Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 514.764.226

О НЕКОТОРЫХ МЕТРИКАХ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ РИЧЧИ КООДНОРОДНОСТИ ДВА НА КОМПЛЕКСНЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

Я. В. Базайкин

Аннотация: Построено семейство четырехмерных гладких римановых орбифолдов нулевой кривизны Риччи коодноротности два, обладающих структурой комплексных линейных расслоений.

Ключевые слова: многообразие Эйнштейна, уравнения Эйнштейна.

1. Введение

В настоящей работе мы изучаем римановы метрики нулевой кривизны Риччи, интерес к которым обоснован их применениями в теоретической физике. *Метрикой Эйнштейна* называется метрика g_{ij}, удовлетворяющая уравнению Эйнштейна

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}, \tag{1}$$

где R_{ij} — тензор Риччи метрики g_{ij}. Случай нулевой кривизны Риччи, которому посвящена наша работа, возникает при $\lambda = 0$. Уравнение Эйнштейна чрезвычайно сложно по своей структуре, и на данный момент нет общих подходов к его решению. Поэтому естественно пытаться искать решения при дополнительном предположении о симметричности метрики. В этом направлении был получен ряд результатов, в частности, на данный момент много известно об однородных метриках и о метриках коодноротности один (см. обзор в [1, 2]). Однако несомненную важность имеет задача построения решений уравнения Эйнштейна с как можно меньшими группами изометрий. Например, одной из нерешенных задач общей теории относительности является задача построения лоренцевой метрики, описывающей гравитационное поле, создаваемое двумя тяготеющими телами. Из физических соображений ясно, что соответствующее решение (1) может иметь самое большее одномерную группу изометрий (т. е. коодноротность три). В настоящий момент в римановом случае известен ряд точных решений уравнения Эйнштейна с малыми группами изометрий. Например, используя главные торические расслоения над произведениями многообразий Кэлера — Эйнштейна, можно построить решения (1) со сколь угодно высокой коодноротностью, однако эти решения аналитически сводятся к метрикам коодноротности один. Было бы интересно исследовать решения с более сложной аналитической структурой (пример метрики аналитически «более сложной» —

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00403) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ–2185.2003.1).

метрика Керра общей теории относительности). Данный вопрос кажется более изученным в размерности четыре: здесь известны точные решения, называемые «мультиинстантонами» и построенные в [3]. Одной из черт этих решений является их топологическая «непрозрачность». Построенные нами метрики в каком-то смысле занимают промежуточное положение: их топологическое строение хорошо контролируемо, но взамен мы получаем две особые точки, окрестности которых диффеоморфны конусам над линзовыми пространствами.

Часть известных метрик коондородности один нулевой кривизны Риччи естественным образом определена на пространствах векторных расслоений. Все такие расслоения с кэлеровой базой и соответствующие метрики были классифицированы в [4] и с несколько других позиций изучались в [5]. В частности, полные метрики нулевой кривизны Риччи существуют на части линейных комплексных расслоений над $\mathbb{C}P^n$, а именно на всех таких расслоениях с классом Чженя, по модулю не превосходящим n (мы принимаем за 1 класс Чженя универсального линейного расслоения). Для нас особую важность будет иметь одна из этих метрик, найденная в [6], и называемая метрикой Эгучи — Хансона:

$$d\tilde{s}^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{1}{r^4}} + r^2\left(1-\frac{1}{r^4}\right)(d\tau - A)^2 + r^2 ds^2. \tag{2}$$

Эта метрика является гладкой и полной римановой метрикой, определенной на кокасательном расслоении T^*S^2 к сфере S^2; здесь ds^2 — стандартная метрика на S^2, dA — кэлерова форма этой метрики, τ, r — угловая и радиальная координаты на комплексных слоях T^*S^2.

