$df_{gX}\left(g_* \circ (\pi_*)_{*|X}\left(v_1, -\frac{1}{2}[v_1, X] + w_1\right)\right)$$
$$= B(\operatorname{grad} h(X), w_1) - B\left(-\frac{1}{2}[\operatorname{grad} h(X), X], v_1\right)$$
$$= \widetilde{\omega}_{gX}\left(g_{*|X}\left(v_1, -\frac{1}{2}[v_1, X] + w_1\right), \operatorname{sgrad} f(gX)\right)$$
$$= B(w_1, v) - B(w, v_1) - \varepsilon\frac{1}{\pi}B([v_1, v], J) = B(v, w_1) - B\left(w + \varepsilon\frac{1}{\pi}[v, J], v_1\right).$$

Следовательно,

$$v = \operatorname{grad} h(X), \quad w = -\frac{1}{2}[\operatorname{grad} h(X), X]_{\mathfrak{m}} + \varepsilon\frac{1}{\pi}[J, \operatorname{grad} h(X)]_{\mathfrak{m}}. \quad \square$$

Функция Гамильтона геодезического потока имеет вид

$$H(gX) = h(X) = \frac{1}{2}B(X, X), \quad X \in \mathfrak{m}, \tag{7}$$

ее гамильтоново векторное поле таково:

$$\operatorname{sgrad} H(gX) = g_{*|X}\left(X, \varepsilon\frac{1}{\pi}[J, X]_{\mathfrak{m}}\right). \tag{8}$$

По теореме Нётер компонента импульса вдоль поля Киллинга $K = Yg$, соответствующего однопараметрической группе $A_\varphi = \exp(Y\varphi)$, будет линейным первым интегралом геодезического потока без магнитного поля, т. е. при $\varepsilon = 0$. Если перейти к касательному расслоению, то интеграл будет иметь вид

$$\widetilde{I}_Y(gX) = B(X, g^{-1}Yg).$$

Однако функция $\widetilde{I}_Y$ не будет интегралом магнитного потока и ее нужно немного изменить, чтобы она сохранялась магнитным геодезическим потоком.

Лемма 4.3. *Линейным интегралом магнитного геодезического потока, соответствующим полю Киллинга $K = Yg$, будет функция*

$$I_Y = \widetilde{I}_Y - \varepsilon f_Y.$$

Доказательство. Посчитаем дифференциал функции в произвольной точке $gX, g \in \mathbf{G}$, $X \in \mathfrak{m}$:

$$\begin{aligned}
d(I_Y)_{gX}&\left(g_* \circ (\pi_*)_{*|X}\left(v_1, -\frac{1}{2}[v_1, X] + w_1\right)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_0 \left(B\left(X + tw_1 - \frac{1}{2}t[v_1, X]_{\mathfrak{m}} + O(t^2), e^{-tv_1}g^{-1}Yge^{tv_1}\right)\right. \\
&\quad \left. + \varepsilon\frac{1}{\pi}B(J, e^{-tv_1}g^{-1}Yge^{tv_1})\right) = B\left(g^{-1}Yg, w_1 - \frac{1}{2}[v_1, X]_{\mathfrak{m}}\right) \\
&\quad + B(X, [g^{-1}Yg, v_1]) + \varepsilon\frac{1}{\pi}B(J, [g^{-1}Yg, v_1]). \quad (*)
\end{aligned}$$

Если теперь подставить гамильтоново поле $\operatorname{sgrad} H$ функции Гамильтона геодезического потока (8), т. е. $v_1 = X, w_1 = \varepsilon\frac{1}{\pi}[J, X]_{\mathfrak{m}}$, то правая часть в $(*)$ преобразуется так:

$$B\left(g^{-1}Yg, \varepsilon\frac{1}{\pi}[J, X]_{\mathfrak{m}}\right) + B(X, [g^{-1}Yg, X]) + \varepsilon\frac{1}{\pi}B(J, [g^{-1}Yg, X]),$$

а поскольку второе слагаемое исчезает, а первое и третье можно преобразовать, приходим к выражению

$$\varepsilon\frac{1}{\pi}B((g^{-1}Yg)_{\mathfrak{m}}, [J, X]) + \varepsilon\frac{1}{\pi}B(g^{-1}Yg, [X, J]) \equiv 0,$$

так как $[\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}$ и $(g^{-1}Yg)_{\mathfrak{m}}$ можно заменить на $g^{-1}Yg$. $\square$

Отображение момента $P : T\mathbb{C}P^n \to \mathfrak{g}$ определяется следующим образом:

$$B(P(\varkappa), X) := I_X(\varkappa), \quad \varkappa \in T\mathbb{C}P^n, \ X \in \mathfrak{g},$$

где I_X дано в лемме 4.3.

