Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 512.547.212

КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША — ГОРДАНА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВЫБОРАХ БАЗИСОВ УНИТАРНЫХ И ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП $SU(2)$, $SO(3)$

С. К. Годунов, В. М. Гордиенко

Аннотация: Вычисляются коэффициенты Клебша — Гордана ортогональных (а не унитарных) представлений группы вращений.

Ключевые слова: представления группы вращений, коэффициенты Клебша — Гордана.

Введение

При исследовании дифференциальных уравнений, инвариантных относительно вращений координатной системы, используются инвариантные матричные дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial x_i} G^i_{1[K,L]}$ $(K = L,\ K = L \pm 1)$, связывающие вектор-функции, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы $SO(3)$ или $SU(2)$ соседних весов K и L. Входящие в запись этих операторов $(2K+1) \times (2L+1)$ матрицы $G^i_{1[K,L]}$ составлены из так называемых коэффициентов Клебша — Гордана $g^{i[k,l]}_{1[K,L]}$, поэтому естественно называть их *матрицами Клебша — Гордана.* Эти матрицы зависят от того или иного выбора канонических базисов в пространствах неприводимых представлений.

Для представлений целого веса удобно использовать нетрадиционный базис, предложенный недавно в [1]. В настоящей работе устанавливается явный вид соответствующих матриц Клебша — Гордана $G^i_{1[K,L]}$ как в случае пар K, L, составленных из целых весов, так и в случае полуцелых K, L $(|K - L| \leq 1)$.

В заключение приводятся в удобной матричной форме рекуррентные соотношения, позволяющие, исходя из приведенных матриц $G^i_{1[K,L]}$, определить матрицы Клебша — Гордана $G^n_{N[K,L]}$ при произвольных целых N для любых целых или полуцелых пар K, L, подчиненных известным неравенствам $|K - L| \leq N \leq K + L$.

§ 1. Используемые понятия, обозначения и сводка результатов

1. Спинорная реализация представлений. Для описания представлений группы $SO(3)$ обычно параметризуют эту группу, сопоставляя каждой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00766).

ортогональной матрице $P \in SO(3)$ ($P^T P = I_3$, $\det P = 1$) унитарную унимодулярную матрицу $g \in SU(2)$:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1),$$

так, чтобы преобразование $\begin{pmatrix} x'_{-1} \\ x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_{-1} \\ x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$ описывалось формулой

$$\begin{pmatrix} x'_0 & x'_1 + ix'_{-1} \\ x'_1 - ix'_{-1} & -x'_0 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x_0 & x_1 + ix_{-1} \\ x_1 - ix_{-1} & -x_0 \end{pmatrix} g^*$$

(параметризация Кэли — Клейна). Очевидно, что элементам $\pm g \in SU(2)$ соответствует одно и то же $P \in SO(3)$. Верно и обратное: каждому $P \in SO(3)$ отвечает одна и только одна пара $\pm g \in SU(2)$.

Хорошо известно [2–4], что однозначные неприводимые унитарные представления группы $SU(2)$ существуют в пространствах любой размерности K и при фиксированной размерности все они эквивалентны друг другу. Принято размерность K пространства неприводимого представления записывать в виде $K = 2N + 1$, число N при этом называют *весом* представления. Отметим, что в случае пространства нечетной размерности вес целый, а в случае пространства четной размерности — полуцелый.

Известно, что в случае *целого веса* неприводимые представления T_g группы $SU(2)$ обладают свойством $T_{-g} = T_g$. Поэтому каждому неприводимому представлению $SU(2)$ целого веса N соответствует однозначное неприводимое представление группы $SO(3)$ в пространстве нечетной размерности $2N + 1$. Других неприводимых однозначных представлений группы $SO(3)$ нет.

В случае *полуцелого веса* неприводимые представления обладают свойством $T_{-g} = -T_g$ и такие представления приводят к двузначным представлениям группы $SO(3)$.

Далее мы будем рассматривать в основном представления группы $SU(2)$, помня, что неприводимым представлением этой группы целого веса соответствуют однозначные представления группы $SO(3)$, а представлениям $SU(2)$ полуцелого веса — двузначные представления $SO(3)$.

Доказано [2–4], что неприводимые представления T_g группы $SU(2)$ веса N можно реализовать с помощью формулы

$$T_g f(\xi, \eta) = f(\xi', \eta') \equiv f(\bar{\alpha}\xi - \beta\eta, \bar{\beta}\xi + \alpha\eta) \tag{1.1}$$

в пространстве однородных полиномов $f^{(N)}(\xi, \eta)$ степени $2N$. Такие полиномы принято называть *спинорными.*

Унитарные $(2N + 1) \times (2N + 1)$-матрицы $\Omega_N^{(U)}(g)$ представления веса N, конечно, зависят от конкретного выбора базиса в пространстве, где представление действует. Обычно используют стандартный канонический базис, который составлен из векторов, собственных для операторов, соответствующих вращениям вокруг одной из координатных осей (например, вокруг оси $x_{-1} = 0$, $x_1 = 0$) трехмерного пространства.

В пространстве спинорных полиномов роль стандартного канонического базиса играют одночлены

$$e_N^n(\xi, \eta) = (-1)^{N+n} \sqrt{\frac{(2N+1)!}{(N+n)!\,(N-n)!}}\, \xi^{N+n} \eta^{N-n} \quad (-N \le n \le N).$$

Полиномы $e_N^n(\xi,\eta)$ ортонормированны в смысле скалярного произведения, задаваемого с помощью инвариантного интеграла по группе $SU(2)$

$$(e_N^n(\alpha,\beta), e_M^m(\alpha,\beta)) = \int\limits_{SU(2)} e_N^n(\alpha,\beta) e_M^m(\alpha,\beta)\, dg,$$

где, в свою очередь, инвариантный интеграл, используя параметризацию углами Эйлера

$$\alpha = e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cos\frac{\theta}{2}, \quad \beta = e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} \sin\frac{\theta}{2},$$

можно вычислять по формуле

$$\int\limits_{SU(2)} f(\alpha,\beta)\, dg = \frac{1}{16\pi^2} \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(\alpha(\theta,\varphi,\psi), \beta(\theta,\varphi,\psi)) \sin\theta\, d\theta d\varphi d\psi.$$

Матрицы представления $\Omega_N^{(U)}(g)$ для указанного базиса определяются из равенств

$$\begin{aligned}\bigl(T_g e_N^{-N}(\xi,\eta), T_g e_N^{-N+1}(\xi,\eta), \ldots, T_g e_N^{N}(\xi,\eta)\bigr)&\\ = \bigl(e_N^{-N}(\xi,\eta), e_N^{-N+1}(\xi,\eta), \ldots, e_N^{N}(\xi,\eta)\bigr)\Omega_N^{(U)}(g).&\end{aligned} \tag{1.2}$$

Они оказываются унитарными и, вообще говоря, комплексными.

2. Базис, удобный при целых весах. В пространстве представления *целого веса* возможен выбор другого канонического базиса такого, в котором матрицы того же представления будут вещественны, а следовательно, и ортогональны. Как показано в [1], то же самое представление будет описываться вещественными ортогональными матрицами $\Omega_N^{(O)}(g)$, если базисные однородные полиномы выбрать следующим образом ($n \geq 1$):

$$\begin{aligned} h_N^{-n}(\xi,\eta) &= \frac{(-i)^{N-1}}{\sqrt{2}}\bigl[(-1)^n e_N^n(\xi,\eta) - e_N^{-n}(\xi,\eta)\bigr],\\ h_N^0(\xi,\eta) &= (-i)^N e_N^0(\xi,\eta),\\ h_N^n(\xi,\eta) &= -\frac{(-i)^N}{\sqrt{2}}\bigl[(-1)^n e_N^n(\xi,\eta) + e_N^{-n}(\xi,\eta)\bigr]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

При этом матрицы представления $\Omega_N^{(O)}(g)$ определяются из равенств

$$\begin{aligned}\bigl(T_g h_N^{-N}(\xi,\eta), T_g h_N^{-N+1}(\xi,\eta), \ldots, T_g h_N^{N}(\xi,\eta)\bigr)&\\ = \bigl(h_N^{-N}(\xi,\eta), h_N^{-N+1}(\xi,\eta), \ldots, h_N^{N}(\xi,\eta)\bigr)\Omega_N^{(O)}(g).&\end{aligned} \tag{1.4}$$

Очевидно, что переход от одного базиса к другому осуществляется унитарным преобразованием и поэтому из ортонормированности первого вытекает ортонормированность второго в том же скалярном произведении.

