Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 512.554.5

НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ АЛЬТЕРНАТОРНОГО ИДЕАЛА КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННОЙ БИНАРНО (–1,1)–АЛГЕБРЫ

С. В. Пчелинцев

Аннотация: Проводится доказательство нильпотентности альтернаторного идеала конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебры. Алгебра называется *бинарно* $(-1,1)$-*алгеброй*, если всякая ее 2-порожденная подалгебра является алгеброй типа $(-1,1)$. По ходу доказательства основной теоремы получены разнообразные следствия: первичная конечно порожденная бинарно $(-1,1)$-алгебра альтернативна; радикал Михеева произвольной бинарно $(-1,1)$-алгебры совпадает с локально нильпотентным радикалом; простая бинарно $(-1,1)$-алгебра альтернативна; радикал свободной конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебры разрешим. Кроме того, из основного результата выводится нильпотентность радикала конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебры с существенным тождеством.

Ключевые слова: ассоциатор, бинарно $(-1,1)$-алгебра, нильпотентная алгебра, первичная алгебра.

Введение

Работа посвящена доказательству нильпотентности альтернаторного идеала конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебры. Вопрос о справедливости этого утверждения был записан автором в «Днестровской тетради» [1, вопрос 3.61]. Для $(-1,1)$-алгебр эта теорема была доказана в [2]. Статья состоит из восьми параграфов. В § 1 приведены основные определения, обозначения и известные тождества. В § 2–7 доказывается

Основная теорема. *Во всякой конечно порожденной бинарно* $(-1,1)$-*алгебре над полем характеристики, отличной от* 2, 3, *идеал, порожденный альтернаторами, нильпотентен в смысле Пенико.*

В § 2 доказано, что в конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебре итерированные альтернаторы $x\Delta(a_1)\dots\Delta(a_N)$, где $x\Delta(a) := (a,a,x)$, достаточно высокой степени N равны нулю. Отсюда, в частности, вытекает бесконечность базисного ранга многообразия бинарно $(-1,1)$-алгебр [3].

В § 3 для конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебры доказана ассоциаторная нильпотентность множества D_x итерированных альтернаторов вида $x\Delta(a_1)\dots\Delta(a_s)$.

В § 4 получена теорема об ограниченности мультипликативной длины конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебры. Ограниченность мультипликативной длины для альтернативных алгебр была доказана И. П. Шестаковым [4, 5], а для йордановых алгебр — В. Г. Скосырским [6]. Для $(-1,1)$-алгебр эта теорема является тривиальным следствием результатов работы [2].

В § 5 доказана эквивалентность понятий нильпотентности и Пенико-нильпотентности идеалов произвольной бинарно $(-1,1)$-алгебры. Заметим, что для альтернативных алгебр, как и для $(-1,1)$-алгебр, этот результат очевиден, поскольку в них степень идеала является идеалом.

Начиная с § 6 большинство полученных результатов относится к конечно порожденным бинарно $(-1,1)$-алгебрам. Так, в § 6 сначала доказывается, что альтернаторный идеал нильпотентен по модулю наибольшего идеала алгебры, содержащегося в линейном пространстве, порожденном альтернаторами, а затем доказывается Пенико-разрешимость альтернаторного идеала. Отсюда выводятся разнообразные следствия о строении бинарно $(-1,1)$-алгебр. В частности, доказаны следующие утверждения:

а) первичная конечно порожденная алгебра альтернативна;

б) радикал Михеева совпадает с локально нильпотентным радикалом;

в) простая алгебра альтернативна;

г) радикал свободной конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебры разрешим.

В § 7 сначала доказывается правая нильпотентность альтернаторного идеала, а затем завершается доказательство основной теоремы.

Заключительный § 8 посвящен доказательству нильпотентности радикала конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебры, удовлетворяющей существенному тождеству. Нильпотентность радикала конечно порожденной ассоциативной PI-алгебры известна как теорема Размыслова — Кемера — Браун [7]. Для альтернативных и специальных йордановых PI-алгебр эта теорема принадлежит И. П. Шестакову [8]. В случае произвольных йордановых алгебр нильпотентность радикала доказана Ю. А. Медведевым [9]. Следует отметить, что доказательство нильпотентности радикала бинарно $(-1,1)$-алгебры использует результаты работ [7, 8, 10]. Отметим также, что данная статья является продолжением работы автора [3]. Там же указано состояние структурной теории бинарно $(-1,1)$-алгебр.

§ 1. Определения, обозначения, тождества

Как обычно, используются следующие обозначения: $[a,b]=ab-ba$ — коммутатор, $a\circ b=ab+ba$ — йорданово произведение, $(a,b,c)=(ab)c-a(bc)$ — ассоциатор, (a,a,b) — альтернатор, $S(a,b,c)=(a,b,c)+(b,c,a)+(c,a,b)$ — функция Якоби для ассоциаторов, $J^{(-)}(a,b,c)=[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]$ — якобиан в присоединенной коммутаторной алгебре $A^{(-)}=\langle A;+;[,]\rangle$.

Определение 1. Алгебра характеристики, не равной 2, называется *правоальтернативной*, если она удовлетворяет тождеству $(x,y,y)=0$.

Определение 2. Правоальтернативная алгебра характеристики, не равной 2, 3, называется $(-1,1)$-*алгеброй*, если ее коммутаторная алгебра является алгеброй Ли, т. е. выполнено тождество $J^{(-)}(x,y,z)=0$.

Определение 3. Правоальтернативная алгебра характеристики, отличной от 2, 3, называется *бинарно* $(-1,1)$-*алгеброй*, если в ней выполнено тождество

$$[(x,x,y),y]=0. \tag{1}$$

Наряду с тождеством (1) справедливы все его линеаризации, в частности

$$[(x,x,y),z]+[(x,x,z),y]=0. \tag{2}$$

Напомним некоторые тождества, выполняющиеся в произвольной правоальтернативной алгебре [4]. Прежде всего справедливы простейшие следствия тождества правой альтернативности:

$$(a, x, y) + (a, y, x) = 0, \tag{3}$$

$$(a, x \circ y, z) + (a, y \circ z, x) + (a, z \circ x, y) = 0, \tag{4}$$

$$[a^2, b] = [a, b] \circ a + 2(a, a, b), \tag{5}$$

$$J^{(-)}(a, b, c) = 2S(a, b, c), \tag{6}$$

и правые тождества Муфанг:

$$(a, x, xs) = (a, x, s)x, \tag{7}$$

$$(a, x, ys) + (a, y, xs) = (a, x, s)y + (a, y, s)x. \tag{8}$$

Кроме того, выполнены тождества Клейнфелда [11]

$$(ab, x, y) + (a, b, [x, y]) = a(b, x, y) + (a, x, y)b, \tag{9}$$

$$((a, x, y), x, y) + (a, x, y)[x, y] = 0 \tag{10}$$

и тождество Тэди [12]

$$\begin{aligned}((a, b, c), x, y) &= ((a, x, y), b, c) + (a, (b, x, y), c)\\ &+ (a, b, (c, x, y)) + (a, b, c[x, y]) - (a, b, c)[x, y] - (a, b, [x, y])c.\end{aligned} \tag{11}$$

Как обычно, через $R(x)$ и $L(x)$ обозначаются операторы правого и левого умножений на элемент x соответственно, например $yL(x) = xy$; $T \in \{R, L\}$.

Введем следующие операторы:

$$H(x) = R(x) - L(x), \quad R(x, y) = R(x)R(y) - R(xy),$$
$$L(x, y) = L(xy) - L(y)L(x), \quad \Delta(x) = L(x^2) - L(x)^2,$$
$$\Delta(x, y) = \Delta(x + y) - \Delta(x) - \Delta(y) = L(x, y) + L(y, x).$$

Тождества (2)–(4) в операторной форме принимают вид

$$\Delta(x)H(y) = H(y\Delta(x)), \tag{12}$$

$$R(x) \circ R(y) = R(x \circ y), \tag{13}$$

$$R(x \circ y)R(z) + R(y \circ z)R(x) + R(z \circ x)R(y) = R((x \circ y)z + (y \circ z)x + (z \circ x)y). \tag{14}$$

Всюду в дальнейшем под «алгеброй» мы понимаем линейную алгебру над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3. Кроме того, если не оговорено противное, используются следующие обозначения: $\mathfrak{F}[X]$ — свободная бинарно $(-1, 1)$-алгебра с множеством $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ свободных порождающих; $\mathrm{Mon}[X]$ — множество одночленов над X алгебры $\mathfrak{F}[X]$; $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $(n \geq 2)$; A — бинарно $(-1, 1)$-алгебра; $K(A) = \{k \mid [k, A] = 0\}$ — коммутативный центр; $V(A) = \{v \mid (\forall a \in A) v\Delta(a) = 0\}$ — слабо альтернативный центр; Δ — множество операторов вида $\Delta(a, b)$; $R(A)$ — алгебра правых умножений, $T(A)$ — алгебра умножений алгебры A; Δ^* — подалгебра алгебры умножений $T(A)$, порожденная множеством Δ; $D_x = x \cup x\Delta^*$; если $S \subset A$, то $\Phi \cdot S$ — линейная оболочка множества S, а S^* — подалгебра алгебры A, порожденная множеством S; R_S и T_S — множества операторов вида $R(s)$ и $T(s)$ $(s \in S)$ соответственно; $R^A(S)$ и $T^A(S)$ — подалгебры алгебры умножений $T(A)$, порожденные соответственно множествами R_S и T_S.

Мы считаем известными основные понятия, связанные с тождествами и свободными алгебрами. Все необходимые факты можно найти в [4, гл. 1].

§ 2. Подалгебра D_x^*

2.1. Предварительные замечания.

Лемма 1. *Алгебра* Δ^* *удовлетворяет тождеству* $[x,y]z=0$.

Доказательство. Известно [13, тождество (19)], что

$$(x,x,(y,y,z))-(y,y,(x,x,z))\in K(A). \tag{15}$$

Поскольку ввиду тождества (5) $K(A)\subseteq V(A)$, из тождества (15) вытекает операторное равенство $[\Delta(a),\Delta(b)]\Delta(c)=0$. Используя внутренние дифференцирования ассоциативной алгебры Δ^*, получаем требуемое тождество. □

Лемма 2. $x^2\Delta\in\Phi\cdot x\Delta$. *В частности, элемент* $(x\circ y)\Delta(a,b)$ *является линейной комбинацией элементов того же состава вида* $x\Delta(r,s)$ *и* $y\Delta(r,s)$.

Доказательство. При доказательстве леммы знак $\equiv$ используется для обозначения сравнения по модулю пространства $\Phi\cdot x\Delta$. Заметим, что $(y,z,x)+(z,y,x)\in\Phi\cdot x\Delta$. Применяя тождества (3) и (4), имеем

$$(x,a\circ x,a)=(x,x,a^2)=-(x,a^2,x)=-(x,a^2,x)-(a^2,x,x)\equiv 0,$$
$$(a\circ x,a,x)\equiv-(a,a\circ x,x)=(a,x,a\circ x).$$

Поскольку в алгебре A верно тождество $S(a,x,a\circ x)=0$ [12], в силу указанных сравнений получаем $2(a,x,a\circ x)\equiv 0$, значит, $(a,x,a\circ x)\equiv 0$ и $(a,a,x^2)\equiv 0$, что и завершает доказательство леммы. □

2.2. Ассоциативность и коммутативность подалгебры D_x^*. Следующая лемма доказана в [14] для первичных алгебр, однако небольшая модификация доказательства показывает, что это ограничение не является существенным.

