Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2004. Том 45, № 3

УДК 512.554.38

НИЛЬПОТЕНТНЫЕ СВОЙСТВА АЛГЕБРЫ ЛЕЙБНИЦА $M_n(C)_D$

Ш. А. Аюпов, Б. А. Омиров

Аннотация: Изучены нильпотентные свойства алгебр Лейбница, построенных с помощью D-отображений на алгебре комплексных квадратных матриц $M_n(C)$. В частности, получен критерий нильпотентности таких алгебр в терминах свойств D-отображения. Доказано также, что алгебры Лейбница рассматриваемого типа не могут быть простыми.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, ассоциативная алгебра, D-отображение, нильпотентность, простая алгебра Лейбница.

Работа посвящена изучению свойств нильпотентности алгебр Лейбница, построенных с помощью ассоциативной алгебры и некоторого линейного преобразования этой алгебры. В связи с тем, что алгебры Лейбница являются «некоммутативными» обобщениями алгебр Ли, очень важно найти хорошую связь алгебр Лейбница с ассоциативными алгебрами. В данной работе рассматривается характеризация свойств нильпотентности алгебры Лейбница, полученной с помощью алгебры квадратных матриц и некоторого D-отображения в терминах свойств D-отображения.

Определение 1. Алгебра L над полем F называется *алгеброй Лейбница*, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y], \tag{1}$$

где $[\,,\,]$ — умножение в L.

Для произвольной алгебры L определим последовательность

$$L^{\langle 1\rangle} = L, \quad L^{\langle n+1\rangle} = [L^{\langle n\rangle}, L].$$

Определение 2. Алгебра L называется *нильпотентной*, если существует $s \in N$ такое, что $L^{\langle s\rangle} = 0$.

В работах Лоде [1, 2] предложена следующая конструкция построения нелиевых алгебр Лейбница.

Определение 3. Пусть A — ассоциативная алгебра над F и $D : A \to A$ — линейное преобразование, удовлетворяющее условию

$$D(a(Db)) = D(a)D(b) = D((Da)b) \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Академии наук республики Узбекистан (грант N 54–02) и проекта DFG 436 USB 113/4.

для любых $a, b \in A$. Линейное отображение D, удовлетворяющее равенствам (2), будем называть *D-отображением.*

Нетрудно проверить, что пространство A с умножением $[a, b]_D = a(Db) - D(b)a$ образует алгебру Лейбница, которую будем обозначать через A_D.

Далее A будет обозначать конечномерную ассоциативную алгебру.

Из равенств (2) легко видеть, что $D(A)$ является подалгеброй алгебры A и элемент $D(1)$ лежит в коммутативном центре алгебры $D(A)$, т. е. $D(1) \in Z(D(A))$.

Предложение 1. *Пусть A — алгебра с единицей. Тогда если $x \in D(A)$, то $D(x) = D(1)x$, и в случае, когда $D(A) = A$, отображение D имеет вид $D(x) = D(1)x$.*

Доказательство. Пусть $x \in D(A)$ и $D(y) = x$, тогда $D(x) = D(1D(y)) = D(D(1)y) = D(1)D(y) = D(1)x$ и $D(x) = D(D(y)1) = D(yD(1)) = D(y)D(1) = xD(1)$. Предложение доказано.

Замечание 1. Пусть A — центральная алгебра, тогда условие $D(A) = A$ влечет, что $D(x) = \lambda x$ для любого $x \in D(A)$ и алгебра A_D в этом случае является алгеброй Ли. Поэтому если A — центральная алгебра, то нелиевы алгебры Лейбница появляются при $D(A) \neq A$, т. е. существует элемент x такой, что $D(x) = 0$.

Пусть R — обратимый элемент алгебры A. Введем автоморфизмы S, T алгебры A следующим образом:

$$S(x) := RxR^{-1}, \quad T(x) := R^{-1}xR.$$

Предложение 2. *Для любого D-отображения D оператор $Q := TDS$ также является D-отображением.*

Доказательство выполняется непосредственной проверкой равенств (2).

Замечание 2. Если $A = M_n(C)$, то $Q(1) = R^{-1}D(1)R$. Это позволяет полагать, что $D(1)$ имеет жорданову форму матрицы.

Идея доказательства следующего предложения принадлежит Д. С. Потапову.

Предложение 3. *Пусть $D(1)$ имеет жорданову форму матрицы. Тогда каждая ее жорданова клетка имеет порядок не более двух и в каждой клетке второго порядка на диагоналях стоят нули.*

Для доказательства предложения приведем ряд вспомогательных лемм.

Будем считать, что $D(1)$ — жорданова матрица, состоящая из m жордановых клеток. Обозначим через n_s номер первой строки в s-й жордановой клетке. Положим $n_{m+1} = n + 1$.

Введем матрицы $J_k^s = \left\{ j_{pq}^{ks} \right\}$, где $1 \leq p, \ q \leq n$, $1 \leq s \leq m$, $0 \leq k$, следующим образом:

$$j_{pq}^{ks} = \begin{cases} 1 & \text{при } q - p = k, \ n_s \leq p, \ q \leq n_{s+1} - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т. е. при $k \leq n_{s+1} - n_s - 1$

$$J_k^s = \sum_{p=n_s}^{n_{s+1}-k-1} e_{p,p+k}, \tag{3}$$

где $e_{p,k}$ — матричные единицы. Если $k > n_{s+1} - n_s - 1$, то J_k^s — нулевая матрица. Тогда $D(1)$ примет вид

$$D(1) = \sum_{s=1}^{m} \bigl(\lambda_s J_0^s + J_1^s\bigr). \tag{4}$$

Пусть L — множество матриц, у которых на месте жордановых клеток матрицы $D(1)$ стоят нули.