3. Произведение представлений. Кронекерово произведение двух неприводимых представлений весов N_1 и N_2 (размерностей $2N_1+1$ и $2N_2+1$) можно реализовать в виде представления T_g в пространстве биспинорных полиномов $f(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)$, однородных степени $2N_1$ по ξ_1, η_1 и степени $2N_2$ по ξ_2,η_2:

$$T_g f(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) = f(\bar\alpha\xi_1 - \beta\eta_1, \bar\beta\xi_1 + \alpha\eta_1; \bar\alpha\xi_2 - \beta\eta_2, \bar\beta\xi_2 + \alpha\eta_2). \tag{1.5}$$

Размерность пространства таких полиномов равна $(2N_1+1)(2N_2+1)$, и описанное представление оказывается приводимым. Разложение на подпространства, в которых действуют неприводимые представления (они имеют веса $N = |N_1-N_2|, |N_1-N_2|+1, \ldots, N_1+N_2$), осуществляется с использованием полиномов

$$\mu^n_{N[N_1,N_2]}(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) = \sqrt{\frac{(2N_1+1)!(2N_2+1)!(N+N_1-N_2)!}{2N!(N_1+N_2-N)!(N-N_1+N_2)!(N+N_1+N_2+1)!}} \times (\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)^{N_1+N_2-N}\left(-\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)^{N-N_1+N_2} e^n_N(\xi_1,\eta_1). \quad (1.6)$$

При фиксированном N и $n=-N,-N+1,\ldots,N$ эти полиномы преобразуются так же, как и полиномы $e^n_N(\xi,\eta)$, а значит, образуют канонический базис неприводимого представления.

Скалярное произведение в пространстве биспинорных полиномов вводится таким образом, что полиномы $e^{n_1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1)e^{n_2}_{N_2}(\xi_2,\eta_2)$ ортонормированны. Полиномы $\mu^n_{N[N_1,N_2]}(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)$ ортонормированы в том же скалярном произведении.

Построенные полиномы $\mu^n_{N[N_1,N_2]}(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)$ образуют базис «типа e». Если N целое, то мы можем в формулах (1.6) заменить $e^n_N(\xi_1,\eta_1)$ на $h^n_N(\xi_1,\eta_1)$ и получить в пространстве биспинорных полиномов канонический базис «типа h»:

$$\nu^n_{N[N_1,N_2]}(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) = \sqrt{\frac{(2N_1+1)!(2N_2+1)!(N+N_1-N_2)!}{2N!(N_1+N_2-N)!(N-N_1+N_2)!(N+N_1+N_2+1)!}} \times (\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)^{N_1+N_2-N}\left(-\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)^{N-N_1+N_2} h^n_N(\xi_1,\eta_1). \quad (1.7)$$

В этом базисе матрицы представления вещественны.

Очевидно, что полиномы $\mu^n_{N[N_1,N_2]}(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)$ и $\nu^n_{N[N_1,N_2]}(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)$ связаны между собой тем же унитарным преобразованием U_{2N+1}, которым связаны полиномы $e^n_N(\xi_1,\eta_1)$ и $h^n_N(\xi_1,\eta_1)$ (см. (1.3)):

$$\begin{aligned}
\nu^{-n}_N(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) &= \frac{(-i)^{N-1}}{\sqrt{2}}\big[(-1)^n\mu^n_N(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)-\mu^{-n}_N(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)\big],\\
\nu^0_N(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) &= (-i)^N\mu^0_N(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2),\\
\nu^n_N(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) &= -\frac{(-i)^N}{\sqrt{2}}\big[(-1)^n\mu^n_N(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)+\mu^{-n}_N(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)\big].
\end{aligned} \quad (1.8)$$

4. Классические матрицы Клебша — Гордана $C^n_{N[K,L]}$. Ортонормированные базисы $\big\{\mu^n_{N[N_1,N_2]}(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)\big\}$ и $\big\{e^{n_1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1)e^{n_2}_{N_2}(\xi_2,\eta_2)\big\}$ (все базисы «типа e») линейно выражаются один через другой:

$$\begin{aligned}
\mu^n_N(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) &= \sum_{n_1,n_2} e^{n_1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1)c^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]}e^{n_2}_{N_2}(\xi_2,\eta_2)\\
&\equiv \big(e^{-N_1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1), e^{-N_1+1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1),\ldots,e^{N_1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1)\big)\\
&\qquad\times C^n_{N[N_1,N_2]}\begin{pmatrix} e^{-N_2}_{N_2}(\xi_2,\eta_2)\\ e^{-N_2+1}_{N_2}(\xi_2,\eta_2)\\ \vdots\\ e^{N_2}_{N_2}(\xi_2,\eta_2)\end{pmatrix}.
\end{aligned} \quad (1.9)$$

Величины $c^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]}$, связывающие эти базисы, называются *коэффициентами Клебша — Гордана* (очевидно, они вещественны). При фиксированных N, N_1, N_2, n коэффициенты Клебша — Гордана удобно считать элементами матриц Клебша — Гордана $C^n_{N[N_1,N_2]}$.

Коэффициенты Клебша — Гордана обладают следующими свойствами:

$$c^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]} = 0 \quad \text{при } n_1 + n_2 \neq n, \tag{1.10}$$

т. е. у матрицы Клебша — Гордана $C^n_{N[N_1,N_2]}$ элементы, отличные от нуля, могут располагаться только на одной «косой» диагонали;

$$c^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]} = (-1)^{N+N_1+N_2} c^{n[n_2,n_1]}_{N[N_2,N_1]}, \tag{1.11}$$

т. е. $C^n_{N[N_1,N_2]} = (-1)^{N+N_1+N_2}\big(C^n_{N[N_2,N_1]}\big)^T$;

$$c^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]} = (-1)^{N+N_1+n_2}\sqrt{\frac{2N+1}{2N+1}}\, c^{n_1[n,-n_2]}_{N_1[N,N_2]};$$

$$\operatorname{tr}\big\{\big(C^n_{N[N_1,N_2]}\big)^T C^n_{N[N_1,N_2]}\big\} = 1, \quad \text{т. е. } \sum_{n_1,n_2}\big(c^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]}\big)^2 = 1;$$

$$\operatorname{tr}\big\{\big(C^n_{N[N_1,N_2]}\big)^T C^m_{M[N_1,N_2]}\big\} = 0 \quad \text{при } (M-N)^2 + (m-n)^2 \neq 0.$$

Можно задать операторы в пространстве спинорных полиномов, матрицами которых будут матрицы Клебша — Гордана $C^n_{N[N_1,N_2]}$:

$$\begin{aligned} &\left\{\sqrt{\frac{(2N_1+1)!(N_1+N_2-N)!(N+N_1-N_2)!}{(2N)!(2N_2+1)!(N+N_1+N_2+1)!(N-N_1+N_2)!}}\right. \\ &\quad\times\left.\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\,\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta_0}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{N-N_1+N_2} e^n_N(\xi_0,\eta_0)\right\}\Bigg|_{\xi_0=\xi,\eta_0=\eta}(-1)^{N_2-k}e^{-k}_{N_2}(\xi,\eta) \\ &\qquad = \sum_j c^{n[j,k]}_{N[N_1,N_2]} e^j_{N_1}(\xi,\eta). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Выражение в фигурных скобках задает оператор в пространстве спинорных полиномов. Подразумевается, что после выполнения дифференцирования по ξ_0 и η_0 надо $\frac{\partial}{\partial\xi}$ и $\frac{\partial}{\partial\eta}$ поставить справа от переменных ξ_0, η_0 и после этого отождествить $\xi_0 = \xi$, $\eta_0 = \eta$.

Выпишем матрицы Клебша — Гордана $C^n_{N[N_1,N_2]}$, когда $N = 1$. Параметры N_1 и N_2 должны быть в этом случае либо равными, либо отличаться на единицу. Кроме того, используя симметрию (1.11), можно ограничиться случаем $N_1 \geq N_2$. Итак, выпишем матрицы $C^j_{1[K,N]}$ ($K = N$ либо $K = N+1$; $j = -1, 0, 1$). Матрицы $C^j_{1[N,N]}$ квадратные размера $(2N+1)\times(2N+1)$, матрицы $C^j_{1[N+1,N]}$ прямоугольные размера $(2N+3)\times(2N+1)$. Мы уже отмечали, что ненулевые элементы матриц Клебша — Гордана могут располагаться только на одной диагонали (см. (1.10)). Приведем структуру матриц Клебша — Гордана в типичных случаях, изобразив возможные ненулевые элементы стрелками.

