Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 512.543

К ВОПРОСУ Д. И. МОЛДАВАНСКОГО О p–ОТДЕЛИМОСТИ ПОДГРУПП СВОБОДНОЙ ГРУППЫ

В. Г. Бардаков

Аннотация: Доказано, что во всякой свободной неабелевой группе существует конечно порожденная изолированная подгруппа, которая не отделима в классе нильпотентных групп. В качестве следствия получен отрицательный ответ на вопрос Д. И. Молдаванского (см. «Коуровскую тетрадь», вопрос 15.60): «Верно ли, что любая конечно порожденная p'-изолированная подгруппа свободной группы отделима в классе конечных p-групп?»

Ключевые слова: свободная группа, нильпотентная группа, p-группа, изолированная подгруппа, отделимая подгруппа.

Следуя А. И. Мальцеву [1], будем говорить, что подгруппа H группы G *финитно отделима от элемента* $g \in G \setminus H$, если существует гомоморфизм φ группы G в некоторую конечную группу, при котором $\varphi(g) \notin \varphi(H)$. Подгруппу, которая отделима от всех не входящих в нее элементов, называют *финитно отделимой.* Рассматривая вместо гомоморфных отображений на конечные группы гомоморфизмы в группы какого-либо другого класса $\mathscr{K}$, придем к определению *отделимости в классе* $\mathscr{K}$. В частности, если $\mathscr{K}$ — класс конечных p-групп, то отделимость в этом классе будем называть *p-отделимостью.* Проблема финитной отделимости подгрупп тесно связана с проблемой вхождения элементов в подгруппу [1].

Из результата М. Холла [2] следует, что любая конечно порожденная подгруппа свободной группы является финитно отделимой.

Теорема Холла перестает быть справедливой, если класс конечных групп заменить классом конечных p-групп. Действительно, рассмотрим в бесконечной циклической группе $G = \langle a \rangle$ подгруппу $H = \langle a^q \rangle$, где q — простое число, отличное от p. Очевидно, $a \notin H$, но при любом гомоморфизме группы G на p-группу образ элемента a попадает в образ подгруппы H, т. е. подгруппа H не является p-отделимой.

В приведенном примере H не является p'-изолированной в G. Напомним, что подгруппа H группы G называется *p'-изолированной* (где p — простое число), если для любого простого числа q, отличного от p, и для произвольного элемента $g \in G$ из включения $g^q \in H$ следует, что $g \in H$. Если же в разобранном выше примере рассматривать только p'-изолированные подгруппы, то каждая из них является p-отделимой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–01118).

Д. И. Молдаванский высказал гипотезу о том, что последнее утверждение справедливо для любой свободной группы.

Вопрос [3, вопрос 15.60]. *Верно ли, что любая конечно порожденная p'-изолированная подгруппа свободной группы отделима в классе конечных p-групп? Легко видеть, что это верно для циклических подгрупп.*

В пользу этой гипотезы говорит и результат Е. Д. Логиновой [4, § 3] о том, что во всякой конечно порожденной нильпотентной группе любая p'-изолированная подгруппа отделима в классе конечных p-групп.

Основным результатом настоящей заметки является

Теорема. *Во всякой свободной неабелевой группе существует конечно порожденная изолированная подгруппа, которая не отделима в классе нильпотентных групп.*

Так как всякая конечная p-группа является нильпотентной [5, с. 162], а всякая изолированная подгруппа является и p'-изолированной для любого простого p, то непосредственно из этой теоремы получается отрицательный ответ на вопрос Д. И. Молдаванского.

Следствие. *Во всякой свободной неабелевой группе для любого простого числа p существует конечно порожденная p'-изолированная подгруппа, которая не отделима в классе конечных p-групп.*

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим свободную неабелеву группу

$$F = \langle x, y, z_i (i \in I)\rangle,$$

где I — некоторое, возможно, пустое множество индексов. Выберем в ней подгруппу

$$H = \langle x[y,x], y, z_j (j \in J)\rangle,$$

где $[y,x] = y^{-1}x^{-1}yx$, а J — некоторое подмножество множества I. Заметим, что H является собственной подгруппой группы F и, в частности, не содержит элемента x. Действительно, если обозначить $a = x[y,x]$, $b = y$, то всякое слово, приведенное в алфавите $A = \left\{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, z_j^{\pm 1}(j \in J)\right\}$, содержащее хотя бы один из символов $a^{\pm 1}$ или $b^{\pm 1}$, является приведенным и как слово в алфавите $X = \left\{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z_i^{\pm 1}(i \in I)\right\}$, а потому содержит либо символ y, либо y^{-1} и, следовательно, не может быть равно x.

