Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 512.542

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ БЭРА — СУЗУКИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП

А. С. Мамонтов

Аннотация: Доказано, что если в группе нет бесконечно возрастающих цепочек нильпотентных подгрупп и любые два элемента из сопряженного класса порождают нильпотентную подгруппу, то и весь класс будет порождать нильпотентную подгруппу.

Ключевые слова: группа, нильпотентная группа, теорема Бэра — Сузуки, класс сопряженности.

1. Введение

Известная теорема Бэра гласит: *если группа G конечна и порождается энгелевыми элементами, то G нильпотентна* [1, теорема III 6.14]. Важным следствием этого результата является

Утверждение (∗). *Пусть x — p-элемент конечной группы G, тогда $x \in O_p(G)$ в том и только в том случае, если $\langle x^g, x^h \rangle$ — p-группа для всех $g, h \in G$ (здесь $O_p(G)$ — максимальная нормальная p-подгруппа группы G).*

В [2] М. Сузуки получил другое доказательство (∗) и использовал этот результат при исследовании некоторых свойств инволюций в конечных группах (в связи с этим утверждение (∗) известно как теорема Бэра — Сузуки). Позднее более короткое и доступное доказательство (∗) было получено в [3], а сама эта теорема применялась в теории конечных разрешимых групп [4] и при классификации конечных простых групп [5]. Важным практическим следствием теоремы Бэра — Сузуки является утверждение о том, что в простой группе G любая инволюция обращает некоторый неединичный элемент нечетного порядка [3].

По теореме Бернсайда — Виландта конечная группа нильпотентна тогда и только тогда, когда она является прямым произведением своих силовских подгрупп. В связи с этим теорему Бэра — Сузуки можно переформулировать таким образом.

Пусть C — класс сопряженности конечной группы G. Если любые два элемента из C порождают нильпотентную группу, то и C порождает нильпотентную группу.

Настоящая работа посвящена некоторому обобщению этой «модернизированной» теоремы Бэра — Сузуки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00495) и программы «Университеты России» (грант УР.04.01.028).

Теорема 1. *Пусть G — группа, в которой нет бесконечно возрастающих цепочек нильпотентных подгрупп. Пусть $x \in G$ и для любого $g \in G$ подгруппа $\langle x, x^g \rangle$ нильпотентна, тогда $\langle x^G \rangle$ нильпотентна.*

Отметим, что если отказаться от ограничений на группу в условии теоремы 1, то нельзя рассчитывать даже на то, что соответствующая группа $\langle x^G \rangle$ будет локально нильпотентна. В качестве примера можно рассмотреть группу Голода с тремя порождающими [6, пример 18.3.2].

Доказательство теоремы 1 опирается на следующий результат.

Теорема 2. *Пусть G — группа, N — нильпотентная нормальная подгруппа в G, $x_1, \dots, x_n$ — элементы группы G, порождающие нильпотентную подгруппу K, и $G = \langle N, x_1, \dots, x_n \rangle$. Группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда для любого $i = 1, \dots, n$ подгруппа $\langle N, x_i \rangle$ нильпотентна.*

2. Доказательство теоремы 2

Пусть $G = \langle N, x_1, \dots, x_n \rangle$, где N — нормальная нильпотентная подгруппа группы G, элементы $x_1, \dots, x_n$ порождают нильпотентную подгруппу K и подгруппы $\langle N, x_i \rangle$ нильпотентны, $i = 1, \dots, n$.

Пусть x — некоторый элемент из набора $\{x_1, \dots, x_n\}$, скажем, $x = x_1$. Определим по индукции цепочку субнормальных подгрупп группы G:

$$G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd \dots \rhd G_i \rhd \dots, \tag{1}$$

где $G_0 = G$, $G_{i+1} = N\langle x^{G_i} \rangle$, и цепочку субнормальных подгрупп группы K:

$$K_0 \rhd K_1 \rhd K_2 \rhd \dots \rhd K_i \rhd \dots, \tag{2}$$

где $K_0 = K$, $K_{i+1} = \langle x^{K_i} \rangle$.