В настоящей работе мы строим семейство метрик нулевой кривизны Риччи (6), зависящих от рационального параметра a ($|a| < 1$) и определенных на пространстве M_a комплексного линейного расслоения над двумерной сферой S^2, лежащей в M_a в качестве «нулевого слоя». При этом S^2 несет структуру орбифолда с двумя коническими точками («углы» в этих точках зависят от a и, вообще говоря, различны), а само расслоение не является локально тривиальным. Пространство M_a имеет структуру орбифолда, причем является многообразием всюду, за исключением двух особых точек на $S^2 \subset M_a$, окрестности которых диффеоморфны конусам над линзовыми пространствами. Метрика (6) является гладкой и полной на M_a. При $a = 0$ мы получаем метрику (2) (которую наше решение обобщает ровно так же, как решение Керра обобщает решение Шварцшильда), а при $a \neq 0$ построенная метрика имеет коондородность два.

Автор признателен И. А. Тайманову за полезные обсуждения.

2. Построение решений

В некоторой области U с координатами $(\rho, \theta, \phi, \psi) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ рассмотрим риманову метрику

$$ds^2 = f(d\rho^2 + d\theta^2) + g_{ij}dx^i dx^j, \tag{3}$$

где $i, j = 2, 3$ и функция f и матрица $g = (g_{ij})$ зависят только от ρ и θ. Аналогичный вид метрики (лоренцев вариант) рассматривался в [7]; там же посчитан тензор Риччи для такой метрики. Условие $R_{ij} = 0$ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sqrt{\det g}\,\frac{\partial g}{\partial\rho}g^{-1}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sqrt{\det g}\,\frac{\partial g}{\partial\theta}g^{-1}\right) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial(\ln f)}{\partial\rho}\frac{\partial(\ln\det g)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\ln f)}{\partial\theta}\frac{\partial(\ln\det g)}{\partial\rho}=2\frac{\partial^2(\ln\det g)}{\partial\rho\partial\theta}+\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial g}{\partial\rho}g^{-1}\frac{\partial g}{\partial\theta}g^{-1}\right),$$

$$\frac{\partial(\ln f)}{\partial\rho}\frac{\partial(\ln\det g)}{\partial\rho}-\frac{\partial(\ln f)}{\partial\theta}\frac{\partial(\ln\det g)}{\partial\theta}=\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)(\ln\det g)\qquad(5)$$

$$+\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\frac{\partial g}{\partial\rho}g^{-1}\frac{\partial g}{\partial\rho}g^{-1}-\frac{\partial g}{\partial\theta}g^{-1}\frac{\partial g}{\partial\theta}g^{-1}\right).$$

Видно, что основным уравнением является уравнение (4) на матрицу g; после нахождения g функция f находится из (5) простым интегрированием. Уравнение (4) в лоренцевом случае также исследовалось в [8, 9], где для (4) была найдена L–A пара и развит солитонный подход. Будем считать переменные ϕ, ψ периодическими и определенными на некотором двумерном торе; этот тор очевидным образом действует изометриями на пространстве, на котором определена метрика ds^2.

При исследовании системы уравнений (4), (5) нам удалось найти следующее решение:

$$f=b\,\mathrm{ch}\,\rho-a\cos\theta,$$

$$g=\frac{1}{f}\left[\mathrm{sh}^2\rho\begin{pmatrix}\cos^2\theta & b\cos\theta\\ b\cos\theta & b^2\end{pmatrix}+\sin^2\theta\begin{pmatrix}\mathrm{ch}^2\rho & a\,\mathrm{ch}\,\rho\\ a\,\mathrm{ch}\,\rho & a^2\end{pmatrix}\right],$$

где a и b — произвольные вещественные параметры. Таким образом, мы получаем метрику нулевой кривизны Риччи вида

$$ds^2=(\mathrm{ch}\,\rho-a\cos\theta)\left(d\rho^2+d\theta^2\right)+\frac{\mathrm{sh}^2\rho}{\mathrm{ch}\,\rho-a\cos\theta}\left(d\psi+\cos\theta d\phi\right)^2$$
$$+\frac{\sin^2\theta}{\mathrm{ch}\,\rho-a\cos\theta}\left(ad\psi+\mathrm{ch}\,\rho d\phi\right)^2\qquad(6)$$