Лемма 4.4. *Отображение момента $P : T\mathbb{C}P^n \to \mathfrak{g}$ имеет вид*

$$P(gY) = \operatorname{Ad}(g)Y + \varepsilon\frac{1}{\pi}\operatorname{Ad}(g)J,$$

где $gY \in T_{\pi(g)}\mathbb{C}P^n$, $Y \in \mathfrak{m}$, $g \in \mathbf{G}$.

Доказательство. Для произвольного $X \in \mathfrak{g}$ имеем

$$\begin{aligned}
B(P(gY), X) &= \widetilde{I}_X(gY) - \varepsilon f_X(g) = B(Y, g^{-1}Xg) + \varepsilon\frac{1}{\pi}B(J, g^{-1}Xg) \\
&= B(gYg^{-1}, X) + \varepsilon\frac{1}{\pi}B(gJg^{-1}, X) = B\left(gYg^{-1} + \varepsilon\frac{1}{\pi}gJg^{-1}, X\right). \quad \square
\end{aligned}$$

Отображение момента постоянно на траекториях магнитного геодезического потока, так как функции I_X являются его интегралами. Поэтому каждая функция $h \in C^\infty(\mathfrak{g})$ генерирует первый интеграл этого потока I_h:

$$I_h := h \circ P \in C^\infty(T\mathbb{C}P^n).$$

В частности, если $X \in \mathfrak{g}$ рассмотреть как функцию на $\mathfrak{g}$ (значение на элементе Y равно $B(X, Y)$), то это определение I_X совпадает с предыдущим. Таким образом, имеется отображение $C^\infty(\mathfrak{g}) \to C^\infty(T\mathbb{C}P^n)$, $h \mapsto I_h$.

Введем скобку Ли — Пуассона на $C^\infty(\mathfrak{g})$, которая соответствует симплектической структуре Кириллова на орбитах коприсоединенного представления. Для $h_1, h_2 \in C^\infty(\mathfrak{g})$ определим $\{h_1, h_2\} \in C^\infty(\mathfrak{g})$ следующим образом:

$$\{h_1, h_2\}(X) = B(X, [\operatorname{grad} h_1(X), \operatorname{grad} h_2(X)]). \quad (9)$$

Предложение 1. *Отображение* $C^\infty(\mathfrak{g}) \to C^\infty(T\mathbb{C}P^n)$, $h \mapsto I_h = h \circ P$ *задает гомоморфизм алгебр, т. е.*

$$I_{\{h_1,h_2\}} = \{I_{h_1}, I_{h_2}\} \quad \text{для всех } h_1, h_2 \in C^\infty(\mathfrak{g}).$$

Докажем следующую вспомогательную лемму (см. [2, предложение 3.6]).

Лемма 4.5. *Гамильтоново векторное поле функции* $I_h = h \circ P$ *имеет вид*

$$\operatorname{sgrad} I_h(gX) = g_{*|X}(v, -\frac{1}{2}[v, X] + w),$$

где

$$v = (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, \quad w = [\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}},$$
$$\zeta = \operatorname{grad} h\left(\mathrm{Ad}(g)\left(X + \varepsilon\frac{1}{\pi}J\right)\right).$$

Доказательство. По аналогии с доказательством леммы 4.2 выписывается дифференциал, а именно для любых $v_1, w_1 \in \mathfrak{m}$

$$\begin{aligned}
&d(I_h)_{gX}\left(g_* \circ (\pi_*)_{*|X}\left(v_1, -\frac{1}{2}[v_1, X] + w_1\right)\right)\\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_0\left(h \circ \mathrm{Ad}(g \exp tv_1)\left(X + \varepsilon\frac{1}{\pi}J + tw_1 - \frac{1}{2}t[v_1, X]_{\mathfrak{m}} + O(t^2)\right)\right)\\
&= B\left(\zeta, \mathrm{Ad}(g)\left(\left[v_1, X + \varepsilon\frac{1}{\pi}J\right] + w_1 - \frac{1}{2}[v_1, X]_{\mathfrak{m}}\right)\right)\\
&= B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, w_1) + B\left(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, \left[v_1, X + \varepsilon\frac{1}{\pi}J\right] - \frac{1}{2}[v_1, X]_{\mathfrak{m}}\right) \qquad (10)\\
&= B(v, w_1) - B\left(w + \varepsilon\frac{1}{\pi}[v, J], v_1\right). \qquad (11)
\end{aligned}$$