Очевидно, что для всех i выполняются включения $N\langle x \rangle \le G_i$, $\langle x \rangle \le K_i$. Кроме того, $G_i = NK_i$. Установим это равенство индукцией по i. Пусть равенство верно при $i = j$, т. е. $G_j = NK_j$. Покажем, что тогда $G_{j+1} = NK_{j+1}$. Пусть $g = nk$ — произвольный элемент из G_j, где $n \in N$, $k \in K_j$. Тогда $x^g = x^{nk} = [n, x^{-1}]^k x^k = n_1 x^k$, где $n_1 \in N$. Так как по построению $G_{j+1} = N\langle x^{G_j} \rangle$, $K_{j+1} = \langle x^{K_j} \rangle$, то произвольный элемент из G_{j+1} имеет вид nx^g, где $n \in N$, $g \in G_j$. По доказанному $nx^g = nn_1x^k = n_2k_1$, где $n_2 = nn_1 \in N$, $k_1 = x^k \in K_{j+1}$. Следовательно, $G_{j+1} \le NK_{j+1}$. Обратное включение очевидно.

Покажем, что ряд (2) (соответственно ряд (1)) сойдется за конечное число шагов, точнее, дойдет до $K_s = \langle x \rangle$, s — целое (ряд (1) — до $G_s = N\langle x \rangle$).

Так как в произвольной нильпотентной группе F ступени нильпотентности s ряд последовательных нормализаторов достигает F не позже чем через s шагов [6, теорема 16.2.2], ряд последовательных нормализаторов подгруппы $\langle x \rangle$ нильпотентной группы K достигнет K за конечное число шагов:

$$K = H_s \rhd H_{s-1} \rhd \dots \rhd H_1 = \langle x \rangle,$$

где $H_{i+1} = N_K(H_i)$.

Покажем индукцией по j, что $K_j \le H_{s-j}$. Пусть утверждение верно при $j = i$, т. е. $K_i \le H_{s-i}$. Покажем, что тогда $K_{i+1} \le H_{s-(i+1)}$. Пусть $y \in K_{i+1}$, тогда $y = x^{c_1} \dots x^{c_m}$, где $c_1, \dots, c_m \in K_i \le H_{s-i}$. По построению $H_{s-i} = N_K(H_{s-(i+1)})$, поэтому для всех j имеем ${H_{s-(i+1)}}^{c_j} = H_{s-(i+1)}$. Так как $x \in H_{s-(i+1)}$, то для всех j выполняется включение $x^{c_j} \in H_{s-(i+1)}$, а следовательно,

$y \in H_{s-(i+1)}$, что и требовалось. Из полученных включений следует сходимость ряда (2), а значит, и сходимость ряда (1), которую мы и хотели доказать.

Покажем теперь, что G_1 — нильпотентная группа. Для этого рассмотрим «укороченный» ряд (1):

$$G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \dots \triangleright G_s = N\langle x \rangle. \tag{3}$$

Будем доказывать нильпотентность группы G_1 индукцией по длине ряда (3). При $s \leq 1$ утверждение тривиально. Пусть $s > 1$. По предположению индукции подгруппа G_2 нильпотентна. Рассмотрим следующий фрагмент ряда (3):

$$G_0 = G \triangleright G_1 = N\langle x^G \rangle \triangleright G_2 = N\langle x^{G_1} \rangle.$$

Вспомним, что $G_1 = NK_1$, а K_1 — подгруппа нильпотентной конечнопорожденной группы K. Следовательно, подгруппа K_1 порождается конечным числом элементов $d_1, \dots, d_r$ (см., например, [7, следствие 2.5.6, предложение 2.5.7]), каждый из которых представляется в виде произведения конечного числа элементов вида x^{c_i}, где $c_i \in K$, так как по построению $K_1 = \langle x^K \rangle$. Очевидно, что все эти элементы x^{c_i} (подчеркнем, что их конечное число) порождают подгруппу K_1, т. е. $K_1 = \langle x^{c_1}, \dots, x^{c_m} \rangle$, где $c_i \in K$ и m — некоторое натуральное число. Тогда $G_1 = N\langle x^{c_1}, \dots, x^{c_m} \rangle$.