Структура матриц $C^{-1}_{1[5/2,5/2]}$, $C^0_{1[5/2,5/2]}$, $C^1_{1[5/2,5/2]}$:

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&\nearrow&0\\ 0&0&0&\nearrow&0&0\\ 0&0&\nearrow&0&0&0\\ 0&\nearrow&0&0&0&0\\ \nearrow&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&\nearrow\\ 0&0&0&0&\nearrow&0\\ 0&0&0&\nearrow&0&0\\ 0&0&\nearrow&0&0&0\\ 0&\nearrow&0&0&0&0\\ \nearrow&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nearrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nearrow & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nearrow & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nearrow & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nearrow & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Структура матриц $C^{-1}_{1[7/2,5/2]}$, $C^{0}_{1[7/2,5/2]}$, $C^{1}_{1[7/2,5/2]}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nearrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nearrow & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nearrow & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nearrow & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nearrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nearrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nearrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nearrow & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nearrow & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nearrow & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nearrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nearrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nearrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nearrow & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nearrow & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nearrow & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nearrow & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nearrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Направления стрелок указывают порядок, в котором мы будем перечислять ненулевые элементы. Удобно для последовательности чисел, стоящих на одной диагонали, ввести специальные обозначения. Через $\operatorname{diag}^l_+(C^j_{1[K,N]})$ будем обозначать последовательность элементов $c^{j[k,l-k]}_{1[K,N]}$, у которых сумма номеров строки и столбца равна l. Параметр l, который можно считать номером диагонали пробегает все целочисленные значения, допустимые неравенством $-(K+N) \le l \le K+N$. При $l = \pm(K+N)$ соответствующая диагональ имеет всего один элемент, стоящий в левом верхнем (при $l = -K-N$) или правом нижнем (при $l = K+N$) углу матрицы. Диагональ с номером $l = 0$ естественно считать центральной. При $K = N$ она соединяет левый нижний и правый верхний угловые элементы, а при $K = N+1$ расположена между диагоналями с номерами $l = \pm 1$, выходящими из этих углов. Диагональ с номером $l = -1$ примыкает к центральной сверху, а с номером $l = 1$ — снизу.

Выпишем ненулевые диагонали матриц $C^j_{1[K,N]}$, перечисляя элементы в них слева направо (в направлении стрелок на схемах).

У матрицы $C^0_{1[N,N]}$ отлична от нуля центральная диагональ

$$\begin{aligned} &\operatorname{diag}^0_+\big(C^0_{1[N,N]}\big) \\ &\equiv \big(c^{0[N,-N]}_{1[N,N]}, c^{0[N-1,-N+1]}_{1[N,N]}, c^{0[N-2,-N+2]}_{1[N,N]}, \dots, c^{0[-N+2,N-2]}_{1[N,N]}, c^{0[-N+1,N-1]}_{1[N,N]}, c^{0[-N,N]}_{1[N,N]}\big) \\ &= \big((-1)^{2N} s^N_N, (-1)^{2N-1} s^{N-1}_N, (-1)^{2N-2} s^{N-2}_N, \dots, s^{-N+2}_N, -s^{-N+1}_N, s^{-N}_N\big), \end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$s^n_N = \frac{\sqrt{3}n}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}. \tag{1.14}$$

У матрицы $C^{-1}_{1[N,N]}$ отличны от нуля только элементы на диагонали, примыкающей к центральной сверху:

$$\begin{aligned}&\operatorname{diag}^{-1}_{+}\bigl(C^{-1}_{1[N,N]}\bigr)\\ &\equiv \bigl(c^{-1[N-1,-N]}_{1[N,N]}, c^{-1[N-2,-N+1]}_{1[N,N]}, c^{-1[N-3,-N+2]}_{1[N,N]}, \dots, c^{-1[-N+1,N-2]}_{1[N,N]}, c^{-1[-N,N-1]}_{1[N,N]}\bigr)\\ &= \sqrt{2}\bigl((-1)^{2N} r_N^{-N}, (-1)^{2N-1} r_N^{-N+1}, (-1)^{2N-2} r_N^{-N+2}, \dots, r_N^{N-2}, -r_N^{N-1}\bigr),\end{aligned} \tag{1.15}$$

где

$$r_N^n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(N+n+1)(N-n)}{N(N+1)(2N+1)}}. \tag{1.16}$$

У матрицы $C^{1}_{1[N,N]}$ отличны от нуля только элементы на диагонали, примыкающей к центральной снизу:

$$\begin{aligned}&\operatorname{diag}^{1}_{+}\bigl(C^{1}_{1[N,N]}\bigr)\\ &\equiv \bigl(c^{1[N,-N+1]}_{1[N,N]}, c^{1[N-1,-N+2]}_{1[N,N]}, c^{1[N-2,-N+3]}_{1[N,N]}, \dots, c^{1[-N+2,N-1]}_{1[N,N]}, c^{1[-N+1,N]}_{1[N,N]}\bigr)\\ &= \sqrt{2}\bigl((-1)^{2N} r_N^{-N}, (-1)^{2N-1} r_N^{-N+1}, (-1)^{2N-2} r_N^{-N+2}, \dots, r_N^{N-2}, -r_N^{N-1}\bigr).\end{aligned} \tag{1.17}$$

Структура матрицы $C^{j}_{1[N+1,N]}$ аналогична. У матрицы $C^{0}_{1[N+1,N]}$ ненулевая диагональ центральная, у матрицы $C^{-1}_{1[N+1,N]}$ — примыкающая к центральной сверху, а у матрицы $C^{1}_{1[N+1,N]}$ — снизу. Перечислим элементы этих диагоналей:

$$\begin{aligned}&\operatorname{diag}^{0}_{+}\bigl(C^{0}_{1[N+1,N]}\bigr)\\ &\equiv \bigl(c^{0[N,-N]}_{1[N+1,N]}, c^{0[N-1,-N+1]}_{1[N+1,N]}, c^{0[N-2,-N+2]}_{1[N+1,N]}, \dots, c^{0[-N+1,N-1]}_{1[N+1,N]}, c^{0[-N,N]}_{1[N+1,N]}\bigr)\\ &= \bigl((-1)^{2N} q_N^{-N}, (-1)^{2N-1} q_N^{-N+1}, (-1)^{2N-2} q_N^{-N+2}, \dots, -q_N^{N-1}, q_N^{N}\bigr),\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{diag}^{-1}_{+}\bigl(C^{-1}_{1[N+1,N]}\bigr)\\ &\equiv \bigl(c^{-1[N-1,-N]}_{1[N+1,N]}, c^{-1[N-2,-N+1]}_{1[N+1,N]}, c^{-1[N-3,-N+2]}_{1[N+1,N]}, \dots, c^{-1[-N,N-1]}_{1[N+1,N]}, c^{-1[-N-1,N]}_{1[N+1,N]}\bigr)\\ &= \sqrt{2}\bigl((-1)^{2N} p_N^{-N}, (-1)^{2N-1} p_N^{-N+1}, (-1)^{2N-2} p_N^{-N+2}, \dots, -p_N^{N-1}, p_N^{N}\bigr),\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{diag}^{1}_{+}\bigl(C^{1}_{1[N+1,N]}\bigr)\\ &\equiv \bigl(c^{1[N+1,-N]}_{1[N+1,N]}, c^{1[N,-N+1]}_{1[N+1,N]}, c^{1[N-1,-N+2]}_{1[N+1,N]}, \dots, c^{1[-N+2,N-1]}_{1[N+1,N]}, c^{1[-N+1,N]}_{1[N+1,N]}\bigr)\\ &= \sqrt{2}\bigl((-1)^{2N} p_N^{N}, (-1)^{2N-1} p_N^{N-1}, (-1)^{2N-2} p_N^{N-2}, \dots, -p_N^{-N+1}, p_N^{-N}\bigr),\end{aligned} \tag{1.20}$$

где

$$q_N^n = \sqrt{\frac{3(N+1-n)(N+1+n)}{(N+1)(2N+1)(2N+3)}}, \quad p_N^n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(N+n+1)(N+n+2)}{(N+1)(2N+1)(2N+3)}}. \tag{1.21}$$

5. Матрицы Клебша — Гордана $G^{n}_{N[K,L]}$. Коэффициенты Клебша — Гордана, конечно, зависят от базисов, которые выбираются в пространствах спинорных и биспинорных полиномов. В случае, когда N *целое*, в пространстве биспинорных полиномов мы выбираем базис «типа h» $\nu^{n}_{N[N_1,N_2]}(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)$. Веса пространств-сомножителей N_1 и N_2 могут быть либо оба целые, либо оба полуцелые. Рассмотрим эти случаи отдельно.

