Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 517.51

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. С. Романов

Аннотация: На метрическом пространстве (X, d) с борелевской мерой μ рассматривается класс функций, приращение которых контролируется мерой шара, содержащего соответствующие точки, и неотрицательной функцией, суммируемой в степени p по мере μ. Доказываются аналоги классических теорем вложения соболевских классов функций в пространства Лебега.

Ключевые слова: метрическое пространство, мера, классы Соболева, теоремы вложения.

В основе различных подходов к определению аналогов соболевских классов функций на метрических пространствах лежит единый принцип их построения: для функций пространства $W_p^1(B)$ на шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ выделяется какое-либо характеристическое свойство, допускающее переформулировку в терминах произвольной метрики, а затем это свойство используется в качестве аксиомы принадлежности функции соответствующему соболевскому классу на метрическом пространстве. В результате получаемые функциональные пространства, совпадая на шарах $B \subset \mathbb{R}^n$ с классическими пространствами Соболева, в общем случае на метрических пространствах оказываются различными. Наиболее общий аксиоматический подход к определению соболевских классов функций предложен в работе [1], а более подробную информацию о различных аналогах соболевских пространств можно найти в работах [2, 3].

В данной статье изучается еще один, формально не вписывающийся в аксиоматику работы [1], класс функций на метрических пространствах, который, как и другие аналоги, можно считать пространством «соболевского типа». Наиболее близкими к рассматриваемому в статье функциональному пространству оказываются классы функций, введенные П. Хайлашем [4], об определении и некоторых свойствах которых скажем несколько подробнее.

Пусть (X, d) — метрическое пространство с конечным диаметром, μ — конечная борелевская мера на X, $1 \le p \le \infty$. Пространства Соболева — Хайлаша $HL_p^1(X, d, \mu)$ и $HW_p^1(X, d, \mu)$ (аналоги соболевских пространств функций с первыми обобщенными производными), следуя работе [4], определим условиями

$$HL_p^1(X, d, \mu) = \{f : X \to R \mid \exists E \subset X, \mu(E) = 0, \exists g \in L_p(\mu),$$
$$|f(x) - f(y)| \le d(x, y)(g(x) + g(y)) \ \forall x, y \in X \setminus E\},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–01009) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ–311.2003.1).

$$HW_p^1(X,d,\mu) = \{f \in L_p(\mu) \mid f \in HL_p^1(X,d,\mu)\}.$$

Полунорма в пространстве $HL_p^1(X,d,\mu)$ и норма в пространстве $HW_p^1(X,d,\mu)$ вводятся равенствами

$$\|f \mid HL_p^1\| = \inf_g \|g \mid L_p\|, \quad \|f \mid HW_p^1\| = \|f \mid L_p\| + \|f \mid HL_p^1\|$$

соответственно. Пространства $HL_p^1(X,d,\mu)$ и $HW_p^1(X,d,\mu)$ совпадают как множества функций [4].

Если не предполагать никаких дополнительных условий на метрику и меру, то доказать удается лишь банаховость пространства $HW_p^1(X,d,\mu)$, аналог неравенства Пуанкаре и плотность липшицевых функций в $HW_p^1(X,d,\mu)$. В случае s-регулярных мер, когда мера произвольного шара оценивается снизу положительной степенью его радиуса, т. е.

$$\mu(B(x,r)) \geq b \cdot r^s, \quad s > 0, \tag{1}$$

для пространств $HW_p^1(X,d,\mu)$ удается получить аналоги классических теорем вложения соболевских классов функций в пространства Лебега.

Теорема 1 [4]. *Пусть μ — s-регулярная мера и $f \in HW_p^1(X,d,\mu)$.*

1. *Если $p < s$, то $f \in L_q(\mu)$, где $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$, и*

$$\|f \mid L_q\| \leq C\big((\operatorname{diam} X)^{-1}\|f \mid L_p\| + \|f \mid HL_p^1\|\big),$$

а следовательно,

$$\|f - f_X \mid L_q\| \leq C'\|f \mid HL_p^1\|.$$

2. *Если $p = s$, то существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что*

$$\int\limits_X \exp\left(C_1 \frac{\mu^{1/s}(X)\,|f - f_X|}{\operatorname{diam}(X)\,\|f \mid HL_s^1\|}\right) d\mu \leq C_2\mu(X).$$

3. *Если $p > s$, то*

$$\|f - f_X \mid L_\infty\| \leq C(\mu(X))^{1/s-1/p}\|f \mid HL_p^1\|$$

и, следовательно,

$$|f(x) - f(y)| \leq C(\mu(X))^{1/s-1/p}\|f \mid HL_p^1\|$$

почти всюду.

Отсутствие в общем случае конкретного способа нахождения допустимых функций g, участвующих в определении пространств Соболева — Хайлаша $HW_p^1(X,d,\mu)$, существенно затрудняет дальнейшее изучение таких классов функций.

Конструктивное описание допустимых функций удается получить [5] в случае, когда мера удовлетворяет «условию удвоения»:

$$\mu(B(x,2r)) \leq C_d\mu(B(x,r)) \tag{2}$$

при всех $x \in X$ и $r > 0$.

В этом случае мера произвольного шара оценивается снизу через радиус шара:

$$\mu(B(x,r)) \geq Cr^s,$$

где $s = \log_2 C_d$ и $0 < r < \operatorname{diam} X$, т. е. мера μ является s-регулярной. При этом условие удвоения оказывается более сильным, чем условие s-регулярности, и позволяет получить удобное описание пространств Соболева — Хайлаша в терминах максимальных функций.