Следовательно, $v = (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}$, а второе слагаемое в (10) равняется

$$\begin{aligned}
&B\left(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, \left[v_1, X + \varepsilon\frac{1}{\pi}J\right]\right) - \frac{1}{2}B(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, [v_1, X]_{\mathfrak{m}})\\
&= B\left(v_1, \left[X + \varepsilon\frac{1}{\pi}J, \mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta\right]\right) - \frac{1}{2}B((\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, [v_1, X])\\
&= -B\left(\left[\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X + \varepsilon\frac{1}{\pi}J\right], v_1\right) - B\left(\frac{1}{2}[X, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}], v_1\right)\\
&= -B\left(\left[\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X + \varepsilon\frac{1}{\pi}J\right], v_1\right) - B\left(-\frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X], v_1\right).
\end{aligned}$$

Из этого и второго слагаемого в (11) получается

$$w + \varepsilon\frac{1}{\pi}[v, J] = \left[\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X + \varepsilon\frac{1}{\pi}J\right]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}},$$
$$w = [\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, X]_{\mathfrak{m}} + \varepsilon\frac{1}{\pi}[\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta, J]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}} - \varepsilon\frac{1}{\pi}[v, J].$$

Так как $[\mathfrak{m}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{m}$ и J коммутирует с любым вектором из $\mathfrak{h}$, второе и четвертое слагаемые сокращаются и остается окончательное выражение для w. $\square$

Доказательство предложения 1. Возьмем поля $\operatorname{sgrad} I_{h_1}$, $\operatorname{sgrad} I_{h_2}$ и подставим в (6), где выражение для $\widetilde{\omega}$ дано в лемме 4.1:

$$
\begin{aligned}
&\{I_{h_1}, I_{h_2}\}(gX) = \widetilde{\omega}_{gX}(\operatorname{sgrad} I_{h_2}, \operatorname{sgrad} I_{h_1})\\
&= B\left([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2, X]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}\right)\\
&- B\left([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, X]_{\mathfrak{m}} - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, X]_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}\right)\\
&- \varepsilon\frac{1}{\pi}B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}], J)
\end{aligned}
$$

можно убрать проектирование на $\mathfrak{m}$ коммутаторов, так как $B(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = 0$

$$
\begin{aligned}
&= B\left([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2, X] - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}\right)\\
&- B\left([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, X] - \frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}\right)\\
&- \varepsilon\frac{1}{\pi}B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}], J)
\end{aligned}
$$

разложим $\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_i = (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_i)_{\mathfrak{m}} + (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_i)_{\mathfrak{h}}$ и получим

$$
\begin{aligned}
&= B\left(\frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}\right)\\
&+ B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{h}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}) - B\left(\frac{1}{2}[(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}\right)\\
&- B\left([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{h}}, X], (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}) + \varepsilon\frac{1}{\pi}B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}], J\right)
\end{aligned}
$$

добавим $B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{h}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{h}}], X) \equiv 0$, которое ничего не меняет, и заметим, что первое и третье слагаемые совпадают

$$
\begin{aligned}
&= B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}} + (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{h}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}} + (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{h}}], X)\\
&+ \varepsilon\frac{1}{\pi}B([(\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1)_{\mathfrak{m}}, (\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2)_{\mathfrak{m}}], J)
\end{aligned}
$$

если аналогичную процедуру проделать со вторым слагаемым, то получим

$$
\begin{aligned}
&= B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, \mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2], X) + \varepsilon\frac{1}{\pi}B([\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_1, \mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta_2], J)\\
&= B\left([\zeta_1, \zeta_2], \mathrm{Ad}(g)(X + \varepsilon\frac{1}{\pi}J)\right) = I_{\{h_1, h_2\}}(gX).
\end{aligned}
$$

Это в точности выражение (9) для h_1 и h_2. □

Из предложения следует, что достаточно найти семейство функций в инволюции в $C^\infty(\mathfrak{g})$. Рассмотрим функции $h \in C^\infty(\mathfrak{g})$, инвариантные относительно присоединенного действия группы $\mathbf{G}$ на $\mathfrak{g}$:

$$h(\mathrm{Ad}(g)X) = h(X) \quad \forall g \in \mathbf{G},\ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Если зафиксировать X, подставить в это соотношение однопараметрическую группу $\exp(Yt)$ вместо g и взять производную, то для инвариантных функций получается

$$B(\operatorname{grad} h(X), [Y, X]) = B(X, [\operatorname{grad} h(X), Y]) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}. \tag{12}$$