Если N_1 и N_2 *полуцелые*, то полиномы $\nu^n_{N[N_1,N_2]}(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)$ раскладываем по базису «типа e» и вводим коэффициенты Клебша — Гордана с помощью равенств

$$\begin{aligned}\nu^n_N(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) &= \sum_{n_1,n_2} e^{n_1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1) g^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]} e^{n_2}_{N_2}(\xi_2,\eta_2) \\ &\equiv \big(e^{-N_1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1), e^{-N_1+1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1),\ldots,e^{N_1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1)\big) \\ &\qquad\times G^n_{N[N_1,N_2]}\begin{pmatrix} e^{-N_2}_{N_2}(\xi_2,\eta_2) \\ e^{-N_2+1}_{N_2}(\xi_2,\eta_2) \\ \vdots \\ e^{N_2}_{N_2}(\xi_2,\eta_2)\end{pmatrix}. \qquad (1.22)\end{aligned}$$

Из формул (1.8), (1.9) и (1.22) следует, что матрицы $C^n_{N[N_1,N_2]}$ и $G^n_{N[N_1,N_2]}$ (в случае N целого, N_1 и N_2 полуцелых) связаны между собой так же, как связаны полиномы $e^n_N(\xi,\eta)$ и $h^n_N(\xi,\eta)$ (см. (1.3)):

$$\begin{gathered} G^{-n}_{N[N_1,N_2]} = \frac{(-i)^{N-1}}{\sqrt{2}}\big[(-1)^n C^n_{N[N_1,N_2]} - C^{-n}_{N[N_1,N_2]}\big], \\ G^0_{N[N_1,N_2]} = (-i)^N C^0_{N[N_1,N_2]}, \qquad (1.23) \\ G^n_{N[N_1,N_2]} = -\frac{(-i)^N}{\sqrt{2}}\big[(-1)^n C^n_{N[N_1,N_2]} + C^{-n}_{N[N_1,N_2]}\big]. \end{gathered}$$

Когда *все веса N, N_1, N_2 целые*, биспинорные полиномы $\big\{\nu^n_N(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)\big\}$ раскладываем по полиномам $\{h(\xi_1,\eta_1)h(\xi_2,\eta_2)\}$ и вводим коэффициенты Клебша — Гордана с помощью равенств

$$\begin{aligned}\nu^n_N(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) &= \sum_{n_1,n_2} h^{n_1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1) g^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]} h^{n_2}_{N_2}(\xi_2,\eta_2) \\ &\equiv \big(h^{-N_1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1), h^{-N_1+1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1),\ldots,h^{N_1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1)\big) \\ &\qquad\times G^n_{N[N_1,N_2]}\begin{pmatrix} h^{-N_2}_{N_2}(\xi_2,\eta_2) \\ h^{-N_2+1}_{N_2}(\xi_2,\eta_2) \\ \vdots \\ h^{N_2}_{N_2}(\xi_2,\eta_2)\end{pmatrix}. \qquad (1.24)\end{aligned}$$

Остановимся на этом случае (N, N_1, N_2 целые) подробнее. Коэффициенты $g^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]}$ также оказываются вещественными, хотя это и не так очевидно. В дальнейшем вещественность $g^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]}$ выяснится в результате вычислений.

Коэффициенты Клебша — Гордана $g^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]}$ обладают следующими свойствами:

$$g^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]} = (-1)^{N+N_1+N_2} g^{n[n_2,n_1]}_{N[N_2,N_1]}, \text{ т. е. } G^n_{N[N_1,N_2]} = (-1)^{N+N_1+N_2}\big(G^n_{N[N_2,N_1]}\big)^T,$$

$$g^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]} = (-1)^{N+N_1+N_2}\sqrt{\frac{2N+1}{2N_1+1}}\, g^{n_1[n,n_2]}_{N_1[N,N_2]},$$

$$\operatorname{tr}\big\{\big(G^n_{N[N_1,N_2]}\big)^T G^n_{N[N_1,N_2]}\big\} = 1, \quad \text{т. е. } \sum_{n_1,n_2}\big(g^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]}\big)^2 = 1,$$

$$\operatorname{tr}\bigl\{\bigl(G^n_{N[N_1,N_2]}\bigr)^T G^m_{M[N_1,N_2]}\bigr\}=0 \quad \text{при } (M-N)^2+(m-n)^2\neq 0.$$

Матрицы Клебша — Гордана $G^n_{N[N_1,N_2]}$ также являются матрицами некоторых операторов в пространстве спинорных полиномов:

$$\left\{\sqrt{\frac{(2N_1+1)!(N_1+N_2-N)!(N+N_1-N_2)!}{(2N)!(2N_2+1)!(N+N_1+N_2+1)!(N-N_1+N_2)!}}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\,\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta_0}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{N-N_1+N_2} h^n_N(\xi_0,\eta_0)\right\}\Bigg|_{\xi_0=\xi,\eta_0=\eta} h^k_{N_2}(\xi,\eta)$$
$$=\sum_j g^{n[j,k]}_{N[N_1,N_2]} h^j_{N_1}(\xi,\eta). \qquad (1.25)$$

Формулы (1.25), как и формулы (1.12), будут обоснованы в следующем параграфе.

Выпишем матрицы Клебша — Гордана $G^n_{N[N_1,N_2]}$ в тех же случаях, в которых мы выписали матрицы $C^n_{N[N_1,N_2]}$, т. е. при $N=1$.

Приведем структуру этих матриц в типичных случаях, изобразив возможные ненулевые элементы стрелками.

Структура матриц $G^{-1}_{1[2,2]}$, $G^0_{1[2,2]}$, $G^1_{1[2,2]}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & \searrow & 0 & 0 & 0\\ \searrow & 0 & \searrow & 0 & 0\\ 0 & \searrow & 0 & \searrow & 0\\ 0 & 0 & \searrow & 0 & \searrow\\ 0 & 0 & 0 & \searrow & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \nearrow\\ 0 & 0 & 0 & \nearrow & 0\\ 0 & 0 & \nearrow & 0 & 0\\ 0 & \nearrow & 0 & 0 & 0\\ \nearrow & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \nearrow & 0\\ 0 & 0 & \nearrow & 0 & \nearrow\\ 0 & \nearrow & 0 & \nearrow & 0\\ \nearrow & 0 & \nearrow & 0 & 0\\ 0 & \nearrow & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Структура матриц $G^{-1}_{1[3,2]}$, $G^0_{1[3,2]}$, $G^1_{1[3,2]}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \nearrow\\ 0 & 0 & 0 & \nearrow & 0\\ 0 & 0 & \nearrow & 0 & \nearrow\\ 0 & \nearrow & 0 & \nearrow & 0\\ \nearrow & 0 & \nearrow & 0 & 0\\ 0 & \nearrow & 0 & 0 & 0\\ \nearrow & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \searrow & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \searrow & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \searrow & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \searrow & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \searrow\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \searrow & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \searrow & 0 & 0 & 0\\ \searrow & 0 & \searrow & 0 & 0\\ 0 & \searrow & 0 & \searrow & 0\\ 0 & 0 & \searrow & 0 & \searrow\\ 0 & 0 & 0 & \searrow & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \searrow \end{bmatrix}.$$

При этом кроме диагоналей diag^l_+, которые образовывали элементы с одинаковой суммой номеров строки и столбца, равной l (эти диагонали располагаются слева направо и снизу вверх), мы будем использовать диагонали diag^l_-, образованные элементами матрицы, у которых разность номеров строки и столбца равна l (эти диагонали располагаются слева направо и сверху вниз). Диагонали со значением $l=0$ будем называть центральными. Диагонали со значением $l=-1$ примыкают к центральным сверху, а диагонали со значением $l=1$ — снизу.