Среднее значение функции f на множестве Ω обозначим символом

$$f_\Omega = \fint_\Omega f\,d\mu = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f\,d\mu.$$

Для локально интегрируемой функции f и числа $\alpha > 0$ уточненную максимальную функцию $f_\alpha^\#$ определим равенством

$$f_\alpha^\#(x) = \sup_{r>0} r^{-\alpha} \fint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|\,d\mu.$$

В работе [5] показано, что для произвольной локально интегрируемой функции $f : X \to [-\infty, \infty]$ неравенство

$$|f(x) - f(y)| \le C(d(x,y))^\alpha \bigl(f_\alpha^\#(x) + f_\alpha^\#(y)\bigr) \tag{3}$$

выполняется для почти всех $x, y \in X$.

Из неравенства (3) и ограниченности максимального оператора в пространствах L_p при $p > 1$ довольно просто (см. [5]) следует утверждение, что при $p > 1$ функция f принадлежит пространству $HW_p^1(X, d, \mu)$ тогда и только тогда, когда $f \in L_p(\mu)$ и $f_1^\# \in L_p(\mu)$, причем

$$\bigl\|f \mid HL_p^1\bigr\| \sim \bigl\|f_1^\# \mid L_p\bigr\|.$$

Наличие глобальной оценки приращения функции через уточненную максимальную функцию $f_1^\#$ позволяет построить на метрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения, вполне содержательную теорию соответствующих соболевских классов функций на метрических пространствах, включающую в себя аналоги различных классических результатов, известных в евклидовом случае.

При этом можно заметить, что при изучении пространств Соболева — Хайлаша в доказательствах многих результатов, в том числе и теорем вложения, основную роль играет оценка приращения функции не через расстояние между точками x и y, а получаемая в процессе доказательства подходящая оценка через меру соответствующего шара, содержащего точки x и y. Оценки приращения функции через меру подходящего шара появляются и при изучении других функциональных классов соболевского типа, к примеру, в работе [6] при изучении свойств монотонных функций из пространств Соболева на группах Карно.

Поэтому идея изучения классов функций, приращение которых контролируется мерой соответствующего шара, представляется вполне очевидной и естественной. Однако целенаправленного изучения таких функциональных пространств в известной автору литературе обнаружить не удалось.

§ 1. Определения

Пусть (X, d) — метрическое пространство, μ — конечная регулярная борелевская мера, $1 \le p \le \infty$, $1 < s < \infty$.

Для произвольной пары точек $x, y \in X$ определим неотрицательную величину $M(x,y)$ равенством

$$M(x,y) = \min\{\mu(\overline{B(x,d(x,y))}), \mu(\overline{B(y,d(x,y))})\}.$$

Функцию $h : X \to [0,\infty)$ будем называть *допустимой* для μ-измеримой функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, если существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство

$$|f(x) - f(y)| \le (M(x,y))^{1/s}(h(x) + h(y)) \tag{4}$$

выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$.

Множество всех допустимых функций для функции f обозначим через $D(f)$ и положим $D_p(f) = D(f) \cap L_p(\mu)$.

Функциональные пространства $L_{s,p}(X,d,\mu)$ и $W_{s,p}(X,d,\mu)$ определим условиями

$$L_{p,s}(X,d,\mu) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \mid D_p(f) \ne \varnothing\},$$
$$W_{p,s}(X,d,\mu) = \{f \in L_p(\mu) \mid f \in L_{p,s}(X,d,\mu)\}.$$

Полунорма в пространстве $L_{s,p}(X,d,\mu)$ и норма в пространстве $W_{s,p}(X,d,\mu)$ вводятся равенствами

$$\|f \mid L_{s,p}\| = \inf_{h\in D_p(f)} \|h \mid L_p\|, \quad \|f \mid W_{s,p}\| = \|f \mid L_p\| + \|f \mid L_{s,p}\|$$

соответственно.

В случае существования двусторонней степенной оценки меры шара через его радиус ($C_1 r^s \le \mu(B(x,r) \le C_2 r^s$) пространства $W_{s,p}(X,d,\mu)$ и $HW^1_p(X,d,\mu)$ совпадают. Следовательно [4], на произвольном шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ пространство $W_{n,p}(B)$ относительно евклидовой метрики и стандартной меры Лебега совпадает с классическим пространством Соболева $W^1_p(B)$. При наличии односторонних оценок меры шара через его радиус пространства $W_{s,p}(X,d,\mu)$ и $HW^1_p(X,d,\mu)$ соответствующим образом вложены одно в другое, а в общем случае $W_{s,p}(X,d,\mu)$ и $HW^1_p(X,d,\mu)$ имеют непустое пересечение, содержащее как минимум постоянные функции.

При $1 < p < \infty$ несложно показать существование для произвольной функции $f \in L_{s,p}$ единственной экстремальной допустимой функции h_0 такой, что $\|f \mid L_{s,p}\| = \|h_0 \mid L_p(\mu)\|$.

Очевидно, что множество $D_p(f)$ является выпуклым. Докажем, что оно еще и замкнуто относительно сходимости в $L_p(\mu)$. Рассмотрим последовательность $\{h_n\}$ допустимых функций для функции $f \in L_{s,p}(X,d,\mu)$, сходящуюся по норме пространства $L_p(\mu)$ к функции h. При любом $n \in \mathbb{N}$ неравенство

$$|f(x) - f(y)| \le (M(x,y))^{1/s}(h_n(x) + h_n(y))$$

выполняется почти всюду на X. Следовательно, существует множество $E \subset X$, $\mu(E) = 0$, такое, что это неравенство будет выполняться одновременно для всех $n \in \mathbb{N}$ на множестве $X \setminus E$. Поскольку существует подпоследовательность $\{h_{n_k}\}$, сходящаяся к функции h почти всюду, то и для функции h данное неравенство будет выполняться почти всюду. Это означает, что множество $D_p(f)$ замкнуто в $L_p(\mu)$. Из замкнутости и выпуклости множества допустимых функций $D_p(f)$ и равномерной выпуклости пространств Лебега $L_p(\mu)$ при $p > 1$ следует существование единственной экстремальной допустимой функции h_0, для которой

$$\|f \mid L_{s,p}\| = \|h_0 \mid L_p(\mu)\|.$$

Доказательства банаховости пространства $W_{s,p}(X,d,\mu)$ и совпадения пространств $L_{s,p}(X,d,\mu)$ и $W_{s,p}(X,d,\mu)$ как множеств функций получаются дословным повторением соответствующих доказательств работы [4] с единственным изменением: заменой оценки приращения функции через расстояние между точками x и y оценкой через $M(x,y)$-меру шара, содержащего точки x и y.