(мы положили $b=1$ для простоты; случай произвольного b сводится к общему гомотетией). Для анализа полученной метрики иногда удобно перейти в «геометрическую» систему координат. А именно, введем координату r соотношением

$$r^2=\mathrm{ch}\,\rho.$$

В координатах (r,θ,ϕ,ψ) метрика (6) принимает вид

$$ds^2=(r^2-a\cos\theta)\left(\frac{4r^2dr^2}{r^4-1}+d\theta^2\right)+\frac{r^4-1}{r^2-a\cos\theta}\left(d\psi+\cos\theta d\phi\right)^2$$
$$+\frac{r^4\sin^2\theta}{r^2-a\cos\theta}\left(\frac{a}{r^2}d\psi+d\phi\right)^2.\qquad(6')$$

Для исследования топологии пространства, на котором определена метрика (6), нам потребуются некоторые приготовления. Пусть

$$S^3=\{(z_1,z_2)\mid |z_1|^2+|z_2|^2=1\}$$

— трехмерная сфера в $\mathbb{C}^2$. Возьмем произвольную пару взаимно простых чисел k, l и обозначим через $\omega=e^{2\pi i\frac{1}{k+l}}$ образующий группы $\mathbb{Z}_{k+l}$ корней из единицы степени $k+l$. Рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}_{k+l}$ на S^3:

$$\omega\cdot(z_1,z_2)=(\omega^k z_1,\omega^l z_2).$$

Это действие свободно, и его фактор-пространством является линзовое пространство $L(-1, k+l)$. Теперь рассмотрим следующее действие окружности S^1 на S^3:

$$z \in S^1 : (z_1, z_2) \mapsto (z^k z_1, z^l z_2).$$

Это действие не является свободным, и его фактор-пространством является двумерный орбифолд $S^2(k,l)$, топологически гомеоморфный сфере, но имеющий в полюсах две особые конусные точки с «углами» $2\pi/k$ и $2\pi/l$. Очевидно, что орбиты действия S^1 содержат орбиты действия $\mathbb{Z}_{k+l}$, поэтому мы получаем естественную проекцию

$$p : L(-1, k+l) \to S^2(k,l).$$

По аналогии с тем, как универсальное комплексное линейное расслоение над $\mathbb{C}P^1 = S^2$ строится по расслоению Хопфа S^3 над S^2, мы определим пространство $M_{k,l}$ как цилиндр отображения p, т. е. надо рассмотреть цилиндр над $L(-1, k+l)$ и на одном основании затянуть в точки орбиты действия S^1. Пространство $M_{k,l}$ имеет структуру гладкого четырехмерного орбифолда и естественным образом расслаивается над $S^2(k,l)$ с одномерными комплексными слоями, хотя это расслоение уже не будет, вообще говоря, локально тривиальным. Очевидно, что $M_{k,l}$ является гладким многообразием всюду, за исключением, возможно, двух полюсов в $S^2(k,l) \subset M_{k,l}$.

Теорема. (i) *Метрика* (6) *является гладкой полной римановой метрикой нулевой кривизны Риччи коодноpодности два на* $M_a = M_{k,l}$ *при* $-1 < a = \frac{p}{q} < 1$, $a \neq 0$, *где* p, q *— пара взаимно простых целых чисел,* $q > 0$ *и*

$$k = \begin{cases} q-p, \ l = q+p, & \text{если } q \pm p \text{ нечетно,} \\ \frac{q-p}{2}, \ l = \frac{q+p}{2}, & \text{если } q \pm p \text{ четно.} \end{cases}$$

(ii) *При* $a = 0$ *метрика* (6) *является полной римановой метрикой нулевой кривизны Риччи коодноpодности один на* $M_{1,1}$ *и совпадает с метрикой Эгучи — Хансона* (2).