Лемма 1. *Если $D(1)$ — жорданова матрица вида (4), то D-отображение D представляется в виде*

$$D(x) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{k \geq 0} \alpha_k^s(x) J_k^s + S(x) \tag{5}$$

для любого $x \in M_n(C)$, где α_k^s — линейный функционал, $S(x)$ — некоторое линейное отображение, $S : M_n(C) \to L$, причем

$$\alpha_0^s(1) = \lambda_s, \quad a_1^s(1) = 1, \quad a_k^s(1) = 0 \text{ при } 2 \leq k, \quad S(1) = 0.$$

Доказательство. Так как $D(1) \in Z(D(M_n(C)))$, доказательство вытекает из [3].

Следующая лемма перечисляет некоторые свойства матриц J_k^s.

Лемма 2. *Пусть $n_s \leq p$, $v \leq n_{s+1} - 1$. Тогда*
1) $J_k^t e_{pq} = e_{uv} J_k^t = 0$ *для любых* $1 \leq q, u \leq n$ *и* $t \neq s$,
2) $J_k^s e_{pq} = 0$, *если* $p < n_s + k$ *и* $e_{uv} J_k^s = 0$, *если* $v \geq n_{s+1} - k$,
3) $J_k^s e_{pq} = e_{p-k,q}$, *если* $p \geq n_s + k$ *и* $e_{uv} J_k^s = e_{u,v+k}$, *если* $v < n_{s+1} - k$,
4) $J_k^s J_l^t = 0$, *если* $s \neq t$ *для любых* $k, l \geq 0$,
5) $J_k^s J_l^s = J_{k+l}^s$,
6) *ненулевые матрицы* J_k^s *линейно независимы*,
7) $J_k^s L \subseteq L$, $L J_k^s \subseteq L$.

Доказательство. Справедливость леммы проверяется непосредственным вычислением.

Запишем равенства $D(D(1)x) = D(1)D(x)$, используя представление (5):

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{k \geq 0} \alpha_k^s\bigl(D(1)x\bigr) J_k^s + S\bigl(D(1)x\bigr) = \sum_{s=1}^{m} \bigl(\lambda_s J_0^s + J_1^s\bigr) \cdot \left(\sum_{t=1}^{m} \sum_{k \geq 0} \alpha_k^t(x) J_k^t + S(x) \right).$$

После умножения сумм в правой части этого равенства с помощью утверждения 2 получим

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{k \geq 0} \alpha_k^s\bigl(D(1)x\bigr) J_k^s + S\bigl(D(1)x\bigr)$$
$$= \sum_{s=1}^{m} \sum_{k \geq 0} \bigl(\lambda_s \alpha_k^s(x) + \alpha_{k-1}^s(x)\bigr) J_k^s + \sum_{s=1}^{m} \bigl(\lambda_s J_0^s + J_1^s\bigr) \cdot S(x).$$

В этом равенстве полагаем, что $\alpha_{-1}^s \equiv 0$. Так как вторые слагаемые в каждой части равенства — элементы пространства L, имеем

$$\sum_{s=1}^{m} \sum_{k \geq 0} \alpha_k^s(D(1)x) J_k^s = \sum_{s=1}^{m} \sum_{k \geq 0} \bigl(\lambda_s \alpha_k^s(x) + \alpha_{k-1}^s(x)\bigr) J_k^s.$$

Поскольку ненулевые матрицы J_k^s линейно независимы, можно приравнять коэффициенты при ненулевых матрицах J_k^s, т. е.

$$\begin{gathered}\alpha_0^s(D(1)x) = \lambda_s \alpha_0^s(x),\\ \alpha_k^s(D(1)x) = \lambda_s \alpha_k^s(x) + \alpha_{k-1}^s(x) \quad \text{при } J_k^s \neq 0,\ k \geq 1.\end{gathered} \tag{6}$$

Записывая равенство $D(xD(1)) = D(x)D(1)$ с помощью представления (5) и применяя те же рассуждения, получим аналогичные равенства:

$$\begin{gathered}\alpha_0^s(xD(1)) = \lambda_s \alpha_0^s(x),\\ \alpha_k^s(xD(1)) = \lambda_s \alpha_k^s(x) + \alpha_{k-1}^s(x) \quad \text{при } J_k^s \neq 0,\ k \geq 1.\end{gathered} \tag{7}$$

Если $n_r \leq p \leq n_{r+1} - 1$ $(1 \leq r \leq m)$, то из равенства (4) и утверждения 2 следует, что

$$D(1)e_{pq} = \sum_{l=1}^{m} \big(\lambda_l J_0^l e_{pq} + J_1^l e_{pq}\big) = \lambda_r J_0^r e_{pq} + J_1^r e_{pq} = \lambda_r e_{pq} + J_1^r e_{pq}.$$

Подставляя в равенства (6) вместо x матрицу e_{pq} $(n_r \leq p \leq n_{r+1} - 1,\ 1 \leq r,$ $s \leq m)$, имеем

$$\begin{gathered}\lambda_r \alpha_0^s(e_{pq}) + \alpha_0^s\big(J_1^r e_{pq}\big) = \lambda_s \alpha_0^s(e_{pq}),\\ \lambda_r \alpha_k^s(e_{pq}) + \alpha_k^s\big(J_1^r e_{pq}\big) = \lambda_s \alpha_k^s(e_{pq}) + \alpha_{k-1}^s(e_{pq}) \quad \text{при } J_k^s \neq 0,\ k \geq 1.\end{gathered} \tag{8}$$

Если же $n_r \leq q \leq n_{r+1} - 1$ $(1 \leq r \leq m)$, то из равенства (4) и утверждения 2 вытекает, что

$$e_{pq}D(1) = \sum_{l=1}^{m} \big(e_{pq}\lambda_l J_0^l + e_{pq} J_1^l\big) = \lambda_r e_{pq} J_0^r + e_{pq} J_1^r = \lambda_r e_{pq} + e_{pq} J_1^r.$$

Подставляя в равенства (7) вместо x матрицу e_{pq} $(n_r \leq q \leq n_{r+1} - 1,\ 1 \leq r,$ $s \leq m)$, получим

$$\begin{gathered}\lambda_r \alpha_0^s(e_{pq}) + \alpha_0^s\big(e_{pq} J_1^r\big) = \lambda_s \alpha_0^s(e_{pq}),\\ \lambda_r \alpha_k^s(e_{pq}) + \alpha_k^s\big(e_{pq} J_1^r\big) = \lambda_s \alpha_k^s(e_{pq}) + \alpha_{k-1}^s(e_{pq}) \quad \text{при } J_k^s \neq 0,\ k \geq 1.\end{gathered} \tag{9}$$

Зафиксируем число s $(1 \leq s \leq m)$. Пусть линейный функционал α_0^s имеет следующий вид:

$$\alpha_0^s(x) = \sum_{u,v=1}^{n} \alpha_{uv} x_{uv}, \tag{10}$$

где $\alpha_0^s(e_{uv}) = \alpha_{u,v}$ и $x = \{x_{uv}\} \in M_n(C)$.