Последовательно интегрируя неравенство (4) по x, возводя в степень p, а затем интегрируя по y, для произвольной функции $f \in L_{s,p}(X,d,\mu)$ и произвольной допустимой функции $h \in D_p(f)$ получаем аналог неравенства Пуанкаре

$$\int\limits_X |f(y) - f_X|^p \, d\mu(y) \le C \int\limits_X h^p \, d\mu$$

или

$$\|f - f_X \mid L_p\| \le C\|f \mid L_{s,p}\|. \tag{5}$$

§ 2. Теорема вложения

При доказательстве теоремы вложения нам потребуется единственное дополнительное предположение о свойствах меры μ, обеспечивающее возможность выбора шаров, мера которых будет сравнима с мерой интересующих нас множеств.

Далее будем предполагать, что мера μ удовлетворяет следующему условию соизмеримости шаров и множеств: существует постоянная $L < \infty$ такая, что для произвольного измеримого множества $E \subset X$, $0 < \mu(E) < \mu(X)$, и произвольной точки $x \in E$ найдется такой шар $B(x,r)$, что $\mu(E) < \mu(B(x,r)) \le L\mu(E)$.

Условие соизмеримости имеет достаточно общий характер, и несложно проверить, что данное свойство будет выполняться, к примеру, и для мер, удовлетворяющих условию удвоения, и в случае, когда мера шара произвольным непрерывным образом зависит от радиуса.

Метод доказательства теорем вложения для пространств Соболева — Хайлаша, используемый в работе [4] для случая s-регулярных мер, позволяет получить аналогичные теоремы вложения для пространств $W_{s,p}$, причем без каких-либо дополнительных предположений о мере и метрике.

Символами $C, C', C_1, \cdots$ будем обозначать постоянные, связанные с фиксированным пространством $W_{s,p}(X,d,\mu)$ и не зависящие от выбора конкретной функции f, принадлежащей данному пространству. Чтобы избежать громоздкости, мы иногда будем использовать один и тот же символ для обозначения различных постоянных.

Теорема 2. *Пусть* $f \in W_{s,p}(X,d,\mu)$.

1. *Если* $p < s$, *то* $f \in L_q(\mu)$, *где* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$, *и*

$$\|f \mid L_q(\mu)\| \le C\|f \mid W_{s,p}\|.$$

2. *Если* $p = s$, *то существуют постоянные* C_1 *и* C_2 *такие, что*

$$\int\limits_X \exp\left(C_1 \frac{|f - f_X|}{\|f \mid L_{s,p}\|}\right) d\mu \le C_2.$$

3. *Если* $p > s$, *то*

$$\|f - f_X \mid L_\infty\| \le C\|f \mid L_{s,p}\|.$$

Доказательство. Вначале получим общие оценки максимума функции f на множествах уровня допустимой функции h, а затем отдельно рассмотрим каждый из трех случаев.

В случае, когда $\|f \mid L_{s,p}\| = 0$, утверждения теоремы очевидны, поэтому далее будем предполагать, что $\|f \mid L_{s,p}\| > 0$. Пусть h_0 — допустимая функция для f такая, что

$$\|h_0 \mid L_p\| \le 2\|f \mid L_{s,p}\|.$$

Нам будет удобнее использовать строго положительную допустимую функцию $h(x) = h_0(x) + \|h_0 \mid L_p\|$. Поскольку $\mu(X) < \infty$, то

$$\|h \mid L_p\| \le C\|h_0 \mid L_p\| \le 2C\|f \mid L_{s,p}\|.$$

Рассмотрим множества уровня $E_k = \{x \in X \mid h(x) \le 2^k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, допустимой функции h и заметим, что

$$\int\limits_X h^p\, d\mu \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kp}\mu(E_k \setminus E_{k-1}) \le 2^p \int\limits_X h^p\, d\mu.$$

Фиксируем номер k_0 такой, что $\mu(E_{k_0}) \ge \frac{1}{2}\mu(X)$, $\mu(E_{k_0-1}) < \frac{1}{2}\mu(X)$ и, следовательно, $\mu(X \setminus E_{k_0-1}) > \frac{1}{2}\mu(X)$.

Оценим значение k_0. Поскольку $\mu(X \setminus E_{k_0-1}) > \frac{1}{2}\mu(X)$, из неравенства Чебышева

$$\mu(X \setminus E_{k-1}) \le \frac{\|h \mid L_p\|^p}{2^{p(k-1)}} \tag{6}$$

получаем

$$2^{k_0} \le C\|h \mid L_p\|(\mu(X))^{-1/p} \le C'\|h \mid L_p\|. \tag{7}$$

С другой стороны, по построению для допустимой функции имеем $h \ge \|h_0 \mid L_p\|$ всюду, поэтому из условия $\mu(E_{k_0}) \ge \frac{1}{2}\mu(X)$ следует, что

$$2^{k_0} \ge \|h_0 \mid L_p\| \ge C''\|h \mid L_p\|. \tag{8}$$

Пусть $a_k = \sup_{E_k} |f|$ и $b_k = \inf_{E_k} |f|$. Очевидно, что

$$b_{k_0} \le (\mu(E_{k_0}))^{-1/p}\|f \mid L_p\| \le C'(\mu(X))^{-1/p}\|f \mid L_p\| = C\|f \mid L_p\|.$$