Покажем, что подгруппа H не отделима в классе нильпотентных групп. Для этого рассмотрим фактор-группы группы F по членам нижнего центрального ряда $\gamma_n F$, $n \in \mathbb{N}$, где

$$\gamma_1 F = F, \quad \gamma_{i+1} F = [\gamma_i F, F], \quad i = 1, 2, \ldots,$$

и соответствующие гомоморфизмы

$$\varphi_n : F \longrightarrow F/\gamma_n F, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Заметим, что при любом из этих гомоморфизмов образ подгруппы H совпадает с образом подгруппы $\langle x, y, z_j (j \in J)\rangle$. Действительно, это очевидно при $n = 1, 2$, а при $n > 2$ следует из хорошо известного факта [6, теорема 31.2.5] о том, что если нильпотентная группа G по модулю коммутанта $G' = \gamma_2 G$ порождается элементами $a_1, a_2, \ldots, a_r$, то и сама G порождается элементами $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Так как группы $F/\gamma_n F$ являются свободными нильпотентными, подгруппа H

не является отделимой в классе свободных нильпотентных групп, а потому и в классе всех нильпотентных групп.

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать, что подгруппа H изолирована в F. Для простоты доказательства ограничимся случаем, когда порождающие z_i отсутствуют. Общий случай разбирается аналогично. Справедлива

Лемма. *Подгруппа* $H = \langle x[y,x], y\rangle$ *изолирована в свободной группе* $F = \langle x, y\rangle$.

Доказательство. Обозначим $a = x[y,x]$, $b = y$. Будем рассматривать элементы группы F как слова в алфавите $X = \{x^{\pm1}, y^{\pm1}\}$, а элементы подгруппы H либо как слова в алфавите $A = \{a^{\pm1}, b^{\pm1}\}$, либо как слова в алфавите X, подставляя вместо a и b их выражения в алфавите X. Символом «$\equiv$» будем обозначать графическое равенство слов а алфавите X, а символом «$=$» — равенство элементов в группе F.

Предположим, что для некоторого приведенного слова f из F и некоторого ненулевого целого m элемент f^m лежит в H. Не уменьшая общности, будем считать, что $m > 0$. Тогда для некоторых целых чисел $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_k, \beta_k$, отличных от нуля, за исключением, возможно, α_1 и β_k, справедливо равенство

$$f^m = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\alpha_k} b^{\beta_k}. \tag{1}$$

Заметим, что если правая часть этого равенства приведена в алфавите A, то она приведена и в алфавите X. Покажем, что мы можем считать приведенное слово f^m циклически приведенным. Действительно, рассмотрим последнюю букву приведенного слова f^m. Если этой буквой является y, то $\beta_k > 0$. Если, далее, первая буква слова f^m отлична от y^{-1}, то это слово циклически приведено. Если же f^m начинается с y^{-1}, то $\alpha_1 = 0$, а $\beta_1 < 0$, т. е. слово, стоящее в правой части равенства (1), не является циклически приведенным и в алфавите A. Сопряжем обе части равенства (1) элементом $y^{-1} = b^{-1}$. Получим элемент, являющийся m-й степенью элемента из F и лежащий в H. Аналогичным образом разбирается случай, когда f^m оканчивается буквой y^{-1}. Предположим теперь, что f^m оканчивается буквой x. Тогда $\beta_k = 0$, $\alpha_k > 0$. Если f^m начинается с буквы, отличной от x^{-1}, то f^m циклически приведено. Если же f^m начинается с буквы x^{-1}, то $\alpha_1 < 0$. Сопряжем обе части равенства (1) элементом a^{-1}, получим элемент, являющийся m-й степенью элемента группы F и лежащий в H. Если же f^m оканчивается буквой x^{-1}, то рассуждаем аналогично. Повторяем описанную процедуру до тех пор, пока не придем к равенству типа (1), в котором слово f^m уже циклически приведено.

Далее рассматриваем равенство (1), считая слово f^m циклически приведенным. Это означает, что $f^m \equiv f_1 f_2 \dots f_m$, где $f_i \equiv f$, т. е. в произведении $f_i f_{i+1}$ уже нет сокращений, $i = 1, 2, \dots, m-1$. Рассмотрим равенство

$$f_1 f_2 \dots f_m = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\alpha_k} b^{\beta_k}. \tag{2}$$

Если окажется, что f_1 равно начальному подслову слова, стоящего в правой части равенства (2), то это будет означать, что f_1 равно слову в алфавите A, т. е. $f = f_1 \in H$, и требуемое утверждение справедливо.

Покажем, что другие случаи невозможны.

Предположим, что f_1 равно произведению начального подслова, стоящего в правой части равенства (2), и подслова слова a или a^{-1}, т. е. для некоторого показателя α_l, $1 \le l \le k$, имеем $a^{\alpha_l} \equiv a^{\gamma} a_0 a_1 a^{\delta}$, $|\alpha_l| = |\gamma| + |\delta| + 1$, и

$$f_1 \equiv a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots b^{\beta_{l-1}} a^{\gamma} a_0,$$

где $a \equiv a_0 a_1$ при $\alpha_l > 0$ и $a^{-1} \equiv a_0 a_1$ при $\alpha_l < 0$. В зависимости от начальной буквы слова f_1 рассмотрим несколько случаев.