Лемма 3. *Пусть r — произвольное число $(1 \leq r \leq m)$. Тогда*

(а) *если среди чисел $\alpha_{u,v}$, где $n_r \leq u \leq n_{r+1}-1$ и $1 \leq v \leq n$, есть ненулевые, то $\lambda_r = \lambda_s$.*

(б) *если среди чисел $\alpha_{u,v}$, где $n_r \leq v \leq n_{r+1}-1$ и $1 \leq u \leq n$, есть ненулевые, то $\lambda_r = \lambda_s$.*

Доказательство. (а) Если среди чисел $\alpha_{u,v}$ $(n_r \leq u \leq n_{r+1}-1,\ 1 \leq v \leq n)$ есть ненулевые, то пусть p минимальное $(n_r \leq p \leq n_{r+1} - 1)$ такое, что $\alpha_{pq} \neq 0$ для некоторого q. Тогда $\alpha_0^s\big(J_1^r e_{pq}\big) = 0$, так как по утверждению 2 произведение $J_1^r e_{pq}$ равно либо 0 (если $p = n_r$), либо $e_{p-1,q}$ (если $p > n_r$) и так как при $p > n_r$

по выбору числа p будет $\alpha_0^s(e_{p-1,q}) = \alpha_{p-1,q} = 0$. Применяя первое равенство (8) для выбранных p и q, получим

$$\lambda_r \alpha_0^s(e_{pq}) = \lambda_s \alpha_0^s(e_{pq}) \Leftrightarrow \lambda_r \alpha_{pq} = \lambda_s \alpha_{pq} \Leftrightarrow \lambda_r = \lambda_s.$$

(б) Если же среди чисел $\alpha_{u,v}$ ($n_r \le v \le n_{r+1} - 1$, $1 \le u \le n$) есть ненулевые, то пусть q максимальное ($n_r \le q \le n_{r+1} - 1$) такое, что $\alpha_{p,q} \ne 0$ для некоторого p. Тогда опять по утверждению 2 и выбору числа q имеем $\alpha_0^s\big(e_{pq} J_1^r\big) = 0$. Используя первое равенство (9) для выбранных p и q, получим

$$\lambda_r \alpha_0^s(e_{pq}) = \lambda_s \alpha_0^s(e_{pq}) \Leftrightarrow \lambda_r \alpha_{pq} = \lambda_s \alpha_{pq} \Leftrightarrow \lambda_r = \lambda_s.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть r — произвольное число ($1 \le r \le m$). Тогда*
(а) $\alpha_{u,v} = 0$ *для всех u и v таких, что $n_r \le u \le n_{r+1} - 2$, $1 \le v \le n$,*
(б) $\alpha_{u,v} = 0$ *для всех u и v таких, что $n_r + 1 \le v \le n_{r+1} - 1$, $1 \le u \le n$.*

Доказательство. (а) Если среди чисел $\alpha_{u,v} = 0$ ($n_r \le u \le n_{r+1} - 2$, $1 \le v \le n$) все нулевые, то утверждение леммы очевидно. Пусть среди них есть ненулевые, тогда по лемме 3 имеем $\lambda_r = \lambda_s$. Пусть u и v такие, что $n_r \le u \le n_{r+1} - 2$ и $1 \le v \le n$. Подставив в первое равенство (8) матрицу $e_{u+1,v}$, получим

$$\lambda_r \alpha_0^s(e_{u+1,v}) + \alpha_0^s\big(J_1^r e_{u+1,v}\big) = \lambda_s \alpha_0^s(e_{u+1,v}).$$

Из леммы 2 следует, что $J_1^r e_{u+1,v} = e_{uv}$, значит,

$$\lambda_r \alpha_{u+1,v} + \alpha_{u,v} = \lambda_s \alpha_{u+1,v} \Leftrightarrow \ \alpha_{uv} = 0 \quad (\text{так как } \lambda_r = \lambda_s).$$

(б) Аналогично если среди чисел $\alpha_{u,v}$ ($n_r + 1 \le v \le n_{r+1} - 1$, $1 \le u \le n$) все нулевые, то утверждение леммы очевидно. Пусть среди них есть ненулевые, тогда снова по лемме 3 имеем $\lambda_r = \lambda_s$. Пусть u и v такие, что $n_r + 1 \le v \le n_{r+1} - 1$ и $1 \le u \le n$. Подставив в первое равенство (9) матрицу $e_{u,v-1}$, получим

$$\lambda_r \alpha_0^s(e_{u,v-1}) + \alpha_0^s\big(e_{u,v-1} J_1^r\big) = \lambda_s \alpha_0^s(e_{u,v-1}).$$

Из леммы 2 следует, что $e_{u,v-1} J_1^r = e_{u,v}$, значит,

$$\lambda_r \alpha_{u,v-1} + \alpha_{u,v} = \lambda_s \alpha_{u,v-1} \Leftrightarrow \alpha_{uv} = 0 \quad (\text{так как } \lambda_r = \lambda_s).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть s-я жорданова клетка имеет порядок больше единицы и r — произвольное число ($1 \le r \le m$), тогда*
(а) $\alpha_{uv} = 0$ *при* $u = n_r$,
(б) $\alpha_{uv} = 0$ *при* $v = n_{r+1} - 1$.