Так как мера произвольного шара не превосходит меры всего пространства, а функция h на множестве E_{k_0} ограничена сверху постоянной 2^{k_0}, из оценки приращения функции f и неравенства (7) получаем

$$a_{k_0} \le b_{k_0} + 2^{k_0+1}(\mu(X))^{1/s} \le C\|f \mid L_p\| + 2\mathrm{C}'(\mu(X))^{1/s}\|h \mid L_p\| \le C_0\|f \mid Ws,p\|. \tag{9}$$

Оценим значение a_k при $k > k_0$. Рассмотрим произвольную точку $x \in E_k \setminus E_{k-1}$. Из условия соизмеримости вытекает, что существует такой шар $B(x,r)$, что

$$\mu(X \setminus E_{k-1}) < \mu(B(x,r)) \le L\mu(X \setminus E_{k-1}).$$

Значит, найдется точка $\bar{x} \in B(x,r) \cap E_{k-1}$. Из оценки приращения функции f следует, что

$$|f(x)| \le |f(x) - f(\bar{x})| + |f(\bar{x})| \le C'(\mu(X \setminus E_{k-1}))^{1/s}\, 2^k + a_{k-1}.$$

Используя неравенство Чебышева (6), получаем

$$a_k \le C2^{k(1-p/s)}\|h \mid L_p\|^{p/s} + a_{k-1}. \tag{10}$$

Теперь мы можем доказать сформулированные в условии теоремы вложения.

1. Пусть $p < s$. Тогда $1 - p/s > 0$ и при $k > k_0$ выполняется неравенство

$$\sum_{m=k_0}^{k} 2^{m(1-p/s)} < \sum_{m=-\infty}^{k} 2^{m(1-p/s)} = C\, 2^{k(1-p/s)},$$

где постоянная C зависит только от p и s.

Очевидно, что $a_k \le a_{k_0}$ при $k \le k_0$, а при $k > k_0$ из неравенства (10) следует, что

$$a_k \le C\|h \mid L_p\|^{p/s}\left(\sum_{m=k_0}^{k} 2^{m(1-p/s)}\right) + a_{k_0} \le C' 2^{k(1-p/s)}\|h \mid L_p\|^{p/s} + a_{k_0}.$$

Учитывая равенства $q(1 - \frac{p}{s}) = p$, $\frac{qp}{s} + p = q$ и неравенство (9), получаем

$$\int\limits_X |f|^q\, d\mu \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^q \mu(E_k \setminus E_{k-1})$$
$$\le \widehat{C}\left(\|h \mid L_p\|^{qp/s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kq(1-p/s)}\,\mu(E_k \setminus E_{k-1}) + a_{k_0}^q\mu(X)\right)$$
$$\le \widehat{C}(C'\|h \mid L_p\|^{qp/s}\|h \mid L_p\|^p + C''\|f \mid W_{s,p}\|^q) \le C\|f \mid W_{s,p}\|^q.$$

2. Пусть $p = s$. Достаточно доказать требуемое неравенство в случае, когда $f_X = 0$ и $\|f \mid L_{s,s}\| = 1$. Из неравенства Пуанкаре вытекает, что в данном случае $\|f \mid W_{s,s}\| \le \overline{C} < \infty$. Пусть допустимая функция h такова, что $\|h \mid L_s\| \le 2\|f \mid L_{s,s}\| = 2$. В силу монотонности $a_k \le a_0$ при $k \le 0$, а при $k > 0$ из неравенства (10) получаем $a_k \le C'k + a_0$. Несложно оценить сверху постоянную a_0.

Если $k_0 \ge 0$, то из неравенства (9) имеем

$$a_0 \le a_{k_0} \le C_0\|f \mid Ws, s\| \le C_0\overline{C} \le C.$$

Если $k_0 < 0$, то $\mu(E_0) \ge \mu(E_{k_0}) \ge \frac{1}{2}\mu(X)$ и, следовательно,

$$a_0 \le b_0 + 2(\mu(X))^{1/s} \le \|f \mid L_s\|(\mu(E_0))^{-1/s} + 2(\mu(X))^{1/s} \le C.$$

Положим $\exp(C_1C') = 2^s$. Тогда

$$\int\limits_X \exp\left(C_1\frac{|f - f_X|}{\|f \mid L_{s,s}\|}\right)d\mu = \int\limits_X \exp(C_1|f|)\, d\mu$$
$$= \int\limits_{E_0} \exp(C_1|f|)\, d\mu + \int\limits_{X\setminus E_0} \exp(C_1|f|)\, d\mu$$
$$\le e^{C_1a_0}\mu(X) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{C_1(C'k+a_0)}\mu(E_k \setminus E_{k-1})$$
$$\le e^{C_1C}\mu(X) + e^{C_1a_0}\sum_{k=1}^{\infty} e^{ks}\mu(E_k \setminus E_{k-1}) \le e^{C_1C}(\mu(X) + 2\|h \mid L_s\|) \le C_2.$$

3. Пусть $p > s$. Без ограничения общности можно считать, что $f_X = 0$. При $p = \infty$ утверждение очевидно, а при $s < p < \infty$ достаточно оценить сверху

значения a_k для $k > k_0$. Замечая, что в данном случае $1-p/s < 0$, из неравенств (8) и (10) получаем

$$a_k \le C\|h \mid L_p\|^{p/s}\left(\sum_{m=k_0+1}^{\infty} 2^{m(1-p/s)}\right) + a_{k_0} \le C'\|h \mid L_p\| + a_{k_0}.$$

В свою очередь, из неравенства (9) и неравенства Пуанкаре (5) следует

$$a_{k_0} \le C_0\|f \mid Ws,p\| \le C_0'\|h \mid L_p\|,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Формулировка теоремы 2 из формулировки теоремы 1 получается практически формальной заменой символа HW_p^1 символом $W_{s,p}$. Доказательство теоремы 2 повторяет оригинальную схему П. Хайлаша доказательства теоремы 1. Тем более неожиданным оказывается тот факт, что внутреннее содержание получаемых в теоремах 1 и 2 результатов в общем случае оказывается весьма различным даже для функций, одновременно принадлежащих пространствам Соболева — Хайлаша и пространствам $W_{s,p}$. Продемонстрируем на конкретных примерах различие между рассматриваемыми в работе классами функций и пространствами Соболева — Хайлаша в случаях, когда нет двусторонней степенной оценки меры шара через его радиус.