Матрицы $G^{j}_{1[N,N]}$ кососимметрические. Матрица $G^{0}_{1[N,N]}$ имеет одну центральную диагональ diag^0_+:

$$\mathrm{diag}^0_+\big(G^0_{1[N,N]}\big)\equiv\big(g^{0[N,-N]}_{1[N,N]},g^{0[N-1,-N+1]}_{1[N,N]},\dots,g^{0[1,-1]}_{1[N,N]},g^{0[0,0]}_{1[N,N]},g^{0[-1,1]}_{1[N,N]},\dots,$$
$$g^{0[-N+1,N-1]}_{1[N,N]},g^{0[-N,N]}_{1[N,N]}\big)=\big(-s^N_N,-s^{N-1}_N,\dots,-s^1_N,s^0_N,s^1_N,\dots,s^{N-1}_N,s^N_N\big).\quad(1.26)$$

Матрица $G^{-1}_{1[N,N]}$ имеет две ненулевые диагонали diag^1_- и diag^{-1}_-, и так как $G^{-1}_{1[N,N]}$ кососимметрическая, элементы этих диагоналей отличаются только знаком:

$$\mathrm{diag}^1_-\big(G^{-1}_{1[N,N]}\big)$$
$$\equiv\big(g^{-1[-N+1,-N]}_{1[N,N]},g^{-1[-N+2,-N+1]}_{1[N,N]},\dots,g^{-1[-1,-2]}_{1[N,N]},g^{-1[0,-1]}_{1[N,N]},g^{-1[1,0]}_{1[N,N]},g^{-1[2,1]}_{1[N,N]},\dots,$$
$$g^{-1[N,N-1]}_{1[N,N]}\big)=\big(r^{N-1}_N,r^{N-2}_N,\dots,r^1_N,0,\sqrt{2}r^0_N,-r^1_N,\dots,-r^{N-1}_N\big)$$
$$=-\big(g^{-1[-N,-N+1]}_{1[N,N]},g^{-1[-N+1,-N+2]}_{1[N,N]},\dots,g^{-1[-2,-1]}_{1[N,N]},g^{-1[-1,0]}_{1[N,N]},g^{-1[0,1]}_{1[N,N]},g^{-1[1,2]}_{1[N,N]},\dots,$$
$$g^{-1[N-1,N]}_{1[N,N]}\big)\equiv-\,\mathrm{diag}^{-1}_-\big(G^{-1}_{1[N,N]}\big).\quad(1.27)$$

Матрица $G^{1}_{1[N,N]}$ имеет две ненулевые диагонали diag^{-1}_+ и diag^1_+. Перечислим их элементы:

$$\mathrm{diag}^{-1}_+\big(G^1_{1[N,N]}\big)$$
$$\equiv\big(g^{1[N-1,-N]}_{1[N,N]},g^{1[N-2,-N+1]}_{1[N,N]},\dots,g^{1[1,-2]}_{1[N,N]},g^{1[0,-1]}_{1[N,N]},g^{1[-1,0]}_{1[N,N]},g^{1[-2,1]}_{1[N,N]},\dots,g^{1[-N,N-1]}_{1[N,N]}\big)$$
$$=\big(-r^{N-1}_N,-r^{N-2}_N,\dots,-r^1_N,\sqrt{2}r^0_N,-\sqrt{2}r^0_N,r^1_N,\dots,r^{N-1}_N\big),\quad(1.28)$$

$$\mathrm{diag}^{1}_+\big(G^1_{1[N,N]}\big)$$
$$\equiv\big(g^{1[N,-N+1]}_{1[N,N]},g^{1[N-1,-N+2]}_{1[N,N]},\dots,g^{1[2,-1]}_{1[N,N]},g^{1[1,0]}_{1[N,N]},g^{1[0,1]}_{1[N,N]},g^{1[-1,2]}_{1[N,N]},\dots,g^{1[-N+1,N]}_{1[N,N]}\big)$$
$$=\big(-r^{N-1}_N,-r^{N-2}_N,\dots,-r^1_N,0,0,r^1_N,\dots,r^{N-1}_N\big).\quad(1.29)$$

Матрица $G^{0}_{1[N+1,N]}$ имеет одну ненулевую диагональ diag^0_-:

$$\mathrm{diag}^0_-\big(G^0_{1[N+1,N]}\big)$$
$$\equiv\big(g^{0[-N,-N]}_{1[N,N]},g^{0[-N+1,-N+1]}_{1[N,N]},\dots,g^{0[-1,-1]}_{1[N,N]},g^{0[0,0]}_{1[N,N]},g^{0[1,1]}_{1[N,N]},\dots,$$
$$g^{0[N-1,N-1]}_{1[N,N]},g^{0[N,N]}_{1[N,N]}\big)=\big(q^N_N,q^{N-1}_N,\dots,q^1_N,q^0_N,q^1_N,\dots,q^{N-1}_N,q^N_N\big).\quad(1.30)$$

Матрица $G^{-1}_{1[N+1,N]}$ имеет две ненулевые диагонали $\mathrm{diag}^{\pm1}_+$:

$$\mathrm{diag}^{-1}_+\big(G^{-1}_{1[N+1,N]}\big)$$
$$\equiv\big(g^{-1[N-1,-N]}_{1[N+1,N]},g^{-1[N-2,-N+1]}_{1[N+1,N]},\dots,g^{-1[1,-2]}_{1[N+1,N]},g^{-1[0,-1]}_{1[N+1,N]},g^{-1[-1,0]}_{1[N+1,N]},g^{-1[-2,1]}_{1[N+1,N]},\dots,$$
$$g^{-1[-N-1,N]}_{1[N+1,N]}\big)=\big(p^{-N}_N,p^{-N+1}_N,\dots,p^{-2}_N,-\sqrt{2}p^{-1}_N,\sqrt{2}p^0_N,-p^1_N,\dots,-p^N_N\big),\quad(1.31)$$

$$\operatorname{diag}^1_+\big(G^{-1}_{1[N+1,N]}\big)$$
$$\equiv \big(g^{-1[N+1,-N]}_{1[N+1,N]}, g^{-1[N,-N+1]}_{1[N+1,N]}, \dots, g^{-1[2,-1]}_{1[N+1,N]}, g^{-1[1,0]}_{1[N+1,N]}, g^{-1[0,1]}_{1[N+1,N]}, g^{-1[-1,2]}_{1[N+1,N]}, \dots,$$
$$g^{-1[-N+1,N]}_{1[N+1,N]}\big) = \big(p^N_N, p^{N-1}_N, \dots, p^1_N, 0, 0, -p^{-2}_N, \dots, -p^{-N}_N\big). \quad (1.32)$$

Матрица $G^1_{1[N+1,N]}$ имеет тоже две ненулевые диагонали $\operatorname{diag}^{\pm 1}_-$:

$$\operatorname{diag}^{-1}_-\big(G^1_{1[N+1,N]}\big)$$
$$\equiv \big(g^{1[-N-1,-N]}_{1[N+1,N]}, g^{1[-N,-N+1]}_{1[N+1,N]}, \dots, g^{1[-2,-1]}_{1[N+1,N]}, g^{1[-1,0]}_{1[N+1,N]}, g^{1[0,1]}_{1[N+1,N]}, g^{1[1,2]}_{1[N+1,N]}, \dots,$$
$$g^{1[N-1,N]}_{1[N+1,N]}\big) = \big(-p^N_N, -p^{N-1}_N, \dots, -p^1_N, 0, -\sqrt{2}p^{-1}_N, p^{-2}_N, \dots, p^{-N}_N\big), \quad (1.33)$$

$$\operatorname{diag}^1_-\big(G^1_{1[N+1,N]}\big)$$
$$\equiv \big(g^{1[-N+1,-N]}_{1[N+1,N]}, g^{1[-N+2,-N+1]}_{1[N+1,N]}, \dots, g^{1[-1,-2]}_{1[N+1,N]}, g^{1[0,-1]}_{1[N+1,N]}, g^{1[1,0]}_{1[N+1,N]}, g^{1[2,1]}_{1[N+1,N]}, \dots,$$
$$g^{1[N+1,N]}_{1[N+1,N]}\big) = \big(p^{-N}_N, p^{-N+1}_N, \dots, p^{-2}_N, 0, \sqrt{2}p^0_N, -p^1_N, \dots, -p^N_N\big). \quad (1.34)$$

В § 4 мы рассмотрим реализацию кронекерова произведения в пространстве матриц. Окажется, что матрицы Клебша — Гордана образуют канонические базисы неприводимых представлений. Будут получены рекуррентные формулы, позволяющие вычислить любую матрицу Клебша — Гордана, если известны приведенные здесь матрицы с первым нижним индексом, равным единице.