Доказательство. По условию пара чисел k и l такова, что $a = \frac{l-k}{l+k}$ и числа k, l взаимно просты. Рассмотрим на S^3 систему координат (θ, α, β):

$$z_1 = \cos\frac{\theta}{2} e^{2\pi i \alpha}, \quad z_2 = \sin\frac{\theta}{2} e^{2\pi i \beta},$$

где $0 \leq \theta \leq \pi$, а $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$. При факторизации S^3 по действию $\mathbb{Z}_{k+l}$ к решетке $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, порожденной векторами $e_1 = \frac{\partial}{\partial\beta}$, $e_2 = \frac{\partial}{\partial\alpha}$, добавляется элемент

$$e_3 = \frac{k}{k+l}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{l}{k+l}\frac{\partial}{\partial\beta}.$$

Тем самым координаты (θ, α, β) задают линзовое пространство $L(-1, k+l)$, если $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2/\Gamma$, где

$$\Gamma = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle.$$

На $M_{k,l}$ добавим радиальную координату r — «расстояние до дна» цилиндра вдоль его образующей плюс один. Таким образом, $r \geq 1$, причем $r = 1$ в точности для точек из $S^2(k,l)$. Мы получили систему координат $(r, \theta, \alpha, \beta)$ на $M_{k,l}$. Рассмотрим теперь координаты (r, θ, ψ, ϕ), связанные с предыдущими соотношениями

$$\alpha = \frac{\psi + \phi}{2}, \quad \beta = \frac{\psi - \phi}{2}.$$

В новых координатах порождающие решетки Γ примут вид

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial\phi}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial\psi} + \frac{\partial}{\partial\phi}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial\psi} + \frac{k-l}{k+l}\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

Вернемся теперь к метрике (6). Координаты (r, θ, ϕ, ψ) мы считаем определенными в области $U \times \mathbb{R}^2/\Gamma$, где

$$U = \{(r,\theta) \mid 1 < r < \infty,\ 0 < \theta < \pi\}.$$

Очевидно, что метрика будет риманова (т. е. с сигнатурой $++++$) и регулярна в $U \times \mathbb{R}^2/\Gamma$, если

$$-1 < a < 1.$$

Вырождение метрики на краю области определения влечет «склейки» точек края между собой и задает топологию полученного риманова пространства, априори с особенностями. Множество точек вырождения метрики очевидным образом распадается на три компоненты, определяемые уравнениями $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $r = 1$ соответственно. На каждой из этих трех компонент возникает одномерное касательное распределение, вдоль которого метрика (6) равна нулю. А именно, мы получаем одномерные распределения

$$V_1 = \{dr = d\theta = d\psi + d\phi = 0\},$$

$$V_2 = \{dr = d\theta = d\psi - d\phi = 0\},$$

$$V_3 = \{dr = d\theta = a d\psi + d\phi = 0\}$$

для компонент $\theta = 0$, $\theta = \pi$ и $r = 1$ соответственно. Отметим, что на пересечении компонент точек вырождения ($\{\theta = 0, r = 1\}$ и $\{\theta = \pi, r = 1\}$) определены по два линейно независимых распределения V_1, V_3 и V_2, V_3. Интегральные кривые распределений V_i, являющиеся линейными обмотками тора $\mathbb{R}^2/\Gamma$, имеют нулевую длину дуги, следовательно, для гладкого продолжения метрики на край $\partial U \times \mathbb{R}^2/\Gamma$ необходимо затянуть в точку каждую интегральную кривую распределений V_i.

Фиксируем $r > 1$. Тогда при $\theta = 0$ ($\theta = \pi$) распределение V_1 (V_2) порождено вектором e_1 (e_2). Это значит, что в произведении $(0, \pi) \times \mathbb{R}^2/\langle e_1, e_2\rangle$ надо на левом краю затянуть параллели, а на правом — меридианы тора. Таким образом получается сфера S^3. Если теперь учесть элемент e_3 решетки Γ, то мы получим, что при фиксированном $r > 1$ пространство, определяемое метрикой (6), диффеоморфно линзе $L(-1, k+l)$.