Пример 1. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ экспоненциальный нулевой угол

$$D = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid 0 \le x_1 \le 1,\, 0 \le x_2 \le e^{-\frac{1}{x_1}}\}$$

со стандартной евклидовой метрикой и мерой Лебега, т. е. $X = D$, $d(x,y) = \|x-y\|$, $d\mu = dx_1\,dx_2$. В данном случае не существует степенной оценки снизу для меры шара с центром в начале координат через его радиус, так как для любого $s > 0$ выполняется оценка $\mu(B(0,r)) = o(r^s)$, $r \to 0$. Для пространств Соболева — Хайлаша $HW_p^1(D, \|x-y\|, dx\,dy)$ в этом случае не удается получить никаких теорем вложения. Объясняется это тем, что в данной ситуации условие $|f(x)-f(y)| \le \|x-y\|(g(x)+g(y))$ оказывается «слишком слабым», а в результате пространство $HW_p^1(D, \|x-y\|, dxdy)$ получается «слишком широким». Оно содержит функции, имеющие в окрестности начала координат экспоненциальный рост, и максимальная степень суммируемости таких функций будет совпадать со степенью суммируемости соответствующих допустимых функций g.

Пространство $W_{s,p}(D, \|x-y\|, dxdy)$ оказывается в данном случае более узким, чем пространство Соболева — Хайлаша, и для него уже будут выполняться соответствующие теоремы вложения.

Пример 2. Рассмотрим единичный шар $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ со стандартной евклидовой метрикой $d(x,y) = \|x-y\|$ и весовой мерой, задаваемой в полярных координатах равенством $d\mu = \varrho^{-1/2}d\varrho\,d\varphi$.

Если точка $x \in B$ отлична от начала координат, то для шаров с центром в этой точке выполняется оценка $\mu(B(x,r)) \sim \|x\|^{-3/2}\pi r^2$, $r \to 0$. Поэтому одновременно на всем шаре $B(0,1)$ оценка $\mu(B(x,r)) \ge b{\cdot}r^s$ может выполняться лишь при $s \ge 2$. При этом для шаров с центром в начале координат $\mu(B(0,r)) \sim Cr^{1/2}$, $r \to 0$.

В данной ситуации условие $|f(x) - f(y)| \le \|x-y\|(g(x) + g(y))$ оказывается «слишком жестким», в результате пространства Соболева — Хайлаша

$HW^1_p(B, \|x-y\|, \mu)$ получаются «слишком узкими», а вложения, описываемые теоремой 1, не совсем точными.

Рассмотрим семейство функций $f_\alpha(\varrho, \varphi) = f_\alpha(\varrho) = \varrho^\alpha$ и проверим условия принадлежности таких функций соответствующим пространствам Соболева — Хайлаша $HW^1_p(B, \|x-y\|, \mu)$. Нас будет интересовать случай, когда $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$, поскольку при $\alpha \geq 1$ функции f_α будут уже липшицевыми, а при $\alpha \leq -\frac{1}{2}$ функции f_α перестают быть суммируемыми по мере μ.

Единственность экстремальной допустимой функции при $p > 1$, симметрия области определения, меры и самих функций f_α позволяют нам ограничиться рассмотрением допустимых функций, зависящих только от расстояния до начала координат.

Из оценки

$$|f_\alpha(2\varrho) - f_\alpha(\varrho)| = C\varrho^\alpha \leq \varrho(g_\alpha(2\varrho) + g_\alpha(\varrho))$$

следует, что

$$g_\alpha(2\varrho) + g_\alpha(\varrho) \geq C\varrho^{\alpha-1}.$$

Поскольку

$$\int\limits_{B(0,1/2)} g^p_\alpha(2\varrho)\, d\mu = C_1 \int\limits_{B(0,1)} g^p_\alpha(\varrho)\, d\mu,$$

получаем

$$\|g_\alpha \mid L_p(\mu)\|^p \geq C_2 \int\limits_0^1 \frac{d\varrho}{\varrho^{1/2}\varrho^{p(1-\alpha)}}.$$

Таким образом, при $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ функции f_α принадлежат $L_\infty(\mu)$, но вообще не попадают в шкалу пространств Соболева — Хайлаша $HW^1_p(B, \|x-y\|, \mu)$ с $p \geq 1$. При $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$ функция f_α принадлежит $HW^1_p(B, \|x-y\|, \mu)$ для показателей $p < \frac{1}{2(1-\alpha)} < 2$. К примеру, $f_{2/3} \in HW^1_p(B, \|x-y\|, \mu)$ только при $p < \frac{3}{2}$, следовательно, теорема 1 о вложении пространств Соболева — Хайлаша в пространства Лебега для функции $f_{2/3} \in L_\infty(\mu)$ может гарантировать лишь принадлежность пространствам Лебега $L_q(\mu)$ при $q < 6$.

Положим, как и для пространств Соболева — Хайлаша, $s = 2$ и проверим принадлежность функций f_α пространствам $W_{2,p}(B, \|x-y\|, \mu)$. Пусть $x, y \in B$ и $0 \leq \|y\| = r < R = \|x\| < 1$, тогда

$$M(x,y) \geq \mu(B(x, R-r)) \geq \int\limits_{B(x,R-r)} \frac{\varrho\, d\varrho\, d\varphi}{\varrho^{3/2}} \geq C\frac{(R-r)^2}{(2R-r)^{3/2}} \geq C_1\frac{(R-r)^2}{R^{3/2}}.$$

Установим оценки для допустимых функций, удовлетворяющих неравенству

$$|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| \leq (M(x,y))^{1/2}(h_\alpha(x) + h_\alpha(y)).$$

Пусть $0 < \alpha < 1$. Обозначая $\frac{r}{R} = t$ и учитывая неравенство $1 - t^\alpha \leq 1 - t$, получаем

$$\frac{|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|}{(M(x,y))^{1/s}} \leq C_2\frac{(R^\alpha - r^\alpha)R^{3/4}}{R-r} \leq C_2 R^{\alpha-1/4}\left(\frac{1-t^\alpha}{1-t}\right) \leq C_2 R^{\alpha-1/4}.$$

Следовательно, функция $h_\alpha(\varrho) = C_2\varrho^{\alpha-1/4}$ является допустимой для функции f_α.