§ 2. Операторы, определяющие матрицы Клебша — Гордана

В этом параграфе будут обоснованы формулы (1.12) и (1.25), задающие операторы, матрицами которых являются матрицы Клебша — Гордана $C^n_{N[N_1,N_2]}$ и $G^n_{N[N_1,N_2]}$.

Использовав в (1.9) формулу (1.6) для μ^n_N, получим производящую функцию для коэффициентов Клебша — Гордана $c^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]}$:

$$\sqrt{\frac{(2N_1+1)!(2N_2+1)!(N+N_1-N_2)!}{(2N)!(N_1+N_2-N)!(N-N_1+N_2)!(N+N_1+N_2+1)!}}$$
$$\times (\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)^{N_1+N_2-N}\left(-\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)^{N-N_1+N_2} e^n_N(\xi_1,\eta_1)$$
$$= \sum_{n_1,n_2} c^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]} e^{n_1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1) e^{n_2}_{N_2}(\xi_2,\eta_2). \quad (2.1)$$

Использовав в (1.24) формулу (1.7) для ν^n_N, имеем производящую функцию для коэффициентов $g^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]}$:

$$\sqrt{\frac{(2N_1+1)!(2N_2+1)!(N+N_1-N_2)!}{(2N)!(N_1+N_2-N)!(N-N_1+N_2)!(N+N_1+N_2+1)!}}$$
$$\times (\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)^{N_1+N_2-N}\left(-\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)^{N-N_1+N_2} h^n_N(\xi_1,\eta_1)$$
$$= \sum_{n_1,n_2} g^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]} h^{n_1}_{N_1}(\xi_1,\eta_1) h^{n_2}_{N_2}(\xi_2,\eta_2). \quad (2.2)$$

Осуществим явно разложение левых частей равенств (2.1) и (2.2) по полиномам $e_{N_2}^{n_2}(\xi_2,\eta_2)$ и $h_{N_2}^{n_2}(\xi_2,\eta_2)$ соответственно. Для этого отметим следующее дифференциальное тождество:

$$\frac{(N_1+N_2-N)!}{(2N_2)!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta_1}-\frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{N-N_1+N_2}(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)^{2N_2}\right\}\Big|_{\xi_0=\xi_1,\eta_0=\eta_1}$$
$$=(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)^{N_1+N_2-N}\left(-\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right)^{N-N_1+N_2},$$

здесь подразумевается, что после дифференцирования по ξ_1 и η_1 в левой части производится отождествление $\xi_0=\xi_1$, $\eta_0=\eta_1$.

Использовав это тождество, формулы (2.1) и (2.2) можем выписать в виде

$$\sqrt{\frac{(2N_1+1)!(2N_2+1)(N_1+N_2-N)!(N+N_1-N_2)!}{(2N)!(2N_2)!(N+N_1+N_2+1)!(N-N_1+N_2)!}}$$
$$\times\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta_1}-\frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{N-N_1+N_2}e_N^n(\xi_0,\eta_0)\right\}\Big|_{\xi_0=\xi_1,\eta_0=\eta_1}(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)^{2N_2}$$
$$=\sum_{n_1,n_2}c_{N[N_1,N_2]}^{n[n_1,n_2]}e_{N_1}^{n_1}(\xi_1,\eta_1)e_{N_2}^{n_2}(\xi_2,\eta_2),\quad(2.3)$$

$$\sqrt{\frac{(2N_1+1)!(2N_2+1)(N_1+N_2-N)!(N+N_1-N_2)!}{(2N)!(2N_2)!(N+N_1+N_2+1)!(N-N_1+N_2)!}}$$
$$\times\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta_1}-\frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{N-N_1+N_2}h_N^n(\xi_0,\eta_0)\right\}\Big|_{\xi_0=\xi_1,\eta_0=\eta_1}(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)^{2N_2}$$
$$=\sum_{n_1,n_2}g_{N[N_1,N_2]}^{n[n_1,n_2]}h_{N_1}^{n_1}(\xi_1,\eta_1)h_{N_2}^{n_2}(\xi_2,\eta_2).\quad(2.4)$$

Воспользуемся в (2.3) разложением

$$(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)^{2N_2}=\frac{1}{2N_2+1}\sum_{n_2}(-1)^{N_2-n_2}e_{N_2}^{-n_2}(\xi_1,\eta_1)e_{N_2}^{n_2}(\xi_2,\eta_2),$$

приравняем слева и справа выражения при $e_{N_2}^{n_2}(\xi_2,\eta_2)$, в результате получим

$$\sqrt{\frac{(2N_1+1)!(N_1+N_2-N)!(N+N_1-N_2)!}{(2N)!(2N_2+1)!(N+N_1+N_2+1)!(N-N_1+N_2)!}}$$
$$\times\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta_1}-\frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{N-N_1+N_2}e_N^n(\xi_0,\eta_0)\right\}\Big|_{\xi_0=\xi_1,\eta_0=\eta_1}(-1)^{N_2-n_2}e_{N_2}^{-n_2}(\xi_1,\eta_1)$$
$$=\sum_{n_1}c_{N[N_1,N_2]}^{n[n_1,n_2]}e_{N_1}^{n_1}(\xi_1,\eta_1)$$

или, после переобозначений,

$$\sqrt{\frac{(2N_1+1)!(N_1+N_2-N)!(N+N_1-N_2)!}{(2N)!(2N_2+1)!(N+N_1+N_2+1)!(N-N_1+N_2)!}}$$
$$\times\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{N-N_1+N_2}e_N^n(\xi_0,\eta_0)\right\}\Big|_{\xi_0=\xi,\eta_0=\eta}(-1)^{N_2+k}e_{N_2}^{k}(\xi,\eta)$$
$$=\sum_{j}c_{N[N_1,N_2]}^{n[j,-k]}e_{N_1}^{j}(\xi,\eta).\quad(2.5)$$

Напоминаем, что в левой части после дифференцирования осуществляется отождествление $\xi_0 = \xi$, $\eta_0 = \eta$.

Аналогично использовав в (2.4) разложение

$$(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)^{2N_2} = \frac{1}{2N_2+1}\sum_{n_2} h_{N_2}^{n_2}(\xi_1,\eta_1)h_{N_2}^{n_2}(\xi_2,\eta_2),$$

можно получить выражение

$$\sqrt{\frac{(2N_1+1)!(N_1+N_2-N)!(N+N_1-N_2)!}{(2N)!(2N_2+1)!(N+N_1+N_2+1)!(N-N_1+N_2)!}}$$
$$\times\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{N-N_1+N_2} h_N^n(\xi_0,\eta_0)\right\}\Bigg|_{\xi_0=\xi,\eta_0=\eta} h_{N_2}^k(\xi,\eta)$$
$$= \sum_j g_{N[N_1,N_2]}^{n[j,k]} h_{N_1}^j(\xi,\eta). \quad (2.6)$$

Выпишем формулы (2.5) и (2.6) в следующих двух случаях.

I. $N = 1$, $N_1 = N + 1$, $N_2 = N$.

II. $N = 1$, $N_1 = N_2 = N$.

Формула (2.5) в случае I принимает вид

$$\frac{(-1)^{N+k}}{\sqrt{2N+1}} e_1^n(\xi,\eta)e_N^k(\xi,\eta) = \sum_j c_{1[N+1,N]}^{n[j,-k]} e_{N+1}^j(\xi,\eta)$$

или

$$\frac{(-1)^{N+k}}{\sqrt{2N+1}} e_1^n(\xi,\eta)e_N^k(\xi,\eta) = c_{1[N+1,N]}^{n[n+k,-k]} e_{N+1}^{n+k}(\xi,\eta).$$

Отсюда вытекает диагональный вид матриц $C_{1[N+1,N]}^n$ и формулы (1.18)–(1.20) для диагоналей этих матриц.