Теперь посмотрим, что происходит на нижнем основании $r = 1$. Здесь надо затянуть в точку каждую интегральную кривую распределения V_3 на S^3. Легко видеть, что распределение V_3 порождено вектором e_3, поэтому интегральной кривой V_3 является обмотка $\mathbb{R}e_3$, т. е. после затягивания кривых на нижнем основании мы получаем $S^2(k, l)$. Таким образом, метрика (6) определена на $M_{k,l}$. Выясним степень ее гладкости, по пути прояснив строение $M_{k,l}$ в двух «особых» точках $\theta = 0$, $r = 1$ и $\theta = \pi$, $r = 1$.

Во-первых, для исследования гладкости метрики (6) можно сократить ее на гладкий множитель f и рассматривать метрику

$$d\tilde{s}^2 = \frac{4r^2 dr^2}{r^4 - 1} + d\theta^2 + \frac{r^4 - 1}{(r^2 - a\cos\theta)^2}(d\psi + \cos\theta d\phi)^2 + \frac{r^4 \sin^2\theta}{(r^2 - a\cos\theta)^2}\left(\frac{a}{r^2}d\psi + d\phi\right)^2.$$

На $M_{k,l}$ рассмотрим два двумерных взаимно ортогональных распределения D_1 и D_2:

$$D_1 = \{dr = 0,\ d\psi + \cos\theta d\phi = 0\}, \quad D_2 = \left\{d\theta = 0,\ \frac{a}{r^2}d\psi + d\phi = 0\right\}.$$

Эти распределения гладкие на $M_{k,l}$ и невырожденны. Значит, достаточно доказать гладкость ограничения метрики $d\tilde{s}^2$ на D_1 и D_2 в окрестности множеств $\theta = 0,\ \pi; r = 1$. Несложно посчитать, что

$$d\tilde{s}^2|_{D_1} = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, \quad d\tilde{s}^2|_{D_2} = d\rho^2 + \mathrm{th}^2\,\rho d\psi^2.$$

В окрестности точек $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ рассмотрим отображение

$$u_1 : (r, \theta, \psi, \phi) \mapsto (\theta, \phi),$$

а в окрестности точек $r = 1$ — отображение

$$u_2 : (r, \theta, \psi, \phi) \mapsto (\rho, \psi).$$

Видно, что ограничения дифференциалов du_1 и du_2 на D_1 и D_2 соответственно являются линейными изоморфизмами. Таким образом, метрика $d\tilde{s}^2|_{D_1}$ будет поднятием при помощи u_1 метрики $d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, определенной на плоскости с полярными координатами θ, ϕ. Аналогично метрика $d\tilde{s}^2|_{D_2}$ — поднятие при помощи u_2 метрики $d\rho^2 + \mathrm{th}^2\,\rho d\psi^2$. Эти две метрики являются гладкими в точности тогда, когда полные периоды переменных ϕ, ψ равны 2π. Если $r > 1$, $\theta = 0$ (или $\theta = \pi$), то происходит затягивание в точку торических кривых $\mathbb{R}e_1$ (или $\mathbb{R}e_2$). Нетрудно убедиться, что периодичность этих кривых задается элементом e_1 (или e_2) решетки Γ, что соответствует полному периоду 2π переменной ϕ. Совершенно аналогично при $r = 1$, $\theta \neq 0, \pi$ происходит затягивание торических кривых $\mathbb{R}e_3$, на которых периодичность задается вектором e_3 и переменная ψ имеет полный период 2π. Далее, в точке $\theta = 0$, $r = 1$ происходит одновременное затягивание пары кривых $\mathbb{R}e_1$ и $\mathbb{R}e_3$. После затягивания окрестность этой точки становится диффеоморфной произведению двух двумерных дисков (например, с полярными системами координат (ρ, ψ) и (θ, ϕ)) с гладкой метрикой, поднимаемой, как и выше, при помощи u_1 и u_2. Однако надо еще факторизовать эту окрестность по действию элемента $e_2 \in \Gamma$. Поскольку