При $\alpha \geq \frac{1}{4}$ функция h_α принадлежит $L_\infty(\mu)$, при $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ функция h_α принадлежит $L_p(\mu)$ для любого $p \in (2, \frac{2}{1-4\alpha})$. Таким образом, в отличие от теоремы 1 при всех $\alpha > 0$ из теоремы 2, как и полагается, следует принадлежность функций f_α пространству $L_\infty(\mu)$.

Пусть теперь $-\frac{1}{4} < \alpha < 0$. Аналогично предыдущему случаю получаем

$$\frac{|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|}{(M(x,y))^{1/s}} \leq C_2 \frac{(r^\alpha - R^\alpha)R^{3/4}}{R - r} \leq C_2 r^\alpha R^{-1/4} \left(\frac{1 - t^{|\alpha|}}{1 - t} \right) \leq C_2 r^{\alpha - 1/4}.$$

Функция $h_\alpha(\varrho) = C_2 \varrho^{\alpha - 1/4}$ вновь оказывается допустимой для функции f_α. При этом $h_\alpha \in L_p(\mu)$ для любого $p \in (1, \frac{2}{1-4\alpha})$, а теорема 2 дает оптимальную оценку для показателя суммируемости: $q < \frac{1}{2|\alpha|}$.

Замечание. Конечно, в конкретной модельной ситуации примера 2 при $0 < \alpha < 1$ мы могли рассмотреть семейство пространств Соболева — Хайлаша с гёльдеровыми метриками $d_\alpha(x,y) = \|x - y\|^\alpha$, относительно которых соответствующие функции f_α являются просто липшицевыми. Однако можно заметить, что, во-первых, не очень понятна возможность подобной перестройки метрики в более общей ситуации, поскольку, вообще говоря, функция $M^{1/s}(x,y)$ не обязана удовлетворять условию треугольника, во-вторых, при замене евклидовой метрики гёльдеровой происходит существенное изменение как нормы, так и множества функций, составляющих пространство Соболева — Хайлаша, в то время как пространство $W_{p,s}$ остается инвариантным при такой замене метрики.

Если считать, что «гладкость» функций в пространствах Соболева — Хайлаша определяется метрикой, то пространства $W_{p,s}$ можно воспринимать как пространства с переменной гладкостью, зависящей от строения меры в окрестности данной точки.

§ 3. Меры с условием удвоения

Далее будем предполагать, что конечная регулярная борелевская мера μ удовлетворяет условию удвоения, т. е. существует такая постоянная $1 < C_d < \infty$, что

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_d \mu(B(x, r))$$

при всех $x \in X$ и $r > 0$.

Поскольку в данном случае мера замкнутого шара оценивается сверху через меру открытого шара, то не имеет принципиального значения, замкнутые или открытые шары рассматривать при определении величины $M(x,y)$.

Оценка изменения меры шара при увеличении его радиуса в два раза позволяет получить аналог леммы Витали о покрытии и, как следствие, стандартный набор фактов, основанных на применении этой леммы, в частности теорему Лебега о дифференцировании интеграла и ограниченность максимального оператора

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f| \, d\mu$$

в пространствах $L_p(\mu)$ при $p > 1$ [7].

Для локально интегрируемой функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ и $s > 0$ уточненную максимальную функцию $f^{\#}_{s,\mu}$ определим равенством

$$f^{\#}_{s,\mu}(x) = \sup_{r>0}(\mu(B(x,r))^{-1/s} \fint_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|\, d\mu.$$

Небольшие изменения в доказательстве соответствующего утверждения для пространств Соболева — Хайлаша [5] позволяют получить оценку приращения функции через значения уточненной максимальной функции порядка s. В доказательстве нам потребуются специальные системы шаров, мера которых изменяется контролируемым образом. Поэтому покажем вначале существование систем шаров нужного нам вида.

Предложение 1. *Для произвольных шаров $B(x,\varrho)$ и $B(x,R)$, $\varrho < R$, существует конечная убывающая система шаров $\{B_k = B(x,r_k)\}$, $k = 0,1,\dots k_0$, такая, что*

$$B_0 = B(x,R),\ B_{k_0} = B(x,\varrho), \quad \mu(B_{k+1}) \ge C_d^{-2}\mu(B_k), \quad \mu(B_k) \le C_d^{1-k}\mu(B_0).$$

Доказательство. Пусть $k_0 \in \mathbb{N}$ и

$$C_d^{k_0-1}\mu(B(x,\varrho)) \le \mu(B(x,R)) < C_d^{k_0}\mu(B(x,\varrho)).$$

Положим $B_0 = B(x,R)$ и рассмотрим последовательность двоичных шаров $B(x,2^{-m}R)$. Для любого $k \in \mathbb{N}$, $k < k_0$, найдется такой номер m_k, что

$$\mu(B(x,2^{-m_k}R)) \le C_d^{-k}\mu(B(x,R)) < \mu(B(x,2^{-m_k+1}R)).$$

Положим $B_k = B(x,2^{-m_k}R))$ и $B_{k_0} = B(x,\varrho)$.