Пусть слово f_1 начинается с буквы x. Так как $f_1 \equiv f_2$, то f_2 также должно начинаться с буквы x, а это возможно в следующих двух случаях:

$$f_1 \equiv a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots b^{\beta_{l-1}} a^{\gamma} x y^{-1} x^{-1} y,\ \gamma \geq 0, \quad a_0 \equiv x y^{-1} x^{-1} y,$$

или

$$f_1 \equiv a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots b^{\beta_{l-1}} a^{\gamma} x^{-1} y^{-1},\ \gamma \leq 0, \quad a_0 \equiv x^{-1} y^{-1}.$$

В первом случае

$$f_2 \equiv x a^{\delta} b^{\beta_l} a^{\alpha_{l+1}} w,$$

где w — некоторое приведенное слово. Так как f_1 начинается с буквы x, то $\alpha_1 > 0$ и

$$f_1 \equiv x y^{-1} x^{-1} y x a^{\alpha_1 - 1} b^{\beta_1} \dots a^{\gamma} x y^{-1} x^{-1} y.$$

Для того чтобы первые три буквы слова f_2 совпадали с первыми тремя буквами слова f_1, необходимо, чтобы $\delta = 0$, $\beta_l = -1$, $\alpha_{l+1} < 0$, но тогда

$$f_2 \equiv x y^{-1} x^{-1} y^{-1} x y x^{-1} a^{\alpha_{l+1}+1} w$$

и, сравнивая четвертые буквы у f_1 и f_2, видим, что $f_1 \not\equiv f_2$, т. е. этот случай невозможен.

Аналогичным образом доказывается, что f_1 не может начинаться и с буквы x^{-1}.

Разберем случай, когда f_1 начинается с буквы y. В этом случае $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 > 0$. Чтобы f_2 также начиналось с y, необходимо, чтобы

$$f_1 \equiv b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\gamma} x y^{-1} x^{-1}, \quad \gamma \geq 0,$$

или

$$f_1 \equiv b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} \dots a^{\gamma} x^{-1} y^{-1} x, \quad \gamma \leq 0,$$

и легко заметить, что в обоих случаях $\beta_1 = 1$. Тогда в первом случае

$$f_2 \equiv y x a^{\delta} b^{\beta_l} a^{\alpha_{l+1}} w, \quad \delta \geq 0,$$

где w — некоторое приведенное слово. Для того чтобы вторая буква у f_1 была такой же, как и у f_2, необходимо, чтобы $\alpha_2 > 0$, т. е.

$$f_1 \equiv y x y^{-1} x^{-1} y x a^{\alpha_2 - 1} b^{\beta_2} \dots a^{\gamma} x y^{-1} x^{-1},$$

а чтобы третья и четвертая буквы у f_2 совпадали соответственно с третьей и четвертой буквами у f_1, необходимо, чтобы $\delta = 0$, $\beta_l = -1$, $\alpha_{l+1} < 0$, т. е.

$$f_2 \equiv y x y^{-1} x^{-1} y^{-1} x y x a^{\alpha_{l+1} - 1} w,$$

но, сравнивая пятые буквы у f_1 и f_2, видим, что $f_1 \not\equiv f_2$. Во втором случае

$$f_2 \equiv y x^{-1} a^{\delta} b^{\beta_l} a^{\alpha_{l+1}} w, \quad \delta \leq 0.$$

Так как вторая буква у f_1 такая же, как и у f_2, то $\alpha_2 < 0$, т. е.

$$f_1 \equiv y x^{-1} y^{-1} x y x^{-1} a^{\alpha_2 + 1} b^{\beta_2} \dots a^{\gamma} x^{-1} y^{-1} x.$$

Так как третья и четвертая буквы у f_2 совпают соответственно с третьей и четвертой буквами у f_1, то $\delta = 0$, $\beta_l = -1$, $\alpha_{l+1} > 0$, т. е.

$$f_2 \equiv y x^{-1} y^{-1} x y^{-1} x^{-1} y x a^{\alpha_{l+1} - 1} w,$$

но, сравнивая пятые буквы у f_1 и f_2, видим, что $f_1 \not\equiv f_2$. Следовательно, f_1 не может начинаться с буквы y.

Аналогичным образом проверяется, что f_1 не может начинаться и с буквы y^{-1}. Таким образом, лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Благодарю М. В. Нещадима за плодотворные беседы и обсуждения настоящей работы. Также благодарю всех участников семинара «Эварист Галуа», прослушавших доказательства и внесших ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Ивановск. пед. ин–та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49–60 (или «Избранные труды». Т. 1: Классическая алгебра. 1976. С. 450–462).

2. *Hall M., Jr.* Coset representations in free groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 677, N 2. P. 421–432.

3. *Нерешенные вопросы* теории групп. Коуровская тетрадь. 15-е изд. Новосибирск: Новосибирск. гос. ун-т, 2002.

4. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407.

5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1996.

6. *Нейман Х.* Многообразия групп. М.: Мир, 1969.

Статья поступила 12 января 2004 г.

Бардаков Валерий Георгиевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
bardakov@math.nsc.ru