Лемма 3. *Для каждого элемента* x *алгебра* D_x^* *ассоциативна и коммутативна.*

Доказательство. Достаточно проверить, что множество D_x ассоциативно и коммутативно. Из тождества (2) имеем

$$[y,z\Delta(a)]=-[z,y\Delta(a)]. \tag{16}$$

Докажем, что для любого одночлена δ из алгебры Δ^* справедливо равенство

$$[x,x\delta]=0. \tag{17}$$

Проведем индукцию по длине δ, считая, что δ не зависит от x. Основанием индукции является тождество (1). Предположим, что для любого $x\in A$ и данного оператора δ верно равенство (17). Тогда для любых y, z

$$[y,z\delta]=-[z,y\delta]. \tag{18}$$

Используя тождества (16), (18), лемму 1 и включения $A[\Delta(a),\Delta(b)]\subseteq K(A)\subseteq V(A)$, получаем

$$[x,x\delta\Delta(a)]=[x,x\Delta(a)\delta]=-[x\Delta(a),x\delta]=[x\delta\Delta(a),x]=-[x,x\delta\Delta(a)],$$

следовательно, $[x,x\delta\Delta(a)]=0$. Тем самым доказано, что (17) справедливо для любых $x\in A$ и $\delta\in\Delta^*$. Значит, на основании (18) имеем $[x\delta_1,x\delta_2]=-[x,x\delta_1\delta_2]=0$ для любых $\delta_1,\delta_2\in\Delta^*$, т. е. множество D_x коммутативно.

Докажем теперь, что множество D_x ассоциативно, т. е. $(x\delta_1, x\delta_2, x\delta_3) = 0$ для любых Δ-одночленов $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Прежде всего из тождеств (16), (17), леммы 2 и коммутативности множества D_x имеем

$$[x^2, x\delta\Delta(a)] = -[x\delta, x^2\Delta(a)] \in [x\delta, \Phi \cdot x\Delta] \subseteq \Phi[x\delta, x\Delta] = 0.$$

Отсюда на основании тождества (5) получаем $(x, x, x\delta) = 0$. Линеаризация по переменной x приводит к тождествам

$$(x\delta_1, x, x\delta_2) + (x, x\delta_1, x\delta_2) = 0, \quad (x\delta_1, x\delta_2, x\delta_3) + (x\delta_2, x\delta_1, x\delta_3) = 0,$$

значит, ассоциаторы $(x\delta_1, x\delta_2, x\delta_3)$ кососимметричны по переменным $x\delta_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Отсюда и из коммутативности множества D_x ввиду тождества (6) имеем $6(x\delta_1, x\delta_2, x\delta_3) = 0$, значит, $(x\delta_1, x\delta_2, x\delta_3) = 0$. Аналогично $(x, x\delta_1, x\delta_2) = 0$. Следовательно, множество D_x ассоциативно. □

2.3. Δ-нильпотентность конечно порожденных бинарно $(-1,1)$-алгебр.

Определение 4. Одночлены над X вида x_i, $x_i x_j$ $(i < j)$, $(x_i x_j)x_l$ назовем *правильными*. Множество правильных одночленов над X обозначим через $\pi(X)$, а через $p(n)$ обозначим число правильных одночленов над X_n $(n \geq 2)$.

Заметим, что $p(n) = n + \frac{n(n-1)}{2} + n^3 < 2n^3 - 1$.

Лемма 4 [14]. *Если $A = \mathfrak{F}[X]$, то $A^4 \subseteq \Phi \cdot \{a \circ b, v\Delta(a, b) \mid v \in \pi(X)\}$.*

Определение 5. Элементы вида $v\Delta(a, b)$, где $v \in \pi(X)$, $a, b \in \mathrm{Mon}[X]$, назовем *правильными альтернаторами ранга* 1.

Множество правильных альтернаторов ранга 1 обозначим через $\pi_a^1(X)$. Заметим, что множество $\pi_a^1(X_n)$ счетно в отличие от конечного множества $\pi(X_n)$ правильных одночленов.

Определение 6. Многочлены алгебры A вида

$$a\Delta(b_1, c_1)\Delta(b_2, c_2)\ldots\Delta(b_N, c_N)\Delta(r, s) \tag{19}$$

назовем *итерированными альтернаторами*, число операторов Δ в этом многочлене — его Δ-*степенью.* Итерированные альтернаторы назовем Δ-*нормальными*, если все одночлены b_i являются правильными, т. е. $b_i \in \pi(X)$.

Теорема 1. *Если бинарно $(-1,1)$-алгебра A порождается конечным множеством $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то алгебра Δ^* нильпотентна индекса $< 4n^3$.*

Доказательство. Можно считать, что $n \geq 2$. Заметим, что оператор $\Delta(x)$ нильпотентен индекса 2, поскольку бинарно $(-1,1)$-алгебра удовлетворяет тождеству [2, 13] $(x, x, (x, x, y)) = 0$.

Будем писать $U \equiv W$ в алгебре Δ^*, если $(U - W)\Delta = 0$. Проводя линеаризацию тождества $\Delta(x)^2 = 0$ и учитывая соотношение $[\Delta, \Delta] \equiv 0$ (лемма 1), получаем

$$\Delta(x)\Delta(x, z) \equiv 0, \quad \Delta(x, y)\Delta(x, z) + \Delta(x)\Delta(y, z) \equiv 0.$$

Отсюда имеем

$$\Delta(x, y)\Delta(x, z)\Delta(x, t) \equiv -\Delta(x)\Delta(y, z)\Delta(x, t) \equiv -\Delta(x)\Delta(x, t)\Delta(y, z) = 0,$$

т. е.

$$\Delta(x, y)\Delta(x, z)\Delta(x, t) \equiv 0. \tag{20}$$

Рассмотрим однородный многочлен $w = (a \circ b)\Delta(c,d)$. В силу леммы 2 элемент w является линейной комбинацией слов вида $t\Delta(p,q)$ ($t = a$ или $t = b$), имеющих тот же состав, что и многочлен w. Далее, в силу леммы 4 любой итерированный альтернатор вида (19) представим в виде элементов того же вида и состава, которые начинаются с правильных одночленов над X_n и имеют Δ-степень не меньше $N+1$. Итак, без ограничения общности можно считать, что итерированный альтернатор вида (19) начинается с правильного одночлена a.

Поскольку полная линеаризация тождества $(x,x,x)=0$ имеет вид

$$x\Delta(a,b) + a\Delta(x,b) + b\Delta(x,a) = 0,$$

можно считать, что в итерированном альтернаторе вида (19) одночлен b_1 является правильным. Используя лемму 1, первый оператор $\Delta(b_1,c_1)$ можно передвинуть на предпоследнее место и считать, что в многочлене (19) одночлен b_N является правильным. Проделывая указанную процедуру, можно добиться линейного представления многочлена (19) через Δ-нормальные многочлены.

Пусть дан Δ-нормальный многочлен вида (19) и $N = 2p(n)+1$. Тогда в слове (19) найдутся три оператора $\Delta(b,q_1)$, $\Delta(b,q_2)$, $\Delta(b,q_3)$ с общим элементом b. Поскольку операторы Δ перестановочны (лемма 1), ввиду сравнения (20) многочлен вида (19) Δ-степени не меньше $2p(n)+2$ равен нулю. Значит, алгебра Δ^* нильпотентна индекса не выше $2p(n)+2 < 2(2n^3-1)+2 = 4n^3$, что и требовалось доказать. □

Следствие [3]**.** *Многообразие бинарно $(-1,1)$-алгебр над полем характеристики, отличной от 2 и 3, имеет бесконечный базисный ранг.*

Для доказательства следствия достаточно заметить, что многочлен (19) не является тождеством первичной неассоциативной $(-1,1)$-алгебры [15]. □

§ 3. Ассоциаторная нильпотентность множества D_x

Следуя [8], подмножество S алгебры A назовем *ассоциаторно нильпотентным*, если подалгебра алгебры $T^A(S)$, порожденная операторами $R(a,b)$, $L(a,b)$, где $a,b \in S$, нильпотентна.

Всюду в этом параграфе A — конечно порожденная бинарно $(-1,1)$-алгебра.

3.1. Нильпотентность алгебры $R^*(D_x, D_x)$.

Лемма 5. *Если алгебра Δ^* нильпотентна индекса s, то нильпотентна и подалгебра $R^*(D_x,D_x)$, порожденная в алгебре $T^A(D_x^*)$ операторами $R(a,b)$, где $a,b \in D_x$, причем ее индекс нильпотентности не превосходит $s+1$.*

Доказательство. По лемме 3 алгебра D_x^* ассоциативна и коммутативна, значит, ввиду тождества Клейнфелда (9) отображения из множества $R(D_x,D_x)$ являются дифференцированиями алгебры A и, кроме того, выполнено равенство

$$[T(D_x^*), R(D_x,D_x)] = 0. \tag{21}$$

Рассмотрим произведение операторов $\prod\limits_{1\le i\le q+1} R(a_i,b_i)$, где $a_i,b_i \in D_x$. Допустим сначала, что в нем встречаются два оператора вида $R(x,a)$ и $R(x,b)$, где $a,b \in D_x$. Тогда в силу (21) можно считать, что в рассматриваемом произведении эти операторы стоят в конце. Проведя линеаризацию по a тождества (10) $((z,x,a),x,a)+(z,x,a)[x,a]=0$, получим $R(x,a)\circ R(x,b)=0$, где $a,b \in D_x$.

Отсюда в силу (21) $R(x,a)R(x,b)=0$, т. е. произведение $\prod\limits_{1\le i\le q+1} R(a_i,b_i)$, содержащее операторы вида $R(x,a)$ и $R(x,b)$, где $a,b\in D_x$, равно нулю.

Итак, можно считать, что в произведении $\prod\limits_{1\le i\le q} R(a_i,b_i)$ операторы $R(a_i,b_i)$ удовлетворяют условию $\deg(a_i),\deg(b_i)\ge 3$.

В силу леммы 3 верно тождество $(x,x\delta_1,x\delta_2)=0$. Считая, что операторы $\delta_1,\delta_2\in\Delta^*$ не зависят от x, и линеаризуя последнее тождество по x, получаем

$$(y,x\delta_1,x\delta_2)+(x,y\delta_1,x\delta_2)+(x,x\delta_1,y\delta_2)=0.$$

Значит, $R(x\delta_1,x\delta_2)\in\Delta^*L(x,D_x)$, т. е. $R(a_i,b_i)\in\Delta^*T^A(D_x^*)$. Отсюда индукцией по q с использованием равенства (21) получаем

$$\prod_{1\le i\le q} R(a_i,b_i)\in(\Delta^*)^qT^A\bigl(D_x^*\bigr),\quad \text{если } \deg(a_i),\deg(b_i)\ge 3.$$

Следовательно, $\prod\limits_{1\le i\le s} R(a_i,b_i)=0$, если $\deg(a_i)$, $\deg(b_i)\ge 3$. Но это и означает, что алгебра $R^*(D_x,D_x)$ нильпотентна индекса не выше $s+1$. $\square$

Следствие. *В алгебре $T^A(D_x^*)$ операторы вида $R(a,b)$, где $a,b\in D_x$, порождают нильпотентный идеал.*

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой 1, леммой 5 и равенством (21). $\square$

3.2. Нильпотентность алгебры $L^*(D_x,D_x)$.