Формула (2.6) в случае I принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}} h_1^j(\xi,\eta)h_N^n(\xi,\eta) = \sum_k g_{1[N+1,N]}^{j[k,n]} h_{N+1}^k(\xi,\eta), \quad (2.7)$$

формула (2.5) в случае II — вид

$$\frac{(-1)^{N+k}}{2\sqrt{2N(N+1)(2N+1)}}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi}\right) e_1^n(\xi_0,\eta_0)\right\}\Bigg|_{\xi_0=\xi,\eta_0=\eta} e_N^k(\xi,\eta)$$
$$= \sum_j c_{1[N,N]}^{n[j,-k]} e_N^j(\xi,\eta). \quad (2.8)$$

Напомним, что полиномы канонического базиса «типа e» представления веса 1 выглядят следующим образом:

$$e_1^{-1}(\xi,\eta) = \sqrt{3}\eta^2, \quad e_1^0(\xi,\eta) = -\sqrt{6}\xi\eta, \quad e_1^1(\xi,\eta) = \sqrt{3}\xi^2,$$

поэтому

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi}\right) e_1^{-1}(\xi_0,\eta_0)\right\}\Bigg|_{\xi_0=\xi,\eta_0=\eta} = -2\sqrt{3}\eta\frac{\partial}{\partial\xi} \equiv 2\sqrt{6}H_{-1},$$

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi}\right) e_1^0(\xi_0,\eta_0)\right\}\Bigg|_{\xi_0=\xi,\eta_0=\eta} = \sqrt{6}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi} - \eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right) \equiv 2\sqrt{6}H_0,$$

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)e_1^1(\xi_0,\eta_0)\right\}\Big|_{\xi_0=\xi,\eta_0=\eta}=2\sqrt{3}\xi\frac{\partial}{\partial\eta}\equiv 2\sqrt{6}H_1.$$

Формула (2.8) запишется в виде

$$\frac{(-1)^{N+k}\sqrt{3}H_n}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}e_N^k(\xi,\eta)=\sum_j c_{1[N,N]}^{n[j,-k]}e_N^j(\xi,\eta),$$

или

$$\frac{(-1)^{N+k}\sqrt{3}H_n}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}e_N^k(\xi,\eta)=c_{1[N,N]}^{n[n+k,-k]}e_N^{n+k}(\xi,\eta).$$

Отсюда получаем диагональный вид матриц $C^n_{1[N,N]}$ и формулы (1.13), (1.15), (1.17) для диагоналей.

Формула (2.6) в случае II принимает вид

$$\frac{1}{2\sqrt{2N(N+1)(2N+1)}}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)h_1^n(\xi_0,\eta_0)\right\}\Big|_{\xi_0=\xi,\eta_0=\eta}h_N^k(\xi,\eta)$$
$$=\sum_j g_{1[N,N]}^{n[j,k]}h_N^j(\xi,\eta). \quad (2.9)$$

Напомним, что полиномы канонического базиса «типа h» представления веса 1 выглядят следующим образом:

$$h_1^{-1}(\xi,\eta)=-\frac{\sqrt{6}}{2}(\xi^2+\eta^2),\quad h_1^0(\xi,\eta)=i\sqrt{6}\xi\eta,\quad h_1^1(\xi,\eta)=-i\frac{\sqrt{6}}{2}(\xi^2-\eta^2).$$

Поэтому

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)h_1^{-1}(\xi_0,\eta_0)\right\}\Big|_{\xi_0=\xi,\eta_0=\eta}=-2\sqrt{6}J_{-1},$$
$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)h_1^{0}(\xi_0,\eta_0)\right\}\Big|_{\xi_0=\xi,\eta_0=\eta}=2\sqrt{6}J_{0},$$
$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\partial}{\partial\eta_0}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)h_1^{1}(\xi_0,\eta_0)\right\}\Big|_{\xi_0=\xi,\eta_0=\eta}=2\sqrt{6}J_{1},$$

где через J_l обозначены дифференциальные операторы

$$J_{-1}=\frac{1}{2}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right),\quad J_0=\frac{i}{2}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}-\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right),\quad J_1=\frac{i}{2}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi\frac{\partial}{\partial\eta}\right).$$

Между прочим, J_l суть инфинитезимальные операторы однопараметрических групп вращений вокруг координатных осей.

Операторы H_l, которые мы использовали ранее, связаны с инфинитезимальными операторами простыми формулами

$$H_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(J_{-1}+iJ_1),\quad H_0=iJ_0,\quad H_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(J_{-1}-iJ_1).$$

Формула (2.9) теперь принимает вид

$$\frac{(-1)^n\sqrt{3}J_n}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}h_N^k(\xi,\eta)=\sum_j g_{1[N,N]}^{n[j,k]}h_N^j(\xi,\eta). \quad (2.10)$$

§ 3. Вычисление матриц $G^j_{1[N+1,N]}$ и $G^j_{1[N,N]}$

Приведенные в § 1 матрицы $G^j_{1[N+1,N]}$ вытекают из разложения (2.7)

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^j_1(\xi,\eta)h^{(n)}_N(\xi,\eta)=\sum_k g^{j[k,n]}_{1[N+1,N]}h^k_{N+1}(\xi,\eta)$$

и из легко проверяемых формул умножения полиномов $h^j_1(\xi,\eta)$ на полиномы $h^n_N(\xi,\eta)$, которые мы сейчас укажем, используя обозначения (1.21).

Справедливы формулы умножения полиномов $\frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{-1}_1(\xi,\eta)$ на полиномы $h^n_N(\xi,\eta)$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{-1}_1\cdot h^{-n}_N&=\frac{1}{\sqrt2}\bigl(p^{-n}_N\cdot h^{n-1}_{N+1}+p^n_Nh^{n+1}_{N+1}\bigr)\\ \frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{-1}_1\cdot h^{n}_N&=\frac{1}{\sqrt2}\bigl(-p^{n}_N\cdot h^{-n-1}_{N+1}-p^{-n}_Nh^{-n+1}_{N+1}\bigr)\end{aligned}\right\}\quad n\ge2,$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{-1}_1\cdot h^{-1}_N&=\frac{1}{\sqrt2}\bigl(-\sqrt2p^{-1}_N\cdot h^{0}_{N+1}+p^1_Nh^{2}_{N+1}\bigr)\\ \frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{-1}_1\cdot h^{1}_N&=-\frac{1}{\sqrt2}p^1_N\cdot h^{-2}_{N+1}\end{aligned}\right\}\quad n=1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{-1}_1\cdot h^{0}_N=p^0_N\cdot h^{-1}_{N+1}\qquad n=0.$$

Значит, матрица $G^{-1}_{1[N+1,N]}$ имеет две ненулевые диагонали, которые задаются формулами (1.31), (1.32).

Справедливы формулы умножения полиномов $\frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{1}_1(\xi,\eta)$ на полиномы $h^n_N(\xi,\eta)$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{1}_1\cdot h^{-n}_N&=\frac{1}{\sqrt2}\bigl(-p^{n}_N\cdot h^{-n-1}_{N+1}+p^{-n}_Nh^{-n+1}_{N+1}\bigr)\\ \frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{1}_1\cdot h^{n}_N&=\frac{1}{\sqrt2}\bigl(p^{-n}_N\cdot h^{n-1}_{N+1}-p^{n}_Nh^{n+1}_{N+1}\bigr)\end{aligned}\right\}\quad n\ge2,$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{1}_1\cdot h^{-1}_N&=-\frac{1}{\sqrt2}p^{-1}_N\cdot h^{-2}_{N+1}\\ \frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{1}_1\cdot h^{1}_N&=\frac{1}{\sqrt2}\bigl(-\sqrt2p^{-1}_N\cdot h^{0}_{N+1}-p^1_Nh^{2}_{N+1}\bigr)\end{aligned}\right\}\quad n=1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{0}_1\cdot h^{0}_N=p^0_Nh^{1}_{N+1}\qquad n=0.$$

Значит, матрица $G^{1}_{1[N+1,N]}$ имеет двухдиагональный вид, и диагонали задаются формулами (1.33), (1.34).

Справедливы формулы умножения полиномов $\frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{0}_1(\xi,\eta)$ на полиномы $h^n_N(\xi,\eta)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2N+1}}h^{0}_1\cdot h^{N}_N=q^n_Nh^{n}_{N+1}.$$

Тем самым матрица $G^{0}_{1[N+1,N]}$ имеет диагональный вид и ненулевая диагональ задается формулой (1.30).