Из условия удвоения и способа построения соответствующих шаров B_k следует, что

$$\begin{aligned}\mu(B_{k+1}) = \mu(B(x,2^{-m_{k+1}}R))) \ge C_d^{-1}\mu(B(x,2^{-m_{k+1}+1}R))) > C_d^{-k-2}\mu(B(x,R))\\ = C_d^{-2}\big(C_d^{-k}\mu(B(x,R))\big) \ge C_d^{-2}\mu(B(x,2^{-m_k}R)) = C_d^{-2}\mu(B_k).\end{aligned}$$

С другой стороны, шары B_k выбирались так, что при $k < k_0$

$$\mu(B_k) \le C_d^{-k}\mu(B_0)$$

и

$$\mu(B_{k_0}) \le C_d^{1-k_0}\mu(B_0).$$

Замечание. Построенная в предложении убывающая система шаров в общем случае не будет двоичной, но будет обладать двумя важными для нас свойствами:

1) меры шаров оцениваются сверху геометрической прогрессией;

2) меры двух последовательных шаров системы сравнимы между собой.

Лемма 1. *Пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — локально интегрируемая функция, тогда существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство*

$$|f(x) - f(y)| \le C(M(x,y))^{1/s}\big(f^{\#}_{s,\mu}(x) + f^{\#}_{s,\mu}(y)\big) \tag{11}$$

выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$.

Доказательство. Пусть $x, y \in X$ — точки Лебега функции f, $R = d(x, y)$ и $M(x, y) = \mu(B(x, R))$. Если $f^{\#}_{s,\mu}(x) = 0$, то функция f эквивалентна постоянной и для нее утверждение леммы тривиально. Поэтому будем предполагать, что $f^{\#}_{s,\mu}(x) > 0$.

Поскольку точка x является точкой Лебега функции f, существует $0 < \varrho_0 < R$ такое, что при всех $\varrho \le \varrho_0$

$$|f(x) - \fint_{B(x,\varrho)} f\, d\mu| \le (\mu(B(x,R)))^{1/s} f^{\#}_{s,\mu}(x).$$

Рассмотрим систему шаров $\{B_k = B(x, r_k)\}$, $k = 1, \dots, k_0$, построенную по предложению 1 для шаров $B(x, R)$ и $B(x, \varrho_0)$.

Несложно оценить разность средних значений функции f на двух последовательных шарах:

$$\begin{aligned}
|f_{B_{k+1}} - f_{B_k}| &\le \frac{1}{\mu(B_{k+1})} \int_{B_{k+1}} |f - f_{B_k}|\, d\mu \\
&\le \frac{\mu(B_k)}{\mu(B_{k+1})} \fint_{B_k} |f - f_{B_k}|\, d\mu \le C_d^2 (\mu(B_k))^{1/s} \frac{1}{(\mu(B_k))^{1/s}} \fint_{B_k} |f - f_{B_k}|\, d\mu \\
&\le C_1(\mu(B(x,R))^{1/s} C_d^{-k/s} f^{\#}_{s,\mu}(x).
\end{aligned}$$

Учитывая эту оценку, получаем

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_{B(x,R)}| &\le |f(x) - f_{B(x,\varrho_0)}| + \sum_{k=0}^{k_0-1} |f_{B_{k+1}} - f_{B_k}| \\
&\le (\mu(B(x,R)))^{1/s} f^{\#}_{s,\mu}(x) + C_1(\mu(B(x,R))^{1/s} f^{\#}_{s,\mu}(x) \sum_{k=0}^{k_0-1} C_d^{-k/s} \\
&\le C_2(\mu(B(x,R))^{1/s} f^{\#}_{s,\mu}(x) = C_2(M(x,y))^{1/s} f^{\#}_{s,\mu}(x).
\end{aligned}$$

Поскольку $B(y, R) \subset B(x, 2R)$, из условия удвоения следует, что $\mu(B(y,R)) \le \mu(B(x,2R)) \le C_d \mu(B(x,R))$. Оценим разность значения функции f в точке y и среднего значения функции f по шару с центром в точке x:

$$\begin{aligned}
|f(y) - f_{B(x,R)}| &\le |f(y) - f_{B(y,R)}| + |f_{B(y,R)}| - f_{B(x,R)}| \\
&\le |f(y) - f_{B(y,R)}| + |f_{B(y,R)}| - f_{B(x,2R)}| + |f_{B(x,2R)}| - f_{B(x,R)}| \\
&\le C_2(\mu(B(y,R))^{1/s} f^{\#}_{s,\mu}(y) + 2C_2(\mu(B(x,2R))^{1/s} f^{\#}_{s,\mu}(x) \\
&\le (M(x,y))^{1/s} \big(C_2 f^{\#}_{s,\mu}(y) + C_3 f^{\#}_{s,\mu}(x)\big).
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f_{B(x,R)}| + |f(y) - f_{B(x,R)}| \\
&\le C(M(x,y))^{1/s} \big(f^{\#}_{s,\mu}(x) + f^{\#}_{s,\mu}(y)\big).
\end{aligned}$$

Теперь мы можем получить описание функций, принадлежащих пространствам $L_{s,\mu}$ и $W_{s,\mu}$, в терминах уточненных максимальных функций. Поскольку как множества функций данные пространства совпадают, достаточно получить описание одного из них.

Теорема 3. *При* $1 < p \le \infty$ *для локально интегрируемой функции* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *следующие условия эквивалентны:*

1) $f \in L_{s,p}(X, d, \mu)$;

2) *существует функция* $g \in L_p(\mu)$ *такая, что неравенство Пуанкаре*

$$\fint\limits_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}|\, d\mu \le (\mu(B(x,r)))^{1/s} \fint\limits_{B(x,r)} g\, d\mu \tag{12}$$

выполняется для всех $x \in X$ *и* $r > 0$;

3) $f^{\#}_{s,\mu} \in L_p(\mu)$.