$$e_2 \equiv -\frac{1}{k}e_1 + \frac{1}{k}e_3 (\operatorname{mod} e_1, e_3),$$

мы окончательно получаем, что окрестность точки $\theta = 0$, $r = 1$ в $M_{k,l}$ диффеоморфна конусу над линзовым пространством $L(-1, k)$, причем метрика на конусе гладкая в смысле гладкости метрики на орбифолде, т. е. получается факторизацией гладкой метрики на $\mathbb{R}^4$ по дискретной группе изометрий, порожденной элементом e_2. Совершенно аналогично в точке $\theta = \pi$, $r = 1$ имеем

$$e_1 \equiv -\frac{1}{l}e_2 + \frac{1}{l}e_3 (\operatorname{mod} e_2, e_3),$$

и, следовательно, окрестность этой точки в $M_{k,l}$ диффеоморфна конусу над линзовым пространством $L(-1, l)$ с гладкой метрикой.

Докажем теперь, что кооднородность метрики (6) действительно равна двум при $a \neq 0$. Поскольку этот вопрос носит локальный характер, рассмотрим метрику ds^2, определенную на области $U \times \mathbb{R}^2$ с координатами $(\rho, \theta, \psi, \phi)$. Для любых значений ψ_0, ϕ_0 переменных ψ, ϕ поверхность M_{ψ_0,ϕ_0} в M_a, определяемая уравнениями $\psi = \psi_0$, $\phi = \phi_0$, является вполне геодезической поверхностью с координатами (ρ, θ) как множество неподвижных точек изометрии

$$\sigma_{\psi_0,\phi_0} : (\rho, \theta, \psi, \phi) \mapsto (\rho, \theta, 2\psi_0 - \psi, 2\phi_0 - \phi).$$

Допустим, что у нас есть поле Киллинга K на $U \times \mathbb{R}^2$. Тогда $\operatorname{Ad} \sigma_{\psi_0,\phi_0}(K)$ тоже поле Киллинга. Рассмотрим усреднение поля K по σ:

$$\overline{K} = \frac{1}{2}(K + \operatorname{Ad} \sigma_{\psi_0,\phi_0}(K)).$$

Поле $\overline{K}$ касательно к M_{ψ_0,ϕ_0}, является полем Киллинга на M_a и, следовательно, полем Киллинга на M_{ψ_0,ϕ_0}. Однако метрика на поверхности M_{ψ_0,ϕ_0} не зависит от ψ_0, ϕ_0 и имеет вид

$$d\bar{s}^2 = (\operatorname{ch} \rho - a \cos \theta)(d\rho^2 + d\theta^2).$$

Непосредственно проверяется, что метрика $d\bar{s}^2$ не имеет нетривиальных киллинговых векторных полей при $a \neq 0$, поэтому $\overline{K} = 0$ на M_{ψ_0,ϕ_0}. Но это значит, что поле K ортогонально к поверхности M_{ψ_0,ϕ_0}. Поскольку ψ_0 и ϕ_0 выбраны произвольно, получаем, что поле K всюду ортогонально к полям $\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta}$. Но это значит, что любое поле Киллинга K касательно к орбитам действия тора T^2. Итак, коoднородность M_a равна $\dim M_a / T^2 = 2$. Теорема доказана.

3. Различные замечания

1. Мы показали, что в двух особых точках пространство $M_{k,l}$ локально устроено как конус над линзовыми пространствами $L(-1, k)$ и $L(-1, l)$ соответственно. Значит, при $q = p + 1$ окрестность первой точки становится многообразием, а при $q = -p + 1$ то же происходит с окрестностью второй точки. Однако $M_{k,l}$ является многообразием в обеих особых точках лишь при $a = 0$.