Лемма 6. *Подалгебра $L^*(D_x,D_x)$, порожденная в алгебре $T^A(D_x^*)$ операторами $L(a,b)$, где $a,b\in D_x$, нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $f=x\Delta(z_1)\dots\Delta(z_p)$, $g=x\Delta(t_1)\dots\Delta(t_q)$, причем f и g линейны по x. По лемме 3 справедливы тождества $(x,f,x)=0$, $(f,g,x)=0$. Проводя линеаризацию и записывая f' вместо $y\Delta(z_1)\dots\Delta(z_p)$, получаем

$$(y,f,x)+(x,f',x)+(x,f,y)=0,\quad (f',g,x)+(f,g',x)+(f,g,y)=0.$$

Эти равенства в операторной форме имеют вид

$$L(x,f)=-R(f,x)+U,\quad L(f,g)=V\cdot R(g,x)+W\cdot L(f,x),$$

где U, V, W — подходящие Δ-слова. Следовательно,

$$\begin{aligned}L(f,g)&=V\cdot R(g,x)+W\cdot(\Delta(f,x)-L(x,f))\\&=V\cdot R(g,x)+W\cdot(\Delta(f,x)+R(f,x)-U)=\Sigma U_i+\Sigma V_i\cdot R(f_i,x)\end{aligned}\tag{22}$$

для подходящих Δ-слов U_i, V_i и многочленов $f_i\in D_x$.

Рассмотрим теперь произведение $\prod\limits_{1\le i\le q+1} L(a_i,b_i)$, в котором a_i, $b_i\in D_x$. В силу (22) оно является линейной комбинацией операторов вида

$$U\cdot\prod_{1\le i\le q} L(a_i,b_i),\quad V\cdot R(a,b)\cdot\prod_{1\le i\le q} L(a_i,b_i),$$

где $a,b,a_i,b_i\in D_x$ а U, V — подходящие Δ-слова. Учитывая равенство (21), получаем, что произведение $\prod\limits_{1\le i\le q+1} L(a_i,b_i)$ является линейной комбинацией операторов вида

$$U\cdot\prod_{1\le i\le q} L(a_i,b_i),\quad V\cdot\Bigl(\prod_{1\le i\le q} L(a_i,b_i)\Bigr)\cdot R(a,b).$$

Следовательно, $\prod\limits_{1\le i\le q+1} L(a_i,b_i)$ является линейной комбинацией операторов вида

$$U, V\cdot \prod_{1\le i\le t} R(a_i,b_i), \quad \text{где } U, V \text{ — } \Delta\text{-слова},$$

причем для каждого из этих операторных слов выполнены условия:

а) Δ-степень слова U не меньше $q+1$,

б) Δ-степень слова V не меньше $q+1-t$.

Поскольку в силу леммы 5 и теоремы 1 алгебры $R^*(D_x, D_x)$ и Δ^* нильпотентны, получаем требуемое в лемме утверждение. □

Учитывая лемму 6 и следствие из леммы 5, получаем, что *в конечно порожденной бинарно* $(-1,1)$*-алгебре множество* D_x *ассоциаторно нильпотентно.*

§ 4. Ограниченность мультипликативной длины

4.1. Линейный порядок на множестве $\pi(X)\cup\pi_a^1(X)$. Предположим, что на множестве одночленов $\mathrm{Mon}[X]$ задан некоторый линейный порядок $\prec$. Не ограничивая общности, можно считать, что правильные альтернаторы ранга 1 имеют вид $u\Delta(a)$, $v\Delta(b,c)$, где u, v — правильные одночлены, $a,b,c\in\mathrm{Mon}[X]$ и $b\prec c$. Допустим, что для любого v на множестве правильных альтернаторов вида $v\Delta(b,c)$ задан какой-нибудь линейный порядок $<_v$.

Введем отношение порядка $<$ на множестве $\pi(X)\cup\pi_a^1(X)$, считая, что на множестве $\pi(X)$ оно совпадает с отношением $\prec$, одночлены меньше правильных альтернаторов и выполнены условия:

(а) $u\Delta(a) < v\Delta(b,c)$, если $b\prec c$;

(б) $u\Delta(a) < v\Delta(b)$, если $u\prec v$ или $u=v$, $a\prec b$;

(в) $u\Delta(a,b) < v\Delta(c,d)$, если $u\prec v$ или $u=v$, $v\Delta(a,b) <_v v\Delta(c,d)$.

Определение 7. *Нормальными R-словами* алгебры правых умножений назовем слова вида $R(v_1)R(v_2)\dots R(v_m)R(z)$, где $v_i\in\pi(X)\cup\pi_a^1(X)$, $v_1<v_2<\dots<v_m$; $z\in\mathrm{Mon}[X]$.

4.2. Ограниченность R-длины. Напомним [8], что *R-длиной алгебры A* называется наименьшее число d, удовлетворяющее соотношению $R_A^{d+1}\subseteq\sum\limits_{i=1}^{d} R_A^i$.

Лемма 7. *Всякое R-слово* (*т. е. слово от операторов правого умножения*) *бинарно* $(-1,1)$*-алгебры представимо в виде линейной комбинации нормальных R-слов. Конечно порожденная бинарно* $(-1,1)$*-алгебра имеет ограниченную R-длину.*

Доказательство. Докажем сначала индукцией по длине R-слова, что всякое R-слово $U=R(a_1)R(a_2)\dots R(a_N)R(z)$ представимо в виде линейной комбинации нормальных R-слов длины не выше $N+1$.

Будем писать $\sum\limits_i \alpha_i U_i\equiv\sum\limits_j \beta_j V_j$ (где α_i, β_j — скаляры), если операторные R-слова U_i, V_j имеют одинаковую R-длину и одинаковый состав, а разность $\sum\limits_i \alpha_i U_i-\sum\limits_j \beta_j V_j$ является линейной комбинацией операторных R-слов меньшей длины.

Из тождеств (13) и (14) вытекают операторные соотношения

$$R(x)R(y)\equiv -R(y)R(x), \tag{23}$$

$$R(x\circ y)R(z)\equiv R(x)R(y\circ z)+R(y)R(x\circ z). \tag{24}$$

Заметим, что в силу сравнения (23) порядок операторов в слове U не является существенным. Если в слове U есть оператор $R(a_i)$ такой, что $\deg_X(a_i) \geq 4$, то на основании леммы 4 одночлен a_i является линейной комбинацией йордановых произведений a_i' и правильных альтернаторов a_i'' ранга 1. С йордановым произведением a_i' поступаем так: сначала, используя (23), переставляем оператор $R(a_i')$ к оператору $R(z)$, а затем, применяя (24) и не увеличивая R-длину, уменьшаем степень элемента a_i'.

Следовательно, можно считать, что для каждого элемента a_i существует правильный одночлен v такой, что $a_i = v$ или $a_i = v\Delta(b)$, или $a_i = v\Delta(b, c)$, где $b, c \in \mathrm{Mon}[X]$. При этом вновь в силу (23) можно считать, что в R-слове U правильные слова a_i расположены в возрастающем порядке. Тем самым доказано, что R-слово U представимо в виде линейной комбинации нормальных R-слов.

Пусть алгебра A порождается конечным множеством $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Докажем теперь, что нормальные R-слова алгебры A имеют ограниченную длину. Рассуждая от противного, предположим, что найдется слово

$$U = R(w_1)R(w_2)\ldots R(w_q)R(z),$$

где $w_j = v_j\Delta(a_j)$ или $w_j = v_j\Delta(a_j, b_j)$, сколь угодно большой длины, не представимое в виде линейной комбинации операторных слов меньшей R-длины. Тогда в слове U найдется достаточно большое число операторов $R(w_j)$ $(j = 1, \ldots, 2p)$ таких, что $v_1 = \cdots = v_{2p} = v$. Следовательно, слово $R(w_1)R(w_2)\ldots R(w_{2p})$ по модулю слов меньшей R-длины сравнимо с оператором вида

$$V = R(w_1, w_2)\ldots R(w_{2p-1}, w_{2p}), \quad \text{где } w_j \in D_v.$$

Однако при достаточно большом числе p указанный оператор V равен нулю в силу леммы 5. Следовательно, достаточно длинное слово U представимо в виде линейной комбинации R-слов меньшей R-длины, что противоречит предположению. $\square$

4.3. Ограниченность мультипликативной длины. Мультипликативной длиной алгебры A называется такое наименьшее число m, что $T_A^{m+1} \subseteq \sum\limits_{i=1}^{m} T_A^i$.

Теорема 2. *Всякое операторное слово бинарно $(-1,1)$-алгебры является линейной комбинацией нормальных слов вида*

$$L(y) \cdot L(u_1)\ldots L(u_p) \cdot R(v_1)\ldots R(v_q) \cdot R(z) \cdot \Delta(a_1, b_1)\ldots \Delta(a_s, b_s),$$

где $u_i, v_i \in \pi(X) \cup \pi_a^1(X)$, $u_1 < \cdots < u_p, v_1 < \cdots < v_q$; $y, z, a_i, b_i \in \mathrm{Mon}[X]$. Кроме того, конечно порожденная бинарно $(-1,1)$-алгебра имеет ограниченную мультипликативную длину.

Доказательство. Будем писать $\sum\limits_i \alpha_i U_i \equiv \sum\limits_j \beta_j V_j$ (где α_i, β_j — скаляры), если операторные слова U_i, V_j имеют одинаковую длину и одинаковый состав, а разность $\sum\limits_i \alpha_i U_i - \sum\limits_j \beta_j V_j$ является линейной комбинацией операторных слов меньшей длины.

Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности пунктов.

1°. $2\Delta(x)T(y) \equiv -R(x)\Delta(x, y)$.

В бинарно $(-1,1)$-алгебре справедливо тождество (см. [13, тождество (17)])

$$2y(x, x, z) + z(x, x, y) = \{yx, x, z\} - \{y, x, zx\}, \tag{25}$$

где $\{a,b,c\} := (a,b,c)+(b,a,c)$. В операторной форме оно имеет вид

$$2\Delta(x)L(y)+R(y\Delta(x)) = \Delta(x,yx) - R(x)\Delta(x,y). \tag{26}$$

Следовательно, $2\Delta(x)L(y) \equiv -R(x)\Delta(x,y)$. Поскольку ввиду (12) справедливо сравнение $\Delta(x)R(y)\equiv\Delta(x)L(y)$, получаем требуемое.

2°. В силу п. 1° всякое операторное слово

$$T(a_1)\dots T(a_p)\Delta(x,y)T(b_1)\dots T(b_q),$$

содержащее оператор Δ, представимо (с сохранением состава) в виде линейной комбинации слов V и $W\cdot\Delta(a,b)$, где V и W — операторные слова, длины которых удовлетворяют неравенствам $d(V)\le p+q+1$, $d(W)=p+q$. Тогда, проводя индукцию по длине операторного слова, можно считать, что всякое операторное слово, содержащее хотя бы один оператор Δ, представимо в виде линейной комбинации нормальных операторных слов.