Из этого и (9) следует, что скобка Ли — Пуассона инвариантной функции с любой другой равна нулю. Это свойство инвариантных функций используется для построения инволютивного набора интегралов. Из (12) также можно получить выражение для инвариантных функций

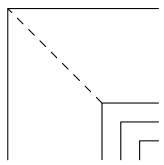
$$[X, \operatorname{grad} h(X)] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \tag{13}$$

5. Метод Тимма

В работе Тимма [2] рассматривается цепочка подалгебр $\mathfrak{u}(n+1)$

$$\mathfrak{u}(1) \hookrightarrow \mathfrak{u}(2) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathfrak{u}(n) \hookrightarrow \mathfrak{u}(n+1),$$

вложенных, как показано на схеме:



Пусть $\pi_i : \mathfrak{u}(n+1) \to \mathfrak{u}(i)$ — соответствующая ортогональная проекция, $h_i \in C^\infty(\mathfrak{u}(i))$ — $\operatorname{Ad}(\mathbf{U}(i))$-инвариантная функция. Тогда любые две функции $h_i \circ \pi_i, h_j \circ \pi_j \in C^\infty(\mathfrak{u}(n+1))$ находятся в инволюции в силу соотношений (9), (13) и вложенности подалгебр.

Пусть теперь $h, f \in C^\infty(\mathfrak{u}(i))$ — две $\operatorname{Ad}(\mathbf{U}(i))$-инвариантные функции. Тогда $f \circ \pi_i, h \circ \pi_i$ также находятся в инволюции в силу $\operatorname{Ad}(\mathbf{U}(i))$-инвариантности. Таким образом, достаточно рассматривать $\operatorname{Ad}(\mathbf{U}(i))$-инвариантные функции, чтобы получить полный набор интегралов в инволюции. В качестве такого набора интегралов можно взять функции (см. [2])

$$h \circ \pi_1 \circ P, h \circ \pi_2 \circ P, \ \ldots, \ h \circ \pi_n \circ P, f \circ \pi_2 \circ P, f \circ \pi_3 \circ P, \ \ldots, \ f \circ \pi_n \circ P, \ H, \tag{14}$$

где H — гамильтониан (7), P — отображение момента,

$$h(\zeta) = -\frac{i}{2} \operatorname{tr} \zeta, \quad f(\zeta) = -\frac{1}{4} \operatorname{tr} \zeta^2.$$

Это полный коммутативный набор интегралов (количество интегралов $2n$). Докажем независимость их гамильтоновых полей почти всюду на $T\mathbb{C}P^n$. Для этого достаточно доказать независимость в какой-нибудь одной точке.

Найдем гамильтоново поле функции $h \circ \pi_j \circ P$, $j = 1, \ldots, n$, в точке $X \in \mathfrak{m}$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -\bar{x}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ x_i \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname{grad} h(\pi_j(P(X))) = \pi_j(iE_{n+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & iE_j \end{pmatrix},$$

где E_j — единичная матрица размера $j \times j$. По лемме 4.5 $v = 0$, а w имеет вид

$$w = [\operatorname{grad} h(\pi_j(P(X))), X]_{\mathfrak{m}} = \begin{pmatrix} 0 & -ix_{(j)} \\ -i\bar{x}_{(j)}^T & 0 \end{pmatrix},$$

где $x_{(j)}$ отличается от x тем, что все ее компоненты, начиная с $n-j+2$-й, равны нулю.

Выпишем гамильтоново поле функции $f \circ \pi_j \circ P$, $j = 2, \dots, n$, в этой же точке $X \in \mathfrak{m}$:

$$\operatorname{grad} f(\pi_j(P(X))) = \pi_j\left(X + \varepsilon \frac{1}{\pi} J\right),$$
$$w = [\operatorname{grad} f(\pi_j(P(X))), X]_{\mathfrak{m}} = \varepsilon \frac{1}{\pi}[J, X]_{\mathfrak{m}} = \varepsilon \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 0 & -ix \\ -i\bar{x}^T & 0 \end{pmatrix},$$
$$v = (\operatorname{grad} f(\pi_j(P(X))))_{\mathfrak{m}} = \pi_j(X).$$

Гамильтоново поле гамильтониана H дано в формуле (8). Видно, что если в x все компоненты различны и ненулевые, то гамильтоновы поля набора (14) будут независимы в точке X. Таким образом, теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 5. С. 3–49.
2. *Thimm A.* Integrable geodesic flows on homogeneous spaces // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1981. V. 1. P. 495–517.

Статья поступила 19 ноября 2003 г.

Ефимов Дмитрий Иванович
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
dmtefimov@yandex.ru