Доказательство. Так как s-я жорданова клетка имеет порядок больше единицы, матрица J_1^s не равна нулю.

(а) Используя лемму 3, можно полагать $\lambda_r = \lambda_s$, в противном случае лемма очевидна. Выпишем второе равенство (8) для $k = 1$ и $x = e_{u,v}$:

$$\lambda_r \alpha_1^s(e_{u,v}) + \alpha_1^s\big(J_1^r e_{u,v}\big) = \lambda_s \alpha_1^s(e_{u,v}) + \alpha_0^s(e_{u,v}).$$

Поскольку $J_1^r e_{u,v} = 0$ (по лемме 2), получим, что $\alpha_0^s(e_{u,v}) = \alpha_{u,v} = 0$.

(б) Учитывая лемму 3, можно полагать $\lambda_r = \lambda_s$, в противном случае результат леммы очевиден. Выпишем второе равенство (9) для $k = 1$ и $x = e_{u,v}$:

$$\lambda_r \alpha_1^s(e_{u,v}) + \alpha_1^s\big(e_{u,v} J_1^r\big) = \lambda_s \alpha_1^s(e_{u,v}) + \alpha_0^s(e_{u,v}).$$

Действительно, так как $e_{u,v} J_1^r = 0$ (в силу леммы 2), получим, что $\alpha_0^s(e_{u,v}) = \alpha_{u,v} = 0$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть s-я жорданова клетка имеет порядок больше единицы. Тогда $\lambda_s = 0$.*

Доказательство. Если $n_r \leq u \leq n_{r+1} - 2$, то (по лемме 4) $\alpha_{uu} = 0$. Если же $u = n_{r+1} - 1$, то (по лемме 5) $\alpha_{uu} = 0$. В итоге $\alpha_{uu} = 0$ для любого $1 \leq u \leq n$. Поэтому $\lambda_s = \alpha_0^s(1) = \sum\limits_{u=1}^{n} \alpha_{uu} = 0$. Следствие доказано.

Линейный функционал α_1^s запишем в виде

$$\alpha_1^s(x) = \sum_{u,v=1}^{n} \alpha'_{uv} x_{uv}, \tag{11}$$

где $\alpha_1^s(e_{uv}) = \alpha'_{uv}$ и $x = \{x_{uv}\} \in M_n(C)$.

Лемма 6. *Пусть s-я жорданова клетка имеет порядок больше двух. Тогда $\alpha'_{uu} = 0$ для любого $u = 1, \dots, n$.*

Доказательство. Так как s-я клетка имеет порядок больше двух, матрицы J_1^s и J_2^s ненулевые. Если для любых чисел r $(1 \leq r \leq m)$ все α'_{uu}, где $n_r \leq u \leq n_{r+1} - 1$, равны нулю, то утверждение леммы очевидно. Пусть среди них есть ненулевые. Пусть r $(1 \leq r \leq m)$ такое, что $\alpha'_{uu} \neq 0$, где $n_r \leq u \leq n_{r+1} - 1$.

Доказательство разделим на два случая.

(а) Предположим, что r-я клетка также имеет порядок больше двух. Тогда по следствию 1 получим, что $\lambda_r = \lambda_s = 0$. Воспользуемся вторым равенством (8) для $k = 1$. Подставляя вместо e_{pq} матрицу $e_{u+1,u}$, приходим к равенству

$$\alpha_1^s\bigl(J_1^r e_{u+1,u}\bigr) = \alpha_0^s(e_{u+1,u}).$$

Если $n_r \leq u \leq n_{r+1} - 2$, то $J_1^r e_{u+1,u} = e_{u,u}$ (по утверждению 2) и, значит,

$$\alpha_1^s(e_{u,u}) = \alpha_0^s(e_{u+1,u}) \Leftrightarrow \alpha'_{u,u} = \alpha_{u+1,u}.$$

Равенства $u + 1 = n_{r+1} - 1$ и $u = n_r$ одновременно выполняться не могут (иначе $n_{r+1} - n_r = 2$, т. е. r-я клетка второго порядка). Следовательно, $\alpha_{u+1,u} = 0$ (по лемме 4). Тем самым мы доказали, что если $n_r \leq u \leq n_{r+1} - 2$, то $\alpha'_{uu} = 0$. Если же $u = n_{r+1} - 1$, то по лемме 2 имеем, что $e_{u,u-1} J_1^r = e_{u,u}$. Тогда, воспользовавшись вторым равенством (9) для $k = 1$ при $e_{pq} := e_{u,u-1}$, получим

$$\alpha_1^s\bigl(e_{u,u-1} J_1^r\bigr) = \alpha_0^s(e_{u,u-1}) \Leftrightarrow \alpha_1^s(e_{u,u}) = \alpha_0^s(e_{u,u-1}) \Leftrightarrow \alpha'_{uu} = \alpha_{u,u-1}.$$

Так как $u = n_{r+1} - 1$ и r-я клетка более чем второго порядка, то $n_r + 1 \leq u - 1 \leq n_{r+1} - 1$ и, следовательно, по лемме 4 $\alpha_{u,u-1} = 0$. В этом случае лемма доказана.

(б) Пусть теперь r-я клетка имеет порядок не более двух. Поскольку $n_r \leq u \leq n_{r+1} - 1$, то либо $u = n_r$, либо $u = n_{r+1} - 1$. Если $u = n_r$, то воспользуемся вторым равенством (8) при $k = 2$, подставляя вместо e_{pq} матрицу $e_{u,u}$:

$$\lambda_r \alpha_2^s(e_{u,u}) + \alpha_2^s\bigl(J_1^r e_{u,u}\bigr) = \alpha_1^s(e_{u,u}).$$

Так как $J_1^r e_{u,u} = 0$ (из леммы 2), при $\lambda_r = 0$ получим

$$\alpha'_{uu} = \alpha_1^s(e_{u,u}) = 0.$$

Если же $\lambda_r \neq 0$, то $\lambda_r \neq \lambda_s (= 0)$. Рассмотрим второе равенство (8) при $k = 1$ и $e_{pq} := e_{u,u}$. Имеем

$$\lambda_r \alpha_1^s(e_{u,u}) + \alpha_1^s\bigl(J_1^r e_{u,u}\bigr) = \alpha_0^s(e_{u,u}).$$

Действительно, так как $J_1^r e_{u,u} = 0$ (по лемме 2), то

$$\lambda_r \alpha_1^s(e_{u,u}) = \alpha_0^s(e_{u,u}) = \alpha_{u,u}.$$

Если $\alpha_{u,u} \neq 0$, то из леммы 3 следует, что $\lambda_r = \lambda_s$; противоречие.