Переходим к вычислению матриц $G^j_{1[N,N]}$. Оно основано на разложении (2.10):

$$\frac{(-1)^n\sqrt3J_n}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}h^k_N(\xi,\eta)=\sum_j g^{n[j,k]}_{1[N,N]}h^j_N(\xi,\eta).$$

Следующие формулы описывают действие оператора

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}J_{-1}(\xi,\eta)$$

на базисные полиномы (мы используем обозначение (1.16)): при $n \geq 2$

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}J_{-1}(\xi,\eta)\begin{pmatrix} h_N^{-n} \\ h_N^n \end{pmatrix} = r_N^{-n}\begin{pmatrix} h_N^{-n+1} \\ h_N^{n-1} \end{pmatrix} - r_N^n\begin{pmatrix} h_N^{-n-1} \\ h_N^{n+1} \end{pmatrix},$$

при $n = 1$

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}J_{-1}(\xi,\eta)\begin{pmatrix} h_N^{-1} \\ h_N^1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}r_N^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ h_N^0 \end{pmatrix} - r_N^1\begin{pmatrix} h_N^{-2} \\ h_N^2 \end{pmatrix},$$

при $n = 0$

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}J_{-1}(\xi,\eta)h_N^0 = \sqrt{2}r_N^0 h_N^1.$$

Отсюда следует, что ненулевые диагонали матрицы $G^{-1}_{1[N,N]}$ задаются формулой (1.27).

Следующие формулы описывают действие оператора

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}J_1(\xi,\eta)$$

на базисные полиномы: при $n \geq 2$

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}J_1(\xi,\eta)\begin{pmatrix} h_N^{-n} \\ h_N^n \end{pmatrix} = r_N^{-n}\begin{pmatrix} -h_N^{n-1} \\ h_N^{-n+1} \end{pmatrix} + r_N^n\begin{pmatrix} -h_N^{n+1} \\ h_N^{-n-1} \end{pmatrix},$$

при $n = 1$

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}J_1(\xi,\eta)\begin{pmatrix} h_N^{-1} \\ h_N^1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}r_N^{-1}\begin{pmatrix} h_N^0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_N^1\begin{pmatrix} -h_N^2 \\ h_N^{-2} \end{pmatrix},$$

при $n = 0$

$$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}J_1(\xi,\eta) = -\sqrt{2}r_N^0 h_N^{-1}.$$

Следовательно, ненулевые диагонали матрицы $G^1_{1[N,N]}$ задаются формулами (1.30), (1.31).

Так как

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{N(N+1)(2N+1)}}J_0(\xi,\eta)h_N^n = s_N^n h_N^{-n}$$

(s_N^n определено формулой (1.14)), ненулевая диагональ матрицы $G^0_{1[N,N]}$ имеет вид (1.26).

§ 4. Матрицы Клебша — Гордана как канонический базис

Кронекерово произведение двух неприводимых представлений можно реализовывать не только в пространстве биспинорных полиномов, но и в пространстве матриц. Чтобы понять, как нужно задавать представление в пространстве матриц, сопоставим каждому биспинорному полиному матрицу. Для этого нужно в пространстве спинорных полиномов выбрать базис. Если в пространстве спинорных полиномов выбран базис «типа e», то любой биспинорный полином $f(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)$, однородный степени $2N_1$ по ξ_1, η_1 и степени $2N_2$ по ξ_2, η_2, можно записать в виде

$$f(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) = \left(e_{N_1}^{-N_1}(\xi_1,\eta_1), e_{N_1}^{-N_1+1}(\xi_1,\eta_1), \dots, e_{N_1}^{N_1}(\xi_1,\eta_1)\right) A \begin{pmatrix} e_{N_2}^{-N_2}(\xi_2,\eta_2) \\ e_{N_2}^{-N_2+1}(\xi_2,\eta_2) \\ \vdots \\ e_{N_2}^{N_2}(\xi_2,\eta_2) \end{pmatrix}.$$

Если в пространстве спинорных полиномов выбран базис «типа h», то тот же биспинорный полином можно записать в виде

$$f(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2) = \left(h_{N_1}^{-N_1}(\xi_1,\eta_1), h_{N_1}^{-N_1+1}(\xi_1,\eta_1), \dots, h_{N_1}^{N_1}(\xi_1,\eta_1)\right) B \begin{pmatrix} h_{N_1}^{-N_1}(\xi_2,\eta_2) \\ h_{N_2}^{-N_2+1}(\xi_2,\eta_2) \\ \vdots \\ h_{N_2}^{N_2}(\xi_2,\eta_2) \end{pmatrix}.$$

Теперь ясно, что если в пространстве спинорных полиномов задано представление T_g формулой (1.1), то матрицы A в силу (1.2) преобразуются так:

$$T_g : A \to \Omega_{N_1}^{(U)} A \big[\Omega_{N_2}^{(U)}\big]^T,$$

а матрицы B (см. (1.4)) — так:

$$T_g : B \to \Omega_{N_1}^{(0)} B \big[\Omega_{N_2}^{(0)}\big]^T.$$

В силу заданного соответствия между матрицами A и биспинорными полиномами $f(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)$, а также в силу определения представления T_g в пространстве биспинорных полиномов (1.5) и в пространстве матриц A ясно, что матрицы Клебша — Гордана $C^n_{N[N_1,N_2]}$ преобразуются так же, как полиномы $\mu^n_N(\xi_1,\eta_1;\xi_2,\eta_2)$, т. е. образуют канонический базис «типа e» в пространстве матриц, в частности, матрицы $G^n_{N[N_1,N_2]}$, $n=-N,\dots,N$, задают базис неприводимого представления веса N. Аналогично матрицы $G^n_{N[N_1,N_2]}$ образуют в пространстве матриц канонический базис «типа h» и осуществляют разложение представления в пространстве матриц на неприводимые.

В формуле (1.24), которой определяются коэффициенты Клебша — Гордана $g^{n[n_1,n_2]}_{N[N_1,N_2]}$, можно вместо спинорных и биспинорных полиномов использовать базисные векторы других реализаций кронекерова произведения. Использовав реализацию кронекерова произведения в пространстве матриц с матрицами $G^m_{M[K,L]}$ в качестве канонического базиса, получим рекуррентные формулы для матриц Клебша — Гордана. Не будем стремиться к максимальной общности, предпочтем конкретность наших формул. Заменим в (1.24) $h^{n_1}_{N_1}(\xi_1, \eta_1)$ на $G^j_{1[K',K]}$, $h^{n_2}_{N_2}(\xi_2, \eta_2)$ на $G^m_{M[K,L]}$, $\nu^n_N(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)$ на $G^{m'}_{M'[K',L]}$, тогда получим

$$G^{m'}_{M'[K',L]} = \sum_{j,m} g^{m'[j,m]}_{M'[1,M]} G^j_{1[K',K]} G^m_{M[K,L]}$$
$$\equiv (-1)^{M'+M+1} \sqrt{\frac{2M'+1}{3}} \sum_{j,m} g^{j[m',m]}_{1[M',M]} G^j_{1[K',K]} G^m_{M[K,L]}, \qquad (4.1)$$

где $|M' - M| \leq 1$, $|K' - K| \leq 1$.

Аналогично при $|L' - L| \leq 1$

$$G^{m'}_{M'[K,L']} = \sum_{j,m} g^{m'[m,j]}_{M'[M,1]} G^m_{M[K,L]} G^j_{1[L,L']}. \qquad (4.2)$$

Заметим, что в суммах, стоящих в правых частях формул (4.1) и (4.2), многие слагаемые отсутствуют, так как среди коэффициентов Клебша — Гордана много нулевых. Формулы (4.1) и (4.2) позволяют в матрицах Клебша — Гордана $G^m_{M[K,L]}$ изменить на единицу один или два нижних параметра. Поэтому, зная матрицы $G^j_{1[K,L]}$, можно вычислить любую матрицу Клебша — Гордана.

Авторы благодарны Е. В. Мамонтову, который на компьютере вычислил по нашим формулам некоторые матрицы $G^i_{1[K,L]}$ и проверил справедливость связывающих их соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гордиенко В. М.* Матричные элементы вещественных представлений групп $O(3)$ и $SO(3)$ // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 51–63.
2. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
3. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
4. *Годунов С. К., Михайлова Т. Ю.* Представления группы вращений и сферические функции. Новосибирск: Научная книга, 1998.

Статья поступила 4 февраля 2004 г.

Годунов Сергей Константинович, *Гордиенко Валерий Михайлович*
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
godunov@math.nsc.ru, gordienk@math.nsc.ru