3°. Операторное слово $L(a)L(b\circ c)$ по модулю слов меньшей длины представимо (с сохранением состава) в виде линейной комбинации операторных слов вида

$$L(a\circ b)L(c),\quad L(a\circ c)L(b),\quad \Delta(r,s).$$

Действительно, поскольку бинарно $(-1,1)$-алгебра удовлетворяет тождеству [12]

$$(x^2,x,w)+(x,w,x^2)+(w,x^2,x) = S(x^2,x,w)=0,$$

то в силу тождества (4) $(x^2,x,w)=(x,x^2,w)$, откуда $2L(x)L(x^2)\equiv\Delta(x^2,x)$. Проводя линеаризацию последнего сравнения и учитывая равенство $L(a,b)+L(b,a)=\Delta(a,b)$, получаем утверждение п. 3°.

4°. Заметим теперь, что всякое операторное слово является линейной комбинацией слов (не большей операторной длины) того же состава вида

$$L(y)L(u_1)L(u_2)\dots L(u_p)R(c_1)R(c_2)\dots R(c_q),$$

при этом можно считать, что элементы, стоящие под операторами умножения, являются однородными многочленами от X. Поскольку всякое R-слово является линейной комбинацией нормальных R-слов (лемма 5), в силу п. 2° достаточно рассмотреть слово $U=L(y)L(u_1)L(u_2)\dots L(u_p)$.

Кроме того, в силу п. 2° порядок левых операторов $L(u_1),L(u_2),\dots,L(u_p)$ в слове U не играет роли, а элементы $u_1,\dots,u_p$ можно считать различными.

Далее, можно считать, что среди однородных многочленов $u_1,\dots,u_p$ нет йордановых многочленов, так как иначе в силу п. 3°, перебрасывая на элемент y один из йордановых сомножителей, можно было бы уменьшить степень соответствующего однородного многочлена. Тогда ввиду леммы 4 элементы $u_1,\dots,u_p$ являются либо правильными одночленами, либо правильными альтернаторами вида $w\Delta(a)$ или $w\Delta(a,b)$. Отсюда, разумеется, вытекает первое утверждение теоремы.

5°. Докажем теперь ограниченность мультипликативной длины конечно порожденной алгебры. В силу ограниченности R-длины (лемма 7) и нильпотентности алгебры Δ^* (теорема 1), а также конечности множества правильных одночленов можем считать, что слово U содержит достаточно много последовательных левых операторов от правильных альтернаторов ранга 1, начинающихся с одного правильного одночлена v. Тогда по модулю слов меньшей операторной длины слово U сравнимо с операторным словом, содержащим длинное подслово вида $V=L(w_1,w_2)L(w_3,w_4)\dots$, где $w_j\in D_v$. Однако ввиду леммы 6 достаточно длинное слово V равно нулю, что и завершает доказательство теоремы. $\square$

§ 5. Венико-нильпотентность нильпотентных идеалов

5.1. Нильпотентность и разрешимость в смысле Венико. Всюду в этом параграфе A — произвольная бинарно $(-1,1)$-алгебра. Если X — подмножество алгебры A, то обозначим через $X^{\nabla} = X \cdot T(A)$ идеал алгебры A, порожденный множеством X.

Пусть I — идеал алгебры A. Следуя А. Пенико [16], определим по индукции убывающие цепочки идеалов, которые назовем Пенико-степенями идеала I:

$$I^{[1]} = I,\ I^{[n+1]} = \langle I^{[n]} \cdot I + I \cdot I^{[n]} \rangle^{\nabla}, \quad I^{0} = I,\ I^{(n+1)} = \langle I^{(n)} \cdot I^{(n)} \rangle^{\nabla}.$$

Идеал I называется *Пенико-нильпотентным* (соответственно *Пенико-разрешимым*), если для некоторого числа n выполнено равенство $I^{[n]} = 0$ (соответственно $I^{(n+1)} = 0$); наименьшее число n, удовлетворяющее указанному равенству, называется *индексом Пенико-нильпотентности* (соответственно *Пенико-разрешимости*).

5.2. Переработка операторных слов бинарно $(-1,1)$-алгебр. Для дальнейшего нам необходимы некоторые результаты работы [3].

Лемма 8 [3] (о переработке операторных слов).

1. *Всякое операторное слово $T(x)T(p)$ является линейной комбинацией слов, имеющих тот же состав, вида $T(u)$, $T(p)T(x)$, $L(p,x)$, где $T \in \{R, L\}$.*

2. *Всякое операторное слово $T(x)T(y)T(p)$ является линейной комбинацией слов того же состава вида $T(u)$, $T(v)T(w)$, $T(a)T(b)T(c)$, где $p \in \{a, b\}$.*

Определение 8. *Аннулятором идеала I в алгебре A* назовем множество

$$\operatorname{Ann} I = \{x \in A \mid Ix = xI = (I, A, x) = 0\}.$$

Из леммы 8 следует, что аннулятор идеала I бинарно $(-1,1)$-алгебры A снова является идеалом алгебры A. Кроме того, из леммы 8 немедленно вытекает

Следствие [3]. *Если $Ix = xI = 0$, то следующие условия эквивалентны:*
а) $(I, A, x) = 0$,
б) $x\Delta(A, I) = 0$.
Далее, если I — идеал A, $k \in K(A)$, $v \in V(A)$, то
(а) $k \in \operatorname{Ann} I \Leftrightarrow Ik = 0$;
(б) $v \in \operatorname{Ann} I \Leftrightarrow Iv = vI = 0$.

5.3. Эквивалентность понятий нильпотентности и Пенико-нильпотентности для идеалов произвольной бинарно $(-1,1)$-алгебры.

Теорема 3. *Всякий нильпотентный идеал произвольной бинарно $(-1,1)$-алгебры нильпотентен в смысле Пенико.*

Доказательство. Пусть A — бинарно $(-1,1)$-алгебра, I — ее идеал и $I^n = 0$. Без ограничения общности можно считать, что алгебра A имеет единицу. Проведем индукцию по числу n. Поскольку основание индукции при $n = 2$ тривиально, предположим, что утверждение доказано для чисел, меньших n. Используя для Пенико-степеней идеала I обозначения $\pi(I; t) = I^{[t]}$, на основании индуктивного предположения для некоторого числа N_1 получим включение

$$\pi(I; N_1) \subseteq J^{\nabla}, \quad \text{где} \quad J = I^{n-1}. \tag{27}$$

Заметим, что для доказательства теоремы достаточно проверить справедливость утверждения $(\forall N)(\exists f(N))\pi(I; f(N)) \subseteq [\pi(I;N)]R(I)$.

Доказательство этого факта представим в виде ряда пунктов, используя без дополнительных пояснений равенства $IJ = JI = 0$.

1°. Заметим сначала, что из леммы 8 и включения (27) имеем

$$\pi(I; N_1 + 1) \subseteq J^{\nabla} T_I T(A) = JT(A) T_I T(A) = JT_A T_I T(A) = (I, A, J)T(A),$$

т. е.

$$\pi(I; N_1 + 1) \subseteq (I, A, J)T(A). \tag{28}$$

2°. Введем обозначения

$$\rho_1 = I, \quad \rho_s = I \cdot R(I)^{s-1}, \quad C_s = (\rho_s, A, J) \quad (s \geq 1),$$
$$P_{s,0} = C_s, \quad P_{s,t} = C_s \pi_t, \quad \text{где } \pi_t = I^{[t]}, \quad t \geq 1.$$

Тогда включение (28) принимает вид $\pi(I; N_1 + 1) \subseteq C_1^{\nabla}$. Докажем индукцией по $s \geq 1$, что найдется число $N(s)$ такое, что

$$\pi(I; N(s)) \subseteq C_s^{\nabla}. \tag{29}$$

Поскольку основание индукции ($s = 1$) верно, то, сделав предположение индукции, можем считать, что для данного числа s выполнено включение (29).

3°. Проверим, что $C_s \subseteq K(A)$.

В самом деле, считая, как и ранее, $\{a, b, x\} := x\Delta(a, b)$, имеем $C_s = (\rho_s, A, J) = \{\rho_s, A, J\}$, так как $(A, I, J) = 0$. Следовательно, в силу (2) получаем

$$[C_s, A] = [\{\rho_s, A, J\}, A] = -[\{\rho_s, A, A\}, J] \subseteq [I, J] = 0.$$

4°. Обозначим через $I^{\wedge}$ идеал алгебры умножений $T(A)$, порожденный операторами $T(i)$, $i \in I$. Докажем, что $P_{s,t}^{\nabla} \cdot I^{\wedge} \subseteq (P_{s,t+1} + C_{s+1})^{\nabla}$.

В силу леммы 8 $P_{s,t}^{\nabla} I^{\wedge} \subseteq P_{s,t} T_A T_I T(A)$. Таким образом, достаточно рассмотреть элементы

$$P_{s,t} T_x T_I, \quad x \in A. \tag{30}$$

Пусть сначала $t = 0$, тогда $C_s T_x T_I = (C_s x) T_I$. Проверим, что элементы $(C_s x)I$, $I(C_s x)$ содержатся в $P_{s,1}^{\nabla}$. Действительно, считая $i \in I$, $c \in C_s$, в силу правой альтернативности и п. 3° имеем

$$(cx)i = -(ci)x + c(x \circ i) \in P_{s,1}^{\nabla}, \quad 2i(cx) = i(c \circ x) = (ic)x + (ix)c \in P_{s,1}^{\nabla}.$$

Пусть теперь $t \geq 1$. Для сокращения записи будем использовать сравнения по модулю идеала $(P_{s,t+1} + C_{s+1})^{\nabla}$, т. е. будем писать $a \equiv b$, если $a - b$ лежит в этом идеале. Предположим сначала, что оператор T_x в выражении (30) отсутствует. Учитывая вновь п. 3°, приходим к равенствам

$$P_{s,t} I = (C_s \pi_t) I \subseteq P_{s,t+1} + (C_s, \pi_t, I),$$
$$I P_{s,t} = I(C_s \pi_t) = I(\pi_t C_s) \subseteq P_{s,t+1} + (I, \pi_t, C_s).$$

Поскольку в силу тождеств (5), (6) и п. 3° справедливо равенство

$$2(I, \pi_t, C_s) = (C_s, \pi_t, I), \tag{31}$$

достаточно проверить сравнение

$$(C_s, \pi_t, I) \equiv 0. \tag{32}$$

Применяя тождество Тэди (11), получаем

$$(C_s, \pi_t, I) = ((\rho_s, A, J), \pi_t, I) \subseteq ((\rho_s, \pi_t, I), A, J) + (\rho_s, (A, \pi_t, I), J) \\ + (\rho_s, A, (J, \pi_t, I)) + (\rho_s, A, J[\pi_t, I]) - (\rho_s, A, J)[\pi_t, I] - (\rho_s, A, [\pi_t, I])J.$$

Так как $\pi_t \subseteq I$, второе, третье, четвертое и шестое слагаемые нулевые. Поскольку ρ_s — правый идеал алгебры, для оставшихся первого и пятого слагаемых имеем

$$((\rho_s, \pi_t, I), A, J) \subseteq C_{s+1}, \quad (\rho_s, A, J)[\pi_t, I] \subseteq C_s\pi_{t+1} = P_{s,t+1},$$

что и доказывает сравнение (32).