Если $\alpha_{u,u} = 0$, то $\alpha'_{u,u} = 0$. Таким образом, если $u = n_r$, то $\alpha'_{u,u} = 0$.

Пусть $u = n_{r+1} - 1$, тогда воспользуемся вторым равенством (9) при $k = 2$ и $e_{pq} := e_{u,u}$:

$$\lambda_r \alpha_2^s(e_{u,u}) + \alpha_2^s\bigl(e_{uu} J_1^r\bigr) = \alpha_1^s(e_{u,u}).$$

Так как $e_{u,u} J_1^r = 0$ (из леммы 2), получим

$$\lambda_r \alpha_2^s(e_{u,u}) = \alpha_1^s(e_{u,u}).$$

Если $\lambda_r = 0$, то

$$\alpha'_{u,u} = \alpha_1^s(e_{u,u}) = 0.$$

Если же $\lambda_r \neq 0$, то $\lambda_r \neq \lambda_s (= 0)$. Рассмотрим второе равенство (9) при $k = 1$ и $e_{pq} := e_{u,u}$. Имеем

$$\lambda_r \alpha_1^s(e_{u,u}) = \alpha_0^s(e_{u,u}) = \alpha_{u,u}.$$

Если $\alpha_{uu} \neq 0$, то из леммы 3 следует, что $\lambda_r = \lambda_s$; противоречие.

Если $\alpha_{uu} = 0$, то $\alpha'_{uu} = 0$. Таким образом, если $u = n_{r+1} - 1$, то $\alpha'_{uu} = 0$. Лемма доказана.

Доказательство предложения 3. Если s-я клетка имеет порядок более двух, то по лемме 6 будет $\alpha'_{u,u} = 0$ для всех u и, следовательно, $\alpha_1^s(1) = \sum\limits_{u=1}^{n} \alpha'_{u,u} = 0$, но $\alpha_1^s(1) = 1$. Получили противоречие, т. е. клеток более чем второго порядка быть не может. Если клетка второго порядка, то по следствию 1 соответствующее диагональное значение равно нулю. Предложение доказано.

Лемма 7. *Пусть $1 \in A$. Тогда*

$$D^k(a) = D(a)D(1)^{k-1} = D(1)^{k-1}D(a).$$

Доказательство проводится индукцией по k.

Следствие 2. *Пусть $1 \in A$. Тогда D — нильпотентный оператор тогда и только тогда, когда $D(1)$ — нильпотентный элемент алгебры A.*

Доказательство. Нильпотентность элемента $D(1)$ следует из равенства $D^k(1) = D(1)^k$. Обратное утверждение очевидно.

Другими словами, следствие 2 означает, что D — нильпотентный оператор тогда и только тогда, когда $\operatorname{Spec} D(1) = \{0\}$.

Лемма 8. *Для любых элементов $x, y \in A$ и любого D-отображения D имеет место равенство*

$$[[[y, \underbrace{x]_D, x]_D, \ldots, x]_D}_{n-\text{раз}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k D(x)^k y D(x)^{n-k}.$$

Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 1$ равенство верно. Докажем его для $n + 1$, предварительно замечая, что

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k.$$

Завершает доказательство леммы следующая цепочка равенств:

$$[[[y,\underbrace{x]_D,x]_D,\dots,x]_D}_{n+1-\text{раз}}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kD(x)^kyD(x)^{n-k+1}-D(x)\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kD(x)^kyD(x)^{n-k}\right]$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kD(x)^kyD(x)^{n-k+1}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kD(x)^{k+1}yD(x)^{n-k}$$
$$=yD(x)^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^kD(x)^kyD(x)^{n-k+1}$$
$$+(-1)^{n+1}D(x)^{n+1}y-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^kC_n^kD(x)^{k+1}yD(x)^{n-k}$$
$$=yD(x)^{n+1}+(-1)^{n+1}D(x)^{n+1}y+\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^kD(x)^kyD(x)^{n+1-k}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^{k-1}D(x)^kyD(x)^{n+1-k}=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^kC_{n+1}^kD(x)^kyD(x)^{n+1-k}.$$

Лемма доказана.

Следствие 3. *A_D — нильпотентная алгебра Лейбница тогда и только тогда, когда для любых элементов $x,y\in A$ существует $p\in N$ такое, что для любого $n\geq p$ верно равенство*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kD(x)^kyD(x)^{n-k}=0.$$

Доказательство. Используя теорему о глобальной нильпотентности в [4], можно сказать, что A_D — нильпотентная алгебра Лейбница тогда и только тогда, когда для любого элемента $x\in A$ существует $n\in N$ такое, что $R_x^n=0$, (где R_x — оператор правого умножения на элемент x). Ссылка на лемму 2 завершает доказательство следствия. Следствие доказано.

Следствие 4. *Пусть $D(A)$ — нильподалгебра ассоциативной алгебры A. Тогда A_D — нильпотентная алгебра Лейбница.*

Доказательство очевидным образом вытекает из следствия 2.

Лемма 9. *Для любых $p,s\in N\cup\{0\}$ и $n\geq p+s+1$ верно следующее равенство:*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kC_k^sC_{n-k}^p=0,$$

где $C_k^s=0$ при $s>k$ и $C_{n-k}^p=0$ при $p>n-k$.