Доказательство. $1 \Longrightarrow 2$. Пусть $f \in W_{s,p}(X, d, \mu)$ и $h \in D_p(f)$. Тогда для почти всех $x, y \in B(x_0, r)$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \le (\mu(B(x_0, 2r))^{1/s}(h(x) + h(y)).$$

Дважды интегрируя данное неравенство по шару $B(x_0, r)$ и учитывая условие удвоения, получаем

$$\fint\limits_{B(x_0,r)} |f - f_{B(x,r)}| d\mu \le (\mu(B(x_0, r))^{1/s} \fint\limits_{B(x_0,r)} Ch\, d\mu,$$

где постоянная C не зависит от выбора точки x_0 и радиуса шара.

$2 \Longrightarrow 3$. Из неравенства Пуанкаре (12) следует, что $f^{\#}_{s,\mu}(x) \le M(g)(x)$. Поскольку при $p > 1$ максимальный оператор ограничен в $L_p(\mu)$, то

$$\left\|f^{\#}_{s,\mu} \mid L_p\right\| \le \|M(g) \mid L_p\| \le C\|g \mid L_p\|.$$

$3 \Longrightarrow 1$. Данное утверждение является непосредственным следствием определения пространства $L_{s,p}$ и леммы 1.

Далее символом g будем обозначать удовлетворяющую неравенству Пуанкаре (12) функцию с наименьшей L_p-нормой.

Следствие. *Для произвольной функции* $f \in W_{s,p}(X, d, \mu)$

$$\|f \mid L_{s,p}\| \sim \|g \mid L_p\| \sim \left\|f^{\#}_{s,\mu} \mid L_p\right\|$$

и

$$\|f \mid W_{s,p}\| \sim \|f \mid L_p\| + \|g \mid L_p\| \sim \|f \mid L_p\| + \left\|f^{\#}_{s,\mu} \mid L_p\right\|.$$

Утверждение, сформулированное в следствии, непосредственно вытекает из доказательства теоремы 3.

Описание рассматриваемых классов функций через уточненные максимальные функции позволяет довольно просто получить результат, аналогичный теореме 1 работы [8] и характеризующий взаимосвязь пространств $L_{s,p}$ с различными показателями суммируемости и «гладкости».

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $s < l < \infty$. *Тогда пространство* $L_{s,p}(X, d, \mu)$ *непрерывно вложено в пространство* $L_{l,q}(X, d, \mu)$, *где* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} - \frac{1}{s}$ *при* $\frac{1}{p} > \frac{1}{s} - \frac{1}{l}$ *и* $q = \infty$ *при* $0 < \frac{1}{p} \le \frac{1}{s} - \frac{1}{l}$.

Доказательство. Согласно лемме 1 и теореме 3 достаточно показать, что из принадлежности функции f пространству $L_{s,p}(X, d, \mu)$ следует включение $f^{\#}_{l,\mu} \in L_q(\mu)$.

Пусть $f^{\#}_{l,\mu}(x) = \lambda$. Выберем шар $B(x, r_0)$ так, что

$$(\mu(B(x,r_0)))^{-1/l} \fint_{B(x,r_0)} |f - f_{B(x,r_0)}|\, d\mu \geq \frac{\lambda}{2}.$$

Тогда

$$\lambda(\mu(B(x,r_0))^{1/l-1/s} \leq 2(\mu(B(x,r_0))^{-1/s} \fint_{B(x,r_0)} |f - f_{B(x,r_0)}|\, d\mu \leq 2f^{\#}_{s,\mu}(x). \tag{13}$$

С другой стороны, применяя к неравенству Пуанкаре (12) неравенство Гёльдера, получаем

$$\frac{\lambda}{2} \leq (\mu(B(x,r_0))^{-1/l} \fint_{B(x,r_0)} |f - f_{B(x,r_0)}|\, d\mu \leq (\mu(B(x,r_0)))^{1/s-1/l-1} \int_{B(x,r_0)} g\, d\mu$$
$$\leq (\mu(B(x,r_0)))^{1/s-1/l-1/p} \|g \mid L_p\|. \tag{14}$$

Из неравенства (14) при $0 < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{s} - \frac{1}{l}$ сразу следует оценка

$$\left\|f^{\#}_{l,\mu} \mid L_\infty(\mu)\right\| \leq (\mu(X))^{1/s-1/l-1/p} \|g \mid L_p\|.$$

С другой стороны, из неравенства (14) вытекает, что при $\frac{1}{p} > \frac{1}{s} - \frac{1}{l}$ выполняется неравенство

$$(\mu(B(x,r_0))^{-1} \geq C\lambda^q \|g \mid L_p\|^{-q}.$$

Подставляя эту оценку в неравенство (13), получаем

$$C\lambda^{1+q(1/s-1/l)} \|g \mid L_p\|^{q(1/s-1/l)} \leq f^{\#}_{s,\mu}(x)$$

или

$$C\lambda^{q/p} \leq \|g \mid L_p\|^{q/p-1} f^{\#}_{s,\mu}(x).$$

Следовательно,

$$\left(f^{\#}_{l,\mu}(x)\right)^q \leq C' \|g \mid L_p\|^{q-p} \left(f^{\#}_{s,\mu}(x)\right)^p.$$

Таким образом, $f^{\#}_{l,\mu} \in L_q(\mu)$ и $\|f \mid L_{l,q}\| \leq C\|f \mid L_{s,p}\|$, что и завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gol'dshtein V. M., Troyanov M.* Axiomatic theory of Sobolev spaces // Expo. Math. 2001. V. 19, N 4. P. 289–336.
2. *Hajasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincare // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 688. P. 1–101.
3. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. New York: Springer-Verl., 2001. (Universitext).
4. *Hajasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
5. *Hajasz P., Kinnunen J.* Holder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces // Rev. Mat. Iberoamericana. 1998. V. 14, N 3. P. 601–622.
6. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
7. *Stromberg J. O., Torchinsky A.* Weighted Hardy spaces. Berlin etc.: Springer-Verl., 1989. (Lecture Notes in Math.; 1381).
8. *Романов А. С.* О теоремах вложения для обобщенных пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 931–937.

Статья поступила 25 июня 2003 г.

Романов Александр Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
asrom@math.nsc.ru