Предположим теперь, что оператор T_x присутствует в выражении (30). Тогда в силу леммы 8 вместо операторного слова T_xT_I в выражении (30) можно рассмотреть оператор $L(I, x)$. С учетом правого тождества Муфанг (8), п. 3° и сравнений (31) и (32) выполнены

$$P_{s,t}L(I, x) = (I, x, P_{s,t}) = (I, x, C_s\pi_t) \subseteq -(I, C_s, x\pi_t) + (I, x, \pi_t)C_s \\ + (I, C_s, \pi_t)x \subseteq (I, C_s, \pi_t)A + C_s\pi_{t+1} \equiv 0.$$

5°. Так как мы доказываем существование числа $N(s+1)$, для которого справедливо включение (29), без ограничения общности можно считать, что идеал C_{s+1}^{∇} нулевой. Положим $(X, I)_q = X \cdot (I^{\wedge})^q$ $(q \geq 1)$.

Тогда из п. 4° индукцией по q получаем $(P_{s,t}, I)_q \subseteq P_{s,t+q}^{\nabla}$. Следовательно, для любого $q \geq 1$ имеем $(C_s, I)_q \subseteq (C_s \cdot \pi(I, q))^{\nabla}$.

6°. Обозначим через Q идеал $\pi(I, q)$ и докажем, что C_sQ — идеал алгебры A.

Поскольку ρ_s — правый идеал и $(\rho_s, A, Q) \subseteq (\rho_s, A, I) \subseteq \rho_{s+1}$, то

(а) $((\rho_s, A, Q), A, J) \subseteq (\rho_{s+1}, A, J)^{\nabla} \subseteq C_{s+1}^{\nabla} = 0$.

Кроме того,

(б) $(\rho_s, (A, A, Q), J) \subseteq (I, I, J) = 0$,

(в) $(\rho_s, A, (J, A, Q)) \subseteq (J, A, Q)^{\nabla} \subseteq (J, A, I)^{\nabla} = (J, I, A)^{\nabla} = 0$,

(г) $(\rho_s, A, J[A, Q]) \subseteq (J[A, Q])^{\nabla} \subseteq (JI)^{\nabla} = 0$,

(д) $(\rho_s, A, [A, Q])J \subseteq IJ = 0$.

Применяя теперь тождество Тэди (11) и равенства (а)–(д), получаем

$$(C_s, A, Q) = ((\rho_s, A, J), A, Q) \subseteq ((\rho_s, A, Q), A, J) + (\rho_s, (A, A, Q), J) \\ + (\rho_s, A, (J, A, Q)) + (\rho_s, A, J[A, Q]) - (\rho_s, A, J)[A, Q] - (\rho_s, A, [A, Q])J \\ \subseteq (\rho_s, A, J)[A, Q] \subseteq C_sQ.$$

Наконец, поскольку $C_s \subseteq K(A)$ в силу п. 3° и по доказанному $(C_s, A, Q) \subseteq C_sQ$, то C_sQ — идеал в алгебре A.

7°. Из пп. 3°–6° (32) вытекает

$$(C_s, I)_q \subseteq \pi(I, q) \cdot C_s. \tag{33}$$

Учитывая включение (29), из (33) имеем

$$\pi(I; q + N(s)) = (\pi(I; N(s)), I)_q \subseteq (C_s, I)_q \subseteq \pi(I; q) \cdot C_s,$$

следовательно, $\pi(I; (n-1) \cdot N(s)) \subseteq I \cdot R(C_s)^{n-1} \subseteq I^n = 0$. Это означает, что можно положить $N(s+1) = (n-1) \cdot N(s)$. Тем самым включение (29) по индукции справедливо для произвольного числа s.

8°. Из включений (29) и (33) следует, что $\pi(I; f(N)) \subseteq [\pi(I; N)]R(I)$. $\square$

§ 6. Разрешимость радикала свободной конечно порожденной бинарно $(-1, 1)$-алгебры

В этом параграфе будет доказано, что в конечно порожденной бинарно (- 1,1)-алгебре альтернаторный идеал Пенико-разрешим. Отсюда вытекает, что всякая первичная конечно порожденная бинарно $(-1, 1)$-алгебра альтернативна.

6.1. Идеал Тэди. Пусть A — свободная бинарно $(-1, 1)$-алгебра счетного ранга с единицей. Следуя А. Тэди [12], обозначим через $M(A)$ и $\mathrm{Alt}(A)$ соответственно линейное пространство и идеал алгебры A, порожденные альтернаторами (a, a, b). Напомним, что $\mathrm{Alt}(A) = M(A) \cdot A$ [12, лемма 12]. Обозначим через $\mathrm{Th}(A)$ наибольший идеал алгебры A, содержащийся в пространстве $M(A)$, и назовем его *каноническим идеалом Тэди алгебры* A. Этот идеал является T-идеалом.

Лемма 9. *Если* $M = M(A)$, *то*
(1) M *— левый идеал алгебры* A;
(2) $\mathrm{Th}(A) = \{t \in M \mid tA \subseteq M\}$.

Доказательство. (1). Это условие следует немедленно из тождества (25), поскольку по модулю пространства M будет $2y(x, x, z) + z(x, x, y) \equiv 0$, откуда $3y(x, x, y) \equiv 0$, значит,

$$y(x, x, y) \equiv 0, \quad y(x, x, z) + z(x, x, y) \equiv 0, \quad y(x, x, z) \equiv 0.$$

(2) Пусть $t \in M$ и $tA \subseteq M$; $a, b \in A$. Тогда, используя только что доказанный п. (1) и тождество правой альтернативности, по модулю пространства M имеем

$$(ta)b = t(ab) + (t, a, b) \equiv (t, a, b) \equiv (a, b, t) \equiv 0, \quad (at)b = -(ab)t + a(tb) + a(bt) \equiv 0,$$

следовательно, $t \in \mathrm{Th}(A)$. $\square$

6.2. Нильпотентность альтернаторного идеала по модулю идеала Тэди. Если F — некоторое множество многочленов в свободной алгебре A, B — произвольная бинарно $(-1, 1)$-алгебра, то обозначим через $F(B)$ множество значений многочленов из F в алгебре B.

Лемма 10. *Пусть* A *— конечно порожденная бинарно* $(-1, 1)$*-алгебра. Тогда альтернаторный идеал фактор-алгебры* $A/\mathrm{Th}(A)$ *нильпотентен в смысле Пенико, т. е. существует число* $f(n)$, *зависящее только от числа* n *порождающих алгебры* A *и такое, что всякое слово, содержащее* $f(n)$ *элементов из идеала* $\mathrm{Alt}(A)$, *лежит в идеале Тэди* $\mathrm{Th}(A)$.

Доказательство представим в виде последовательности шагов, считая без ограничения общности идеал Тэди $\mathrm{Th}(A)$ нулевым. Как и раньше, для сравнения по модулю пространства M используется символ $\equiv$. Заметим, что в силу леммы 9 $t = 0 \Leftrightarrow t \equiv 0$, $tA \equiv 0$.

Это замечание используется в дальнейшем без дополнительных пояснений.

1°. $(A, A, M) \equiv 0$, так как M — левый идеал.

2°. $(A, M, M) = 0$, так как в силу тождества Муфанг (8) и п. 1° имеем

$$(A, M, M)A \subseteq (A, A, M) + (A, A, M)M \subseteq M.$$

3°. $(a, a, (b, b, c)) = 0$.

Поскольку M — левый идеал, в силу (2) получим

$$(a,a,(b,b,c))y \equiv [(a,a,(b,b,c)),y] = -[(a,a,y),(b,b,c)] \equiv 0.$$

4°. Левый идеал M коммутативен.

В силу тождества (2) и п. 3°

$$[(a,a,y),(b,b,z)] = -[(a,a,(b,b,z)),y] = 0.$$

5°. $pq = 0$, где $p = x\Delta(a), q = x\Delta(b)$.

Достаточно проверить сравнение $(pq)y \equiv 0$. С учетом п. 1° имеем

$$(pq)y = p(qy) + (p,q,y) \equiv p(qy) \equiv p[q,y] = p[x\Delta(b),y] = -p[y\Delta(b),x].$$

Пусть $r = y\Delta(b)$. Тогда ввиду тождества (2) и п. 4° элемент p перестановочен с элементами x и r, т. е. $[p,x] = 0$, $[p,r] = 0$. На основании этого замечания справедливы тождества

$$p[y\Delta(b),x] = p[r,x] \equiv p(rx) \equiv (pr)x \equiv (rp)x \equiv -(rx)p + 2r(xp) \equiv 0.$$

6°. Из п. 3° и лемм 2, 4 вытекает, что пространство M линейно порождается правильными альтернаторами ранга 1.

7°. Левый идеал M коммутативен, ассоциативен и нильпотентен.

Условия ассоциативности и коммутативности доказаны в пп. 2° и 4°. Из пп. 5° и 6° вытекает нильпотентность левого идеала M, причем индекс нильпотентности не превосходит числа $p(n)+1$, где $p(n)$ — число правильных слов.

8°. Если левый идеал M, порожденный альтернаторами, удовлетворяет условиям

$$[M,M] = (A,M,M) = (a,a,M) = M^{k+1} = 0 \quad (\forall a \in A),$$

то $M^k \subseteq \operatorname{Ann}\operatorname{Alt}(A)$.

Поскольку $(A,M,M) = 0$, на основании тождества Клейнфелда и п. 4° верно равенство $(A,M^i,M^j) = 0$, значит, $A \cdot M^i \subseteq M^i$.

Далее, из $(A,M,M) = (a,a,M) = 0$ следует, что $(M,A,M) = 0$.

Пусть $p \in M$, $q_k \in M^k$, $x,y \in A$, тогда

$$q_k(px) = (q_k,p,x) = 0, \quad (px)q_k = (p,x,q_k) + p(xq_k) = p(xq_k).$$

Поскольку $xq_k \in M^k$ по доказанному, элемент q_k аннулируется альтернаторным идеалом $\operatorname{Alt}(A) = M \cdot A^{\#}$. Кроме того, по условию $q_k \in V(A)$, значит, в силу следствия из леммы 8 верно включение $q_k \in \operatorname{Ann}\operatorname{Alt}(A)$, что и доказывает п. 8°.

9°. Положим $\operatorname{Ann}_k(I) = \{a \in A \mid a\cdot(I^{\wedge})^k = 0\}$ и заметим, что это множество является, очевидно, идеалом алгебры A.

Поскольку условия п. 8° сохраняются при переходе к фактор-алгебрам, то в алгебре A справедливы включения $M \subseteq \operatorname{Ann}_k\operatorname{Alt}(A)$ и $\operatorname{Alt}(A) \subseteq \operatorname{Ann}_k\operatorname{Alt}(A)$. Следовательно, альтернаторный идеал Пенико-нильпотентен индекса не больше $p(n)+1$. $\square$

6.3. Пенико-разрешимость альтернаторного идеала.