Доказательство. Имеют место равенства

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kC_k^sC_{n-k}^p=\sum_{k=s}^{n-p}(-1)^kC_n^kC_k^sC_{n-k}^p$$

$$= \sum_{k=s}^{n-p} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{k!}{(k-s)!s!} \frac{(n-k)!}{(n-k-p)!p!}$$

$$= \frac{1}{s!p!} \sum_{k=s}^{n-p} (-1)^k \frac{n!}{(k-s)!(n-k-p)!} \overset{k'=k-s}{=} \frac{1}{s!p!} \sum_{k'=0}^{n-p-s} (-1)^{k'+s} \frac{n!}{k'!(n-k'-p-s)!}$$

$$\overset{t=p+s}{=} \frac{(-1)^s}{s!p!} \sum_{k'=0}^{n-t} (-1)^{k'} \frac{n!}{k'!(n-t-k')!} \overset{m=n-t}{=} \frac{(-1)^s}{s!p!} \sum_{k'=0}^{m} (-1)^{k'} \frac{(m+t)!}{k'!(m-k')!}$$

$$= \frac{(-1)^s}{s!p!} \frac{(m+t)!}{m!} \sum_{k'=0}^{m} (-1)^{k'} \frac{m!}{k'!(m-k')!} = \frac{(-1)^s}{s!p!} \frac{(m+t)!}{m!} \left(\sum_{k'=0}^{m} (-1)^{k'} C_m^{k'} \right)$$

$$= \frac{(-1)^s}{s!p!} \frac{(m+t)!}{m!} 0 = 0.$$

Лемма доказана.

Предложение 4. *Пусть J — жорданова клетка размера m. Тогда для любого $n \geq 2m-1$ и любой матрицы $y \in M_m(C)$ выполняется равенство*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k J^k y J^{n-k} = 0.$$

Доказательство. Пусть $J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & & & \dots & & \alpha \end{pmatrix}$. Тогда

$$J^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & C_k^1 \alpha^{k-1} & C_k^2 \alpha^{k-2} & C_k^3 \alpha^{k-3} & \dots & C_k^{m-1} \alpha^{k-m+1} \\ 0 & \alpha^k & C_k^1 \alpha^{k-1} & C_k^2 \alpha^{k-2} & \dots & C_k^{m-2} \alpha^{k-m+2} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha^k \end{pmatrix}.$$

При $k \leq m-1$ следует положить $C_k^s := 0$ для $k < s$. Утверждение достаточно доказать для $y = e_{t,s}$ $(1 \leq t,\ s \leq m)$. Очевидно, что $(J^k)_{i,j} = C_k^{j-i} \alpha^{k-j+i}$ при $i \leq j$ и $(J^k)_{i,j} = 0$ при $i > j$, т. е.

$$J^k = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{m} C_k^{j-i} \alpha^{k-j+i} e_{i,j}.$$

Рассмотрим произведение

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k J^k e_{t,s} J^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{m} C_k^{j-i} \alpha^{k-j+i} e_{i,j} \right) e_{t,s} \left(\sum_{\substack{p,q=1 \\ p \leq q}}^{m} C_{n-k}^{q-p} \alpha^{n-k-q+p} e_{p,q} \right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \leq j=t}}^{t} C_k^{t-i} \alpha^{k-t+i} \right) e_{i,s} \delta_{jt} \left(\sum_{\substack{p,q=1 \\ p \leq q}}^{m} C_{n-k}^{q-p} \alpha^{n-k-q+p} e_{p,q} \right)$$

$$= \delta_{jt} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{t} (-1)^k C_n^k C_k^{t-i} \left(\sum_{q=s}^{m} C_{n-k}^{q-s} \alpha^{n-t+i-q+s} \right) \delta_{sp} e_{i,q}$$

$$= \delta_{jt} \delta_{sp} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{t} \sum_{q=s}^{m} (-1)^k C_n^k C_k^{t-i} C_{n-k}^{q-s} \alpha^{n-(t-i)-(q-s)} e_{i,q}.$$

Нетрудно видеть, что равенство

$$\delta_{jt} \delta_{sp} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{t} \sum_{q=s}^{m} (-1)^k C_n^k C_k^{t-i} C_{n-k}^{q-s} \alpha^{n-(t-i)-(q-s)} e_{i,q} = 0$$

эквивалентно равенству

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_k^{t-i} C_{n-k}^{q-s} = 0,$$

где $0 \le t - i \le m - 1$, $0 \le q - s \le m - 1$. На основании леммы 9

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_k^{t-i} C_{n-k}^{q-s} = 0$$

для любого $n \ge 2m - 1$. Предложение доказано.

Замечание 3. Если положить $Q(x) = R^{-1} D(RxR^{-1}) R$, то условие

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k D(x)^k y D(x)^{n-k} = 0 \quad \text{для любых } x, y \in A$$

равносильно условию

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k Q(x)^k y Q(x)^{n-k} = 0 \quad \text{для любых } x, y \in A,$$

т. е. A_D — нильпотентная алгебра Лейбница тогда и только тогда, когда A_Q — нильпотентная алгебра Лейбница. Таким образом, при доказательстве равенства

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k D(x)^k y D(x)^{n-k} = 0 \quad \text{для любого } y \in A$$

мы можем предполагать, что $D(x)$ имеет жорданову форму.

Теорема. *$M_m(C)_D$ — нильпотентная алгебра Лейбница тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Card}\operatorname{Spec} D(x) = 1$ *для любого $x \in M_m(C)$.*

Доказательство. Пусть $M_m(C)_D$ — нильпотентная алгебра Лейбница. Тогда из следствия 3 получаем существование p такого, что для любого $n \ge p$ верно равенство

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k D(x)^k y D(x)^{n-k} = 0 \qquad (*)$$

для любых $x, y \in M_m(C)$. Пусть $D(x)$ имеет следующую жорданову форму:

$$D(x) = \begin{pmatrix} J_{\alpha_1} & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & J_{\alpha_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & \dots & 0 & J_{\alpha_N} \end{pmatrix}, \quad \text{где } J_{\alpha_s} \in M_{m_s}(C).$$

Подставив в равенство $(*)$ $y := e_{m_s,m_s+1}$, получим

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k D(x)^k e_{m_s,m_s+1} D(x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \alpha_k^s e_{m_s,m_s+1}\alpha_{s+1}^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \alpha_k^s \alpha_{s+1}^{n-k} e_{m_s,m_s+1} = (\alpha_s - \alpha_{s+1})^n e_{m_s,m_s+1} = 0,$$

откуда имеем $\alpha_s = \alpha_{s+1}$.