2. Если параметр a иррационален, то распределение V_3 представляет собой плотную обмотку тора $\mathbb{R}^2 / \langle e_1, e_2 \rangle$. Значит, при $r = 1$ надо затянуть в точку каждый такой тор, т. е. вместо $S^2(k, l)$ в M_a будет лежать отрезок, окрестность каждой точки которого в M_a гомеоморфна произведению конуса над 2-тором на отрезок. Таким образом, в этом случае M_a не является орбифолдом, и нельзя говорить о гладкости или полноте метрики на M_a. В предельном случае $a = \pm 1$ непосредственным вычислением можно установить, что $R_{ijkl} = 0$, т. е. ds^2 является плоской метрикой.

3. Форма (3) метрики обеспечивает распадение уравнений Эйнштейна на две группы уравнений (4) и (5), причем (4) — это уравнение только на матрицу g, а (5) элементарно интегрируется при известной g. Это подсказывает возможный путь для обобщения на более высокие размерности: в переменных $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m)$ рассмотрим метрику вида

$$ds^2 = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + g_{ij} dy^i dy^j,$$

где матрицы $h_{\alpha\beta}$ и g_{ij} зависят только от $(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда задача состоит в нахождении такого класса метрик $h_{\alpha\beta}$, чтобы уравнение Эйнштейна (1) распалось на две группы: на матричное нелинейное уравнение, содержащее только неизвестные g_{ij}, и элементарно интегрируемые уравнения при известных g_{ij}.

При этом мы можем считать, что переменные $(y_1, \dots, y_n)$ циклические и определены на некотором m-торе T^m, действующем изометриями на пространстве, на котором определена метрика ds^2. Тем самым получаем, что ds^2 определена на некотором торическом многообразии (или орбифолде) и имеет кооднородность m. Возможно, что наиболее интересные примеры следует ожидать при $m = n$.

4. Безусловный интерес представляет построение решений вида (3) для уравнения (1) при $\lambda \neq 0$, особенно при $\lambda > 0$. В последнем случае по теореме Майерса решение (при условии его гладкости и полноты) определено на компактном многообразии (орбифолде), поэтому для области определения переменных (ρ, θ) появляется дополнительный «кусок» границы, что ужесточает требования регулярности на краю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
2. *Wang M.* Einstein metrics from symmetry and bundle constructions // Surveys in differential geometry. VI: Essays on Einstein manifolds. Boston, MA: Int. Press, 1999. P. 287–325.
3. *Gibbons G. W., Hawking S. W.* Gravitational multi-instantons // Phys. Lett. B. 1978. V. 78, N 4. P. 430–432.
4. *Bérard-Bergery L.* Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein // Publications de l'Institut E. Cartan. 1982. N 4. P. 1–60.
5. *Page D., Pope C.* Inhomogeneous Einstein metrics on complex line bundles // Classical and Quantum Gravity. 1987. V. 4. P. 213–225.
6. *Eguchi T., Hanson A. J.* Asymptotically flat self-dual solutions to euclidean gravity // Phys. Lett. B. 1978. V. 74, N 4. P. 249–251.
7. *Белинский В. А., Халатников И. М.* Общее решение уравнений гравитации с физической особенностью // ЖЭТФ. 1969. Т. 577, № 6. С. 2163–2175.
8. *Белинский В. А., Захаров В. Е.* Интегрирование уравнений Эйнштейна методом обратной задачи рассеяния и вычисление точных солитонных решений // ЖЭТФ. 1978. Т. 75, № 6. С. 1953–1971.
9. *Белинский В. А., Захаров В. Е.* Стационарные гравитационные солитоны с аксиальной симметрией // ЖЭТФ. 1979. Т. 77, № 1. С. 3–19.

Статья поступила 5 ноября 2003 г.

Базайкин Ярослав Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
bazaikin@math.nsc.ru