Лемма 11. *Пусть A — правоальтернативная алгебра, I — ее идеал, S — ее подмножество. Тогда если $S \circ I = 0$, то $S \cdot I^4 = I^4 \cdot S = 0$.*

Доказательство. Во всякой правоальтернативной алгебре справедливы тождества Скосырского [10]

$$s(x \circ y) = (s \circ x)y + (s \circ y)x - sU(x, y),$$
$$(sx)y + s(xy) = (s \circ x)y + (s \circ y)x + s \circ (xy) - (s \circ y) \circ x,$$

где $sU(x, y) = (xs)y + (ys)x$ — йорданов многочлен от s, x, y.

Пусть $s \in S$, $x, y, z, t \in I$. Тогда из тождеств Скосырского получаем

$$s(x \circ y) = 0, \quad (sx)y + s(xy) = 0.$$

Учитывая, что $(xy)x$ — йорданов многочлен, и применяя полученные равенства, имеем

$$s(x, y, x) = s((xy)x - x(yx)) = -s(x(yx)) = s((yx)x)$$
$$= s(yx^2) = -s(x^2y) = (sx^2)y = 0.$$

Следовательно, ввиду леммы 4 для любой расстановки скобок на одночлене $xyzt$ верно равенство $s(xyzt) = 0$, откуда $(xyzt)s = 0$. □

Теорема 4. *Во всякой конечно порожденной бинарно $(-1, 1)$-алгебре альтернаторный идеал разрешим в смысле Пенико.*

Доказательство. В силу теоремы 1 можно считать, что в алгебре A выполнено тождество $\Delta(x_1)\Delta(x_2) \ldots \Delta(x_{N+1}) = 0$. Пусть W_N — подпространство $\Phi a\Delta(a_1) \ldots \Delta(a_N)$. Тогда имеем $W_N\Delta(A) = 0$ или для любого $x \in A$ верно равенство

$$(x, x, W_N) = 0. \tag{34}$$

Отсюда в силу тождества (2) вытекает, что элементы пространства W_N перестановочны с альтернаторами:

$$[W_N, (x, x, y)] = 0. \tag{35}$$

На основании тождества (5) и равенств (34) и (35) получаем

$$[W_N, A] \circ \mathrm{Th}(A) = 0. \tag{36}$$

Пусть m — мультипликативная длина конечно порожденной алгебры A (ограниченность мультипликативной длины доказана в теореме 2). Тогда в силу [17] существует число $g(m)$ такое, что для любого идеала I алгебры A верно включение $(I^{g(m)})^{\nabla} \subseteq I^4$. По теореме 3 для некоторого числа $f(m)$ имеет место включение $I^{[f(m)]} \subseteq (I^{g(m)})^{\nabla}$, следовательно, $I^{[f(m)]} \subseteq I^4$. Обозначим через $P_{f(m)}(I)$ Пенико-степень $I^{[f(m)]}$. Тогда вследствие леммы 11 справедливо включение $S \cdot P_{f(m)}(I) + P_{f(m)}(I) \cdot S \subseteq \langle S \circ I \rangle^{\nabla}$. Отсюда в силу (36) имеем

$$[W_N, A]P = P[W_N, A] = 0, \quad \text{где } P = P_{f(m)}(\mathrm{Th}(A)). \tag{37}$$

Поскольку $P \subseteq \mathrm{Th}(A) \subseteq M(A)$, ввиду равенств (35) и (37)

$$[W_N, P] = 0, \tag{38}$$

$$J^{(-)}(W_N, A, P) = 0. \tag{39}$$

Применяя теперь линеаризацию тождества $J^{(-)}([x,y],x,y) = 0$ и учитывая равенства (38) и (39), получаем $J^{(-)}([W_N, A], A, P) = 0$. Значит, в силу (6) $S([W_N, A], A, P) = 0$, откуда с учетом (37)

$$(P, A, [W_N, A]) \subseteq (A, P, [W_N, A]) + ([W_N, A], P, A) = 0.$$

Следовательно, $[W_N, A] \subseteq \operatorname{Ann} P$.

Обозначим через t индекс нильпотентности ассоциаторного идеала конечно порожденной $(-1,1)$-алгебры [2] и положим $Q = P^{[t]}$. Применяя теорему о центральных функциях [3, теорема 3], заключаем, что для подходящего числа q верно включение

$$[W_N, A] + (W_N, A, A) + (A, W_N, A) \subseteq \operatorname{Ann}_q(Q),$$

где $\operatorname{Ann}_q(I) = \{a \in A \mid a \cdot (I^\wedge)^q = 0\}$, $I^\wedge$ — идеал алгебры умножений $T(I)$, порожденный операторами вида $T(i)$, $i \in I$. Это означает, что $\overline{W}_N$ содержится в центре фактор-алгебры $\overline{A} = A/\operatorname{Ann}_q(Q)$. Докажем, что $\overline{W}_N^2 = 0$ в алгебре $\overline{A}$. Пусть $\bar{w} \in \overline{W_N}$ и $\bar{f} = \bar{a}\Delta(\overline{a_1})\ldots\Delta(\overline{a_N})$. Учитывая центральность элемента $\bar{w}$, имеем

$$\begin{aligned}\bar{f}\bar{w} &= \bar{a}\Delta(\overline{a_1})\ldots\Delta(\overline{a_N})\bar{w} \\ &= (\bar{a}\bar{w})\Delta(\overline{a_1})\ldots\Delta(\overline{a_N}) \in \overline{M(A)}\Delta(\overline{a_1})\ldots\Delta(\overline{a_N}) \subseteq \overline{W_{N+1}} = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, в алгебре A верно включение $(W_N^\nabla)^2 \subseteq (W_N^2)^\nabla + \operatorname{Ann}_q(Q) \subseteq \operatorname{Ann}_q(Q)$. Тогда в силу леммы 10 идеал W_N^∇ алгебры A разрешим в смысле Пенико. Значит, индукцией по числу N получаем Пенико-разрешимость альтернаторного идеала $\operatorname{Alt}(A)$. $\square$

Поскольку локально разрешимая бинарно $(-1,1)$-алгебра локально нильпотентна [17], из теоремы 4 вытекает

Следствие. *Во всякой бинарно $(-1,1)$-алгебре альтернаторный идеал локально нильпотентен.*

6.4. Следствия из теоремы 4. Приведем ряд следствий, вытекающих из теории альтернативных алгебр [4, 8].

Следствие 1. *Во всякой бинарно $(-1,1)$-алгебре радикал Михеева совпадает с локально нильпотентным радикалом.*

Заметим, что в правоальтернативной конечномерной алгебре радикал Михеева может не быть локально нильпотентен [4, гл. 16].

Следствие 2. *Во всякой конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебре абсолютный делитель нуля порождает разрешимый идеал. Следовательно, радикал Маккриммона произвольной бинарно $(-1,1)$-алгебры содержится в локально нильпотентном радикале.*

Поскольку не существует простых локально нильпотентных алгебр, верно

Следствие 3 [13, 18]. *Простая бинарно $(-1,1)$-алгебра альтернативна.*

Следствие 4 [14]. *Бинарно $(-1,1)$-ниль-алгебра ограниченного индекса локально нильпотентна.*

Следствие 5. *В свободной конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебре множество нильпотентных элементов совпадает с локально нильпотентным радикалом, который является наибольшим Пенико-разрешимым идеалом.*

Следствие 6. *Радикал конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебры, удовлетворяющей существенному тождеству, разрешим в смысле Пенико.*

Следствие 7. *Конечно порожденная первичная бинарно $(-1,1)$-алгебра альтернативна и, значит, является либо кольцом Кэли — Диксона, либо ассоциативной алгеброй.*

§ 7. Основной результат

7.1. Линейные порождающие альтернаторного идеала.

Определение 9. *Правильными альтернаторами ранга* 2 назовем однородные многочлены вида $v\Delta(p,q)\Delta(r,s)$, где $v \in \pi(X)$, $p,q,r,s \in \mathrm{Mon}[X]$.

Обозначим через $\pi_a(X)$ множество правильных альтернаторов ранга 1 и 2.

Лемма 12. *Альтернаторный идеал свободной бинарно $(-1,1)$-алгебры линейно порождается элементами*

$$w, w \circ v, \quad \text{где } w \in \pi_a(X),\ v \in \pi(X). \tag{40}$$

Доказательство. Заметим, что альтернаторный идеал линейно порождается как элементами вида m и $[m,a]$, так и элементами вида m и $m \circ a$, где $m \in M(A)$, $a \in A$. Из лемм 2 и 4 немедленно вытекает, что линейное пространство $M(A)$ порождается множеством $\pi_a(X)$ правильных альтернаторов ранга 1 и 2.

Тогда в силу тождества (17) $[x\delta, x] = 0$, где $\delta \in \Delta \cup \Delta^2$, коммутатор $[m,a]$ линейно представим через коммутаторы $[w,v]$, где $w \in \pi_a(X)$, $v \in \pi(X)$:

$$[m,a] = \sum_{v \in \pi(X)} [v\delta, a] = -\sum_{v \in \pi(X)} [a\delta, v] = \sum_{\substack{v \in \pi(X)\\ w \in \pi_a(X)}} [w,v].$$

Поскольку коммутатор $[w,v]$ по модулю $M(A)$ может быть записан в виде $w \circ v$, альтернаторный идеал порождается элементами вида (40). □

7.2. Правая нильпотентность альтернаторного идеала. Определим по индукции правые степени идеала I : $I_{\langle 1\rangle} = I$, $I_{\langle n+1\rangle} = I_{\langle n\rangle}I$. Заметим, что в правоальтернативной алгебре правые степени идеала являются правыми идеалами. Напомним [4], что идеал называется *правонильпотентным индекса* n, если выполнены условия $I_{\langle n\rangle} = 0$, $I_{\langle n-1\rangle} \neq 0$.

Лемма 13. *Альтернаторный идеал конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебры правонильпотентен.*

Доказательство. Соотношения (13) и (14) можно записать в виде

$$R(x)R(y) = -R(y)R(x) + R(j(x,y)), \tag{41}$$

$$R(x)R(y \circ z) - R(x \circ z)R(y) - R(x \circ y)R(z) = R(j(x,y,z)), \tag{42}$$

где $j(x,y)$ и $j(x,y,z)$ — некоторые однородные йордановы многочлены.

На множестве $\pi = \pi(X) \cup \pi_a(X)$ правильных одночленов v_i и правильных альтернаторов w_j определим линейный порядок $\prec$, считая, что

1) для правильных одночленов новое отношение совпадает с обычным лексикографическим порядком;

2) каждый правильный одночлен меньше правильного альтернатора;

3) правильные альтернаторы w_1, w_2 сравниваются с помощью сравнения соответствующих правильных одночленов v_1, v_2, с которых они начинаются; более точно:

а) если $v_1 < v_2$, то считаем $w_1 \prec w_2$,

б) отношение $\prec$ на множестве правильных альтернаторов, начинающихся с одного и того же правильного одночлена, совпадает с каким-либо линейным порядком.