В случае, когда жорданова форма матрицы $D(x)$ имеет вид

$$D(x) = \begin{pmatrix} J_{\alpha_1} & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & J_{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & \dots & 0 & J_{\alpha_1} \end{pmatrix}, \quad \text{где } J_{\alpha_1} \in M_{m_s}(C),$$

рассуждениями, аналогичными рассуждениям в предложении 4, получаем доказательство теоремы. Теорема доказана.

Следствие 5. *Пусть $M_m(C)_D$ — нильпотентная (не абелева) алгебра Лейбница. Тогда* $\operatorname{Spec} D(1) = 0$.

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{Spec} D(1) \neq 0$. Тогда, используя предложение 3 и вышедоказанную теорему, мы можем полагать, что $D(1) = \lambda 1$. Не ограничивая общности, будем полагать, что $D(1) = 1$. Тогда из равенств (2) получим, что $D^2 = D$. Для удобства введем следующие обозначения: $A := M_m(C)$, $A_0 := \operatorname{Im} D$, $A_1 := \ker D$. Из линейной алгебры известно, что $\dim A_0 + \dim A_1 = \dim A$. Из равенства $D^2 = D$ имеем, что $A_0 \cap A_1 = \{0\}$ и, следовательно, $A = A_0 \oplus A_1$. Из равенств (2) нетрудно проверить, что A_0 является ассоциативной подалгеброй алгебры A, содержащей единицу, и $D|_{A_0} = id$. Из (2) нетрудно также показать, что выполняются следующие вложения:

$$A_0 \cdot A_1 \subseteq A_1, \quad A_1 \cdot A_0 \subseteq A_1.$$

Рассмотрим подалгебру A_0 алгебры Лейбница A_D. Тогда подалгебра A_0 является нильпотентной алгеброй Ли. Используя теорему Ли в [5] и вышедоказанную теорему, мы можем предполагать, что A_0 состоит из верхнетреугольных матриц с одинаковыми диагональными элементами, т. е. $A_0 = C \cdot 1 + C \cdot N$, где N — нильпотентный идеал в алгебре A_0.

Докажем, что можно полагать $A_0 = C \cdot 1 + C \cdot n$, где $n^2 = 0$. Действительно, пусть $A_0 = C \cdot 1 + C \cdot N$, тогда существует такое натуральное k, что $N^k = 0$. Значит, $\operatorname{Ann} N = \{x \in N \mid xN = Nx = 0\} \neq 0$. Пусть n — ненулевой элемент множества $\operatorname{Ann} N$, и пусть $N = C \cdot n \oplus K$ — прямая сумма векторных пространств. Положим $A_0' := C \cdot 1 + C \cdot n$ и $A_1' = A_1 \oplus K$. Нетрудно проверить, что для множеств A_0' и A_1' выполнены следующие условия: A_0' — подалгебра в $M_m(C)$, содержащая единицу, и $A_0' \cdot A_1' \subseteq A_1'$, $A_1' \cdot A_0' \subseteq A_1'$, причем $A_0' \cap A_1' = \{0\}$.

Таким образом, мы можем полагать, что $A_0 = C \cdot 1 + C \cdot n$, где $n^2 = 0$.

Сделаем такую замену базиса, при котором матрица n примет вид

$$n = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Q_s \end{pmatrix},$$

где Q_i либо нулевая матрица, либо матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда A_0 примет вид TA_0T^{-1}, а A_1 примет вид TA_1T^{-1} и вложения $TA_0T^{-1}\cdot TA_1T^{-1} = TA_0\cdot A_1T^{-1} \subseteq TA_1T^{-1}$, $TA_1T^{-1}\cdot TA_0T^{-1} = TA_1\cdot A_0T^{-1} \subseteq TA_1T^{-1}$ выполняются, т. е. условия для A_0 и A_1 в новом базисе сохраняются.

Рассмотрим матрицу

$$c = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_s \end{pmatrix},$$

где P_i либо нулевая матрица, либо матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $c = \alpha\cdot 1+\beta\cdot n+b$, где $b \in A_1$. Возможны два случая.

(а) Пусть $\alpha = 0$, тогда $nc = nb$. Так как $nc = n$, умножив слева равенство $c = \alpha\cdot 1+\beta\cdot n+b$ на n, получим, что $n = nb$ и $n \in A_1$; противоречие с выбором n.

(б) Пусть $\alpha \neq 0$, тогда $b = c-\alpha\cdot 1-\beta\cdot n$. Так как $cn = 0$, умножив справа равенство $c = \alpha\cdot 1+\beta\cdot n+b$ на n, получим, что $\beta n = \alpha n \in A_1$; противоречие с выбором n.

Таким образом, мы получили противоречие с условием $\operatorname{Spec} D(1) \neq 0$. Следствие доказано.

Гипотеза. *Пусть $A = M_m(C)$ и D есть D-отображение. Пусть $D(1)$ — нильпотентная матрица (т. е. $\operatorname{Spec} D(1) = \{0\}$), тогда $M_m(C)_D$ — нильпотентная алгебра Лейбница.*

В теории алгебр Ли важное значение имеют простые алгебры Ли. В связи с тем, что в классическом понимании лейбницевы алгебры не являются простыми, так как всякая нелиева алгебра Лейбница имеет ненулевой идеал I, порожденный квадратами элементов L, в работе [6] предложено следующее естественное определение простой алгебры Лейбница.

Определение 4. Алгебра Лейбница называется *простой*, если она имеет только идеалы (0), I, L.

Следующее предложение показывает, что при любом D-отображении D алгебра $M_n(C)_D$ не будет простой алгеброй Лейбница.

Предложение 5. *Пусть D — D-отображение, определенное на $M_m(C)$. Тогда $M_m(C)_D$ не является простой алгеброй Лейбница.*

Доказательство. Предположим, что $M_m(C)_D$ — простая алгебра Лейбница. Тогда для идеала $M_m(C)^2_D = [M_m(C), M_m(C)]_D$ возможны только следующие случаи:

(а) $M_m(C)^2_D = \{0\}$;

(б) $M_m(C)^2_D = \operatorname{ideal}\langle [x,x]_D \mid x \in M_m(C)_D\rangle$;

(с) $M_m(C)^2_D = M_m(C)_D$.

Случай (а) влечет, что алгебра Лейбница $M_m(C)_D$ абелева, но абелева алгебра Лейбница размерности m^2 не является простой.

Случай (б). Из описания свойств конечномерных простых алгебр Ли [4] мы имеем, что алгебра $M_m(C)_D$ двумерна; противоречие.

Случай (с) также невозможен, так как множество $M_m(C)^2_D$ состоит из матриц с нулевыми следами, а множество $M_m(C)_D$ имеет матрицы с ненулевыми следами. Предложение доказано.

Следующий пример показывает, что конструкция построения алгебр Лейбница с помощью ассоциативной алгебры и D-отображения не является общей для многообразия алгебр Лейбница, хотя помогает выяснить ситуацию в некоторых случаях.

Пример. Пусть

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \mid x_{ij} \in G \right\}$$

— алгебра верхнетреугольных матриц, где $n = 2k+1$. Рассмотрим отображение $D : A \to A$, определенное следующим образом:

$$D \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & x_{nn} \end{pmatrix} = x_{11} J_k^1.$$

Используя лемму 2, получим, что $DxDy = x_{11}y_{11}J_{2k}^1$ и $D(xDy) = 0$, т. е. существуют $x, y \in A$ такие, что условие $DxDy = D(xDy)$ не выполняется. С другой стороны,

$$[x, y]_D = [x, Dy] = xD(y) - D(y)x = y_{11}\big(xJ_k^1 - J_k^1 x\big).$$

Рассмотрим произведение

$$[x, [y, z]_D]_D = \big[x, z_{11}\big(yJ_k^1 - J_k^1 y\big)\big] = z_{11}\big[x, z_{11}\big(yJ_k^1 - J_k^1 y\big)\big].$$

Нетрудно видеть, что у матрицы $\big(yJ_k^1 - J_k^1 y\big)$ элемент $\big(yJ_k^1 - J_k^1 y\big)_{11}$ нулевой, следовательно, $[x, [y, z]_D]_D = 0$.

Рассмотрим произведения

$$\begin{aligned} &[[x, y]_D, z]_D = \big[y_{11}\big(xJ_k^1 - J_k^1 x\big), z\big] = y_{11}\big[\big(xJ_k^1 - J_k^1 x\big), z\big] \\ &= y_{11}z_{11}\big(\big(xJ_k^1 - J_k^1 x\big)J_k^1 - J_k^1\big(xJ_k^1 - J_k^1 x\big)\big) = y_{11}z_{11}\big(xJ_{2k}^1 - 2J_k^1 x J_k^1 - J_{2k}^1 x\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[[x, z]_D, y]_D = \big[z_{11}\big(xJ_k^1 - J_k^1 x\big), y\big] = z_{11}\big[\big(xJ_k^1 - J_k^1 x\big), y\big] \\ &= y_{11}z_{11}\big(\big(xJ_k^1 - J_k^1 x\big)J_k^1 - J_k^1\big(xJ_k^1 - J_k^1 x\big)\big) = y_{11}z_{11}\big(\big(xJ_{2k}^1 - 2J_k^1 x J_k^1 - J_{2k}^1 x\big), \end{aligned}$$

т. е. выполняется равенство $[[x, z]_D, y]_D = [[x, y]_D, z]_D$ для любых $x, y, z \in A$. Таким образом, умножение $[x, y]_D$ удовлетворяет тождеству Лейбница, однако не является D-отображением.

Пусть $[x, y]_D = [x, y]_{D_1}$, т. е. $x(D - D_1)(y) = (D - D_1)(y)x \ \forall x, y \in A$. Тогда $D_1(x) = D(x) - \lambda(x)\,\mathrm{id}(x)$, где $\lambda(x) : A \to C$, т. е. $D_1 x = x_{11}J_k^1 - \lambda(x)E$.

Нетрудно проверить, что $(D_1(x)D_1(y))_{11} = x_{11}y_{11}$, а $(D_1(xD_1(y)))_{11} = 0$. Таким образом, $[x, y]_D = [x, y]_{D_1}$ для любых $x, y \in A$, т. е. D_1 не может быть D-отображением.

Авторы выражают глубокую признательность И. П. Шестакову за полезное обсуждение в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Loday J.-L.* Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz // L'Ens. Math. 1993. V. 39. P. 269–293.
2. *Loday J.-L., Pirashvili T.* Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology // Math. Ann. 1993. V. 296. P. 139–158.
3. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
4. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., Omirov B. A.* On nilpotent and simple Leibniz algebras // Comm. Algebra. 2004. (To appear).
5. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
6. *Abdykassymova S., Dzhumadil'daev A.* Simple Leibniz algebras of rank // The Abstract presented to the IX Intern. conf. of the representation theory of algebras. Beijing, 2000. (China). P. 17–18.

Статья поступила 18 марта 2003 г.

Аюпов Шавкат Абдуллаевич,
Институт математики АН РУз,
Академгородок, Ф. Ходжаева, 29, Ташкент 700125, Узбекистан
e_ayupov@hotmail.com, ayupov@im.tashkent.su

Омиров Бахром Абдазович,
Институт математики АН РУз,
Академгородок, Ф. Ходжаева, 29, Ташкент 700125, Узбекистан
mathinst@uzsci.net