Рассмотрим R-слово

$$\xi = R(f_1)R(f_2)\dots R(f_q), \tag{43}$$

где f_i — однородные многочлены, среди которых l элементов имеют вид (40). Используя операторные соотношения (41) и (42), легко проверить, что слово ξ вида (43) представимо в виде линейной комбинации R-слов

$$\eta = R(j)R(w_1)R(w_2)\dots R(w_p), \quad \text{где } p < q, \tag{44}$$

где j — йорданов одночлен от элементов множества $\pi, w_i \in \pi$, $w_1 \prec w_2 \prec \dots \prec w_p$. Если среди элементов $w_1, w_2, \dots, w_p$ встречается k правильных альтернаторов, то йорданов одночлен j содержит $l-k$ правильных альтернаторов.

Докажем, что если $\eta \neq 0$, а l достаточно велико, то $l-k$ также достаточно велико. Рассмотрим линейное пространство W, порожденное элементами вида (44), в каждом из которых одночлен j содержит не менее $l-k+1$ правильных альтернаторов. Покажем, что $\eta \in W$. Рассуждая по модулю W, можно считать, что $W = 0$. Итак, пусть R-слово η отлично от нуля, l достаточно велико и одночлен j содержит $l-k$ правильных альтернаторов. Поскольку имеется лишь конечное число правильных одночленов, то при достаточно большом l найдется длинная последовательность правильных альтернаторов $w_{i1}, w_{i2}, \dots$, начинающихся с одного правильного одночлена v. Кроме того, можно считать, что правильные альтернаторы, начинающиеся с одночлена v, идут подряд. Предположим для сокращения обозначений, что $w_{is} = w_s$.

Пусть $a, b \in D_v$. Поскольку

$$R(a)R(b) = R(ab) - R(a,b) = \frac{1}{2}R(a \circ b) - R(a,b),$$

заменяя $R(w_1)R(w_2)$ в (44) на $\frac{1}{2}R(w_1 \circ w_2) - R(w_1, w_2)$, мы можем записать R-слово η в виде двух слагаемых. В силу равенства (42) первое слагаемое является нулевым (более точно, содержится в W), следовательно,

$$\eta = R(j)R(w_1,w_2)R(w_3)\dots R(w_p).$$

Далее, в силу равенства (21)

$$\eta = R(j)R(w_3)\dots R(w_p)R(w_1,w_2).$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\eta = R(j)R(w_3,w_4)R(w_5)\dots R(w_p)R(w_1,w_2)\\ = R(j)R(w_5)\dots R(w_p)R(w_1,w_2)R(w_3,w_4)\\ = R(j)R(w_1,w_2)R(w_3,w_4)\dots R(w_{2s-1},w_{2s})\dots .\end{aligned}$$

Поскольку в силу леммы 5 алгебра, порожденная операторами вида $R(a,b)$, где $a,b\in D_v$, нильпотентна, то $\eta=0$ при достаточно большом l.

Следовательно, для любого числа t найдется число $N=N(t)$ такое, что всякое R-слово ξ вида (43) длины q, содержащее N элементов из альтернаторного идеала, представимо в виде линейной комбинации слов η вида (44), для которых йорданов одночлен j содержит не меньше t правильных альтернаторов.

Поскольку йорданов одночлен j является суммой правонормированных одночленов той же степени и того же состава, то

$$R(I)^{q(t)}\subseteq R(I_{\langle t\rangle})R(A),\quad \text{где } I=\mathrm{Alt}(A).$$

Поэтому

$$R(I)^{2q(t)}\subseteq R(I_{\langle t\rangle})R(A)R(I)^{q(t)}\subseteq R(I_{\langle t\rangle})R(I)^{q(t)}R(A)\subseteq (R(I_{\langle t\rangle}))^2R(A).$$

Используя последнее операторное соотношение, получаем включение

$$I_{\langle f(t)\rangle}\subseteq \big(I^{\nabla}_{\langle t\rangle}\big)^{(1)},\quad \text{где } f(t)=2q(t)+1.$$

Отсюда по индукции имеем

$$I_{\langle f_k(t)\rangle}\subseteq \big(I^{\nabla}_{\langle t\rangle}\big)^{(k)},\quad \text{где } f_1(t)=f(t),\ f_{k+1}(t)=f_k(f(t)).$$

Следовательно, достаточно высокая правая степень идеала I содержится в некоторой высокой Пенико-разрешимой степени идеала I. По теореме 4 альтернаторный идеал Пенико-разрешим, значит, он правонильпотентен. $\square$

7.3. Заключительный этап доказательства основной теоремы. Пусть A — конечно порожденная бинарно $(-1,1)$-алгебра; I — ее идеал; P — ее подмножество; $I^{\wedge}$ — идеал алгебры умножений $T(A)$, порожденный множеством $T^A(I)$. Будем говорить, что I *действует нильпотентно на множестве* P, если найдется натуральное число n такое, что $P\cdot(I^{\wedge})^n=0$; наименьшее число n, обладающее указанным свойством, назовем *индексом нильпотентности*. Очевидно, что идеал I действует нильпотентно на множестве P тогда и только тогда, когда идеал I действует нильпотентно на идеале P^{∇}, порожденном множеством P.

Всюду ниже $I=\mathrm{Alt}(A)$. Дальнейшие рассмотрения удобно разбить на пункты.

1°. По теореме 4 идеал I Пенико-разрешим; пусть индекс его Пенико-разрешимости равен r. Поскольку альтернаторный идеал конечно порожденной алгебры $A/I^{(r-1)}$ Пенико-разрешим индекса $r-1$, по индукции можно считать, что для подходящего числа n справедливо включение $I^{[n]}\subseteq I^{(r-1)}$, значит, $(I^{[n]})^2=0$.

2°. Если P — правый идеал алгебры A такой, что

$$P\cdot I=P^{\nabla}\cdot I^{[n]}=I^{[n]}\cdot P^{\nabla}=0, \tag{45}$$

то идеал I действует нильпотентно на множестве $P\Delta(A)$.

Ввиду переработки операторных слов всякий элемент $T(y_1)\dots T(y_{\alpha+\beta})\in (I^{\wedge})^{\alpha}$ является линейной комбинацией операторных слов U вида

$$L(u_1)\dots L(u_p)R(v_1)\dots R(v_q).$$

Докажем, что $P\Delta(A)U=0$ при достаточно большом числе α. Поскольку преобразования операторных слов сохраняют состав, при достаточно большом числе α для операторного слова U выполнено одно из условий:

а) один из элементов $u_1, \dots, u_p$, $v_1, \dots, v_q$ содержится в $I^{[n]}$,

б) достаточно много элементов v_j содержатся в идеале I,

в) достаточно много элементов u_i содержатся в идеале I.

В силу равенств (45) и правой нильпотентности идеала I (лемма 13) можно считать, что среди элементов $u_1, \dots, u_p$ найдется $2n$ элементов из идеала I. Рассмотрим множество $P\Delta(A)L(u_1)\dots L(u_p)$. Используя тождество (26) и равенство $P \cdot I = 0$, легко понять, что

$$P\Delta(x,y)L(u_1)\dots L(u_p) \subseteq \sum P\Delta(u,v),$$

где хотя бы один из элементов u или v содержится в идеале $I^{[n]}$. Следовательно, $P\Delta(A)L(u_1)\dots L(u_p) = 0$ в силу (45), что и завершает доказательство п. 2°.

3°. Положим $S = I^{[t+1]}$, $J = I^{[t]}$. Докажем возвратной индукцией по t, что идеал J действует нильпотентно на $I^{[n]}$. Основание индукции при $t = n$ верно, так как идеал $I^{[n]}$ действует нулевым образом на $I^{[n]}$. Допустим, что идеал S действует нильпотентно на $I^{[n]}$; пусть индекс нильпотентности этого действия равен $d+1$, т. е. $I^{[n]}(S^\wedge)^{d+1} = 0$. Докажем, что идеал J действует нильпотентно на $I^{[n]}$.

4°. Рассмотрим сначала правый идеал $P_\lambda = I^{[n]}(S^\wedge)^d(R(I))^\lambda$ и докажем, что идеал J действует нильпотентно на P_λ. Проведем возвратную индукцию по числу λ. Основанием индукции является лемма 13. Предположим, что идеал J действует нильпотентно на правом идеале $P_{\lambda+1}$; индекс нильпотентности обозначим через μ.

Положим $B = \mathrm{Ann}(J^\wedge)^\mu$ и рассмотрим канонический гомоморфизм $A \to \overline{A} = A/B$. Тогда выполнены равенства

$$\overline{P_\lambda} \cdot \overline{I} = (\overline{P_\lambda})^\nabla \cdot \overline{I}^{[n]} = \overline{I}^{[n]} \cdot (\overline{P_\lambda})^\nabla = 0.$$

Значит, в силу п. 2° идеал $\overline{J}$ действует нильпотентно на множестве $\overline{P_\lambda\Delta(A)}$, т. е. найдется число v такое, что $\overline{P_\lambda\Delta(A)}(\overline{J}^\wedge)^v = 0$. Отсюда вытекает, что идеал J действует нильпотентно на множестве $P_\lambda\Delta(A)$, причем индекс нильпотентности не превосходит числа $\mu + v$.

5°. Пусть $P = P_\lambda$. Следуя п. 4°, можно считать справедливыми равенства

$$P^\nabla \cdot S = S \cdot P^\nabla = P \cdot I = P\Delta(A) = 0.$$

Отсюда в силу тождества (2) $[P, M] = 0$ и, значит, $MP = PM = 0$. Итак, выполнены равенства

$$P^\nabla \cdot S = S \cdot P^\nabla = PI = P\Delta(A) = MP = 0. \tag{46}$$

6°. Докажем, что идеал J действует нильпотентно на правом идеале P.

Учитывая, что M — левый идеал (лемма 9), последовательно получаем

$$\begin{gathered}
(A, M, P) \subseteq (AM)P - A(MP) \subseteq MP - A(MP) = 0,\\
(M, A, P) \subseteq P\Delta(M, A) - (A, M, P) = 0,\\
(P, M, A) \subseteq (PM)A - P(MA) \subseteq PI = 0,
\end{gathered}$$

т. е. справедливы равенства

$$(A, M, P) = (M, A, P) = (P, M, A) = 0. \tag{47}$$

Пусть $x, y \in A$; $i, j \in J$; $m \in M$; $p \in P$. Поскольку

$$2L(x^2)L(x) = 2L(x^3) - \Delta(x^2, x),$$

ввиду равенств (46)

$$P(L(m \circ x)L(i) + L(i \circ m)L(x) + L(i \circ x)L(m)) = 0. \tag{48}$$

Рассмотрим действие идеала $J^\wedge$ на пространстве JP. Прежде всего с учетом (46), (47) и включения $MJ \subseteq S$ имеем

$$pL(i)R(m) = (ip)m = i(pm) = 0, \quad pL(i)L(m) = m(ip) = (mi)p = 0,$$

следовательно,

$$PL(i)T(m) = 0. \tag{49}$$

Аналогично

$$pL(i)R(j) = (ip)j = (i, p, j) = -(i, j, p) = (j, i, p) = -pL(i)L(j).$$

Считая, что $i = m \circ x$, в силу (48) и (49) приходим к равенствам

$$pL(i)L(j) = pL(m \circ x)L(j) = -pL(j \circ m)L(x) - pL(j \circ x)L(m) = 0,$$

откуда на основании доказанного равенства $pL(i)R(j) = -pL(i)L(j)$ будет

$$PL(i)T(j) = 0. \tag{50}$$

Далее, с учетом (50) получаем

$$PL(i)L(x)L(j) = -PL(i)\Delta(x, j). \tag{51}$$

Заметим теперь, что вследствие (2) и (49) справедливы соотношения

$$[PL(i)\Delta(x, j), y] = [PL(i), y\Delta(x, j)] \subseteq \Sigma PL(i)T(y\Delta(x, j)) \subseteq \Sigma PL(i)T(m) = 0,$$

т. е. множество $PL(i)\Delta(x, j)$ содержится в коммутативном центре. Тогда в силу [3, следствие из леммы 7] имеем

$$PL(i)\Delta(x, j) \cdot (J^\wedge)^\gamma \subseteq \sum PL(i)\Delta(x, j)R(u_1) \dots R(u_q),$$

причем ввиду равенств (45) можно считать, что среди элементов $u_1, \dots, u_q$ содержится p элементов из идеала J. Выбирая в качестве числа γ индекс правой нильпотентности идеала I, получаем $PL(i)\Delta(x, j) \cdot (J^\wedge)^\gamma = 0$. Стало быть, можно считать, что

$$PL(i)\Delta(x, j) = 0. \tag{52}$$

Используя равенства (50)–(52) и следствие из леммы 8, заключаем, что идеал J аннулирует идеал $(JP)^\nabla$. Тогда можно считать, что $JP = 0$.

Итак, $PJ = JP = 0$. Кроме того, $P\Delta(A) = 0$ в силу (46), откуда вновь по следствию из леммы 8 получаем, что идеал J аннулирует идеал P^∇. П. 5° доказан.

6°. Из п. 5° вытекает, что идеал J действует нильпотентно на множестве $I^{[n]}(S^\wedge)^d$. Тогда можно считать, что $I^{[n]}(S^\wedge)^d = 0$. Рассуждая аналогично, считаем, что идеал J действует нильпотентно на идеале $I^{[n]}$. Следовательно, индукция, начатая в п. 3°, проведена. Основная теорема доказана. □

§ 8. Нильпотентность радикала конечно порожденной бинарно $(-1, 1)$-алгебры с существенным тождеством

Этот параграф посвящен доказательству нильпотентности радикала конечно порожденной бинарно $(-1,1)$ PI-алгебры. При доказательстве теоремы о нильпотентности радикала конечно порожденной бинарно $(-1,1)$ PI-алгебры используются основная теорема и результаты работ И. П. Шестакова [8] и В. Г. Скосырского [10].

В этом параграфе всюду $\mathfrak{F}[X]$ — свободная бинарно $(-1,1)$-алгебра над множеством X; $\mathrm{Ass}[X]$ — свободная ассоциативная алгебра над множеством X; A — бинарно $(-1,1)$-алгебра с существенным тождеством, порожденная множеством $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; $\mathfrak{L}(A)$ — локально нильпотентный радикал алгебры A.

Лемма 14. $\mathfrak{L}(A)$ *правонильпотентен.*

Доказательство. Введем обозначения: $\mathfrak{R}$ — идеал алгебры $R(A)$ правых умножений, порожденный операторами $R(a)$, $a \in \mathrm{Alt}(A)$; $\mathfrak{A} = R(A)/\mathfrak{R}$; $\mathfrak{J}$ — специальная йорданова алгебра, состоящая из элементов $R(x)+\mathfrak{R}$, $x \in A$; $\mathfrak{J}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}^+$.

Ясно, что $\mathfrak{A}$ является ассоциативной обертывающей для йордановой алгебры $\mathfrak{J}$. Поскольку альтернативная антикоммутативная алгебра нильпотентна индекса не меньше 4, то алгебра $\mathfrak{A}$ порождается конечным множеством $R(p)+\mathfrak{R}$, где p пробегает множество $\pi(X_n)$ правильных одночленов.

Допустим, что в алгебре A выполнено существенное тождество $f(y_1, \ldots, y_s) \in \mathfrak{F}[Y]$. Тогда в ней справедливо тождество $g(x,y) = f(xyx, \ldots, xy^s x)$ (расстановка скобок на одночленах $xy^s x$ правонормирована).

Рассмотрим канонический гомоморфизм $\overline{} : \mathfrak{F}[x,y] \to \mathrm{Ass}[x,y]$, продолжающий тождественное отображение множества свободных порождающих. Положим $h(x,y) = g(x,y)\cdot g'(x,y)$, где $\overline{g'(x,y)} = \overline{g(x,y)}^{*}$, $*$ — стандартная инволюция на $\mathrm{Ass}[x,y]$. По теореме Кона [4, гл. 3] элемент $\overline{h(x,y)}$ является йордановым многочленом. Значит, для некоторого йорданова многочлена $j(x,y) \in \mathfrak{F}[x,y]$ в алгебре $\mathfrak{F}[x,y]$ выполнено равенство $h(x,y) = j(x,y) + v(x,y)$, где $v(x,y)$ содержится в ассоциаторном идеале $D(\mathfrak{F}[x,y])$. По теореме Артина $D(\mathfrak{F}[x,y]) = \mathrm{Alt}(\mathfrak{F}[x,y])$. Следовательно, специальная йорданова алгебра $\mathfrak{J}$ удовлетворяет существенному тождеству $j(x,y)$, но тогда по теореме Шестакова [8, следствие 1.1] ее ассоциативная обертывающая алгебра $\mathfrak{A}$ также является PI-алгеброй.

Покажем теперь, что элемент $R(x)+\mathfrak{R}, x \in \mathfrak{L}(A)$, содержится в локально нильпотентном радикале $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$. Так как $x \in \mathfrak{L}(A)$, то $x \in \mathfrak{L}(A^+)$. Поскольку $\mathfrak{J}$ является гомоморфным образом присоединенной алгебры A^+, то $R(x)+\mathfrak{R} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{J})$. Тогда по теореме Скосырского [4, гл. 4] получаем $R(x)+\mathfrak{R} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{A})$.

В силу теоремы Размыслова — Кемера — Браун о нильпотентности радикала $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ для подходящего числа t верно включение $R(\mathfrak{L}(A))^t \subseteq \mathfrak{R}$. Осталось заметить, что по основной теореме идеал $\mathfrak{R}$ нильпотентен. $\square$

Лемма 15. *Идеал* $\overline{\Delta}$ *алгебры умножений* $T(A)$ *алгебры* A*, порожденный операторами* $\Delta(x)$*, нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $I = \mathrm{Alt}(A)$; $I^{\wedge}$ — идеал алгебры умножений $T(A)$, порожденный множеством $T^A(I)$.

Из операторных тождеств (12) и (26) вытекают сравнения по модулю идеала $I^\wedge$:

$$\Delta(x)H(y) \equiv 0, \quad 2\Delta(x)L(y) \equiv \Delta(x, yx) - R(x)\Delta(x, y).$$

Следовательно, $\Delta T(A) \subseteq R(A)\Delta + I^\wedge$. Поскольку по теореме 1 алгебра Δ^* нильпотентна некоторого индекса q, то $(I^\wedge)^{p-1}(\overline{\Delta})^q \subseteq (I^\wedge)^p$, откуда по индукции имеем $(\overline{\Delta})^{pq} \subseteq (I^\wedge)^p$. Применяя теперь основную теорему, получаем нильпотентность идеала $\overline{\Delta}$. $\square$

Лемма 16. $\mathfrak{L}(A)$ *левонильпотентен.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 14. Только вместо алгебры правых умножений нужно рассмотреть алгебру левых умножений, а в ней идеал $\mathfrak{R}$, порожденный операторами $R(a)$, $a \in \mathrm{Alt}(A)$, и $\Delta(x)$, $x \in A$, и воспользоваться леммой 15.

Поскольку правоальтернативная алгебра нильпотентна тогда и только тогда, когда она одновременно правонильпотентна и левонильпотентна [4, гл. 16], из лемм 14 и 16 вытекает

Теорема 5. *Верхний ниль-радикал конечно порожденной бинарно* $(-1,1)$-*алгебры, удовлетворяющей существенному тождеству, нильпотентен.*

В заключение сформулируем ряд наиболее интересных открытых вопросов теории бинарно $(-1,1)$-алгебр.

1. Является ли нильпотентным радикал свободной конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебры?

2. Верно ли, что разрешимый идеал конечно порожденной бинарно $(-1,1)$-алгебры нильпотентен?

3. Будет ли разрешимой бинарно $(-1,1)$-алгебра с тождеством $x^n = 0$?

4. Верно ли, что квадрат разрешимой бинарно $(-1,1)$-алгебры нильпотентен?

5. Существуют ли первичные бинарно $(-1,1)$-алгебры, не являющиеся ни альтернативными алгебрами, ни алгебрами типа $(-1,1)$?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Днестровская тетрадь.* Нерешенные проблемы теории колец и модулей. 4-е изд. Новосибирск: Наука, 1993.

2. *Пчелинцев С. В.* Нильпотентность ассоциаторного идеала свободного конечно порожденного $(-1,1)$-кольца // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 5. С. 543–571.

3. *Пчелинцев С. В.* О центральных идеалах конечно порожденных бинарно $(-1,1)$-алгебр // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 4. С. 113–134.

4. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.

5. *Шестаков И. П.* Абсолютные делители нуля и радикалы конечно порожденных альтернативных алгебр // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 5. С. 585–602.

6. *Скосырский В. Г.* О радикалах йордановых алгебр // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 2. С. 154–166.

7. *Львов И. В.* Теорема Брауна о радикале конечно порожденной PI-алгебры. Новосибирск, 1984. (Препринт/ИМ СО АН СССР; № 63).

8. *Шестаков И. П.* Конечно порожденные специальные йордановы и альтернативные PI-алгебры // Мат. сб. 1983. Т. 122, № 1. С. 31–40.

9. *Медведев Ю. А.* Представления конечно порожденных йордановых PI-алгебр // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, № 1. С. 64–78.

10. *Скосырский В. Г.* О нильпотентности в йордановых и правоальтернативных алгебрах // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 1. С. 73–85.

11. *Kleinfeld E.* Right alternative rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. V. 4. P. 939–944.

12. *Thedy A.* Right alternative rings // J. Algebra. 1975. V. 37. P. 1–43.
13. *Hentzel I. R., Smith H. F.* Simple locally $(-1, 1)$ nil rings // J. Algebra. 1986. V. 101. P. 262–272.
14. *Пчелинцев С. В.* Бинарно $(-1, 1)$-нильалгебры // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 1. С. 103–109.
15. *Пчелинцев С. В.* Первичные алгебры и абсолютные делители нуля // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 1. С. 79–100.
16. *Penico A. J.* The Wedderburn principal theorem for Jordan algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1951. V. 70. P. 404–420.
17. *Пчелинцев С. В.* О локально нильпотентном радикале в некоторых классах правоальтернативных колец // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 2. С. 340–360.
18. *Hentzel I. R.* Nil semi-simple locally $(-1, 1)$ rings // Bull. Iranian Math. Soc. 1981. V. 9. P. 11–14.

Статья поступила 3 июня 2003 г.

Пчелинцев Сергей Валентинович
Финансовая академия при правительстве Российской Федерации,
Ленинградский пр., 49, Москва 125468