Попробуем теперь сконструировать G_1 из уже имеющихся у нас кирпичиков — нильпотентных подгрупп, сохраняя при построении свойство нильпотентности. А именно, рассмотрим произведение групп $NG_2^{c_i}$ и обозначим его через

$$D = NG_2^{c_1} NG_2^{c_2} \dots NG_2^{c_m}.$$

Очевидно, что $x^{c_i} \in NG_2^{c_i}$, поэтому $\langle x^{c_1}, \dots, x^{c_m}, N \rangle \leq D$, откуда следует, что $D = G_1$. С другой стороны, сопрягая обе части соотношения $G_2 \triangleleft G_1$ элементами $c_i \in G$, получим, что $G_2^{c_i}$ — нормальные нильпотентные подгруппы в G_1, а следовательно, по теореме Фиттинга [6, теорема 16.2.12] $D = G_1$ — нильпотентная группа.

Итак, мы доказали, что $N\langle x^G \rangle$, где $x = x_1$ — нормальная нильпотентная подгруппа группы G. Полагая последовательно $x = x_2, \dots, x = x_n$, получим, что $N\langle {x_i}^G \rangle$ — нормальные нильпотентные подгруппы в G для всех $i = 1, \dots, n$. По теореме Фиттинга произведение $F = N\langle {x_1}^G \rangle \dots N\langle {x_n}^G \rangle$ нильпотентно. С другой стороны, очевидно, что $F \supset N \cup \{x_1, \dots, x_n\}$, но по условию $G = N\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, поэтому $F = G$. Следовательно, G — нильпотентная группа. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — группа, в которой нет бесконечно возрастающих цепочек нильпотентных подгрупп. Пусть $x \in G$ и для любого $g \in G$ подгруппа $\langle x, x^g \rangle$ нильпотентна. Будем рассматривать подгруппы A и B группы G со следующими условиями:

(а) A и B нильпотентны;

(б) A и B порождаются элементами, сопряженными с x, т. е. $A = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, $B = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$, где $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in x^G$;

(в) найдется такой элемент $g \in G$, что $x^g \in A \cap B$;

(г) $\langle A, B \rangle$ — не нильпотентная группа;

(д) найдутся такие элементы $a \in A \backslash (A \cap B)$ и $b \in B \backslash (A \cap B)$, сопряженные с x, что $A = \langle A \cap B \cap x^G, a \rangle$, $B = \langle A \cap B \cap x^G, b \rangle$.

Совокупность всевозможных различных таких пар подгрупп (A, B), удовлетворяющих условиям (а)–(д), обозначим через Ω.

Рассмотрим сначала случай, когда $\Omega = \varnothing$. Индукцией по n докажем, что все подгруппы вида $\langle x_1, \dots, x_n\rangle$, где $x_i \in x^G$, нильпотентны. Тогда в силу условия теоремы цепочка нильпотентных подгрупп

$$\langle x\rangle < \langle x, x^{g_1}\rangle < \dots < \langle x, x^{g_1}, \dots, x^{g_n}\rangle < \dots$$

рано или поздно оборвется (за конечное число шагов). При этом она захватит группу $\langle x^G\rangle$ и тем самым утверждение теоремы будет доказано.

Отметим, что в силу условий теоремы индукционное утверждение верно при $n = 2$. Пусть $n \geq 2$. Предположим противное, т. е. найдутся такие элементы $x_1, \dots, x_{n+1} \in x^G$ $(n \geq 2)$ что подгруппа $\langle x_1, \dots, x_{n+1}\rangle$ не нильпотентна. Обозначим $A = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$, $B = \langle x_2, \dots, x_{n+1}\rangle$. По предположению индукции A и B нильпотентны. Так как $n \geq 2$, то $A \cap B \geq \langle x_2, \dots, x_n\rangle \neq \varnothing$. Пара (A, B) удовлетворяет всем условиям (а)–(д), а следовательно, лежит в Ω. Получили противоречие.

В силу сказанного выше далее можно считать, что $\Omega \neq \varnothing$.

Рассмотрим множество $\Gamma = \{\langle A \cap B \cap x^G\rangle \mid (A, B) \in \Omega\}$. Отметим, что так как $\Omega \neq \varnothing$ и для элементов из Ω справедливо свойство (в), то и $\Gamma \neq \varnothing$. Частично упорядочим Γ отношением включения и покажем, что Γ удовлетворяет условиям леммы Цорна. Рассмотрим цепь

$$\langle A_1 \cap B_1 \cap x^G\rangle < \langle A_2 \cap B_2 \cap x^G\rangle < \dots < \langle A_m \cap B_m \cap x^G\rangle < \dots$$

в Γ и покажем, что она имеет верхнюю границу в Γ.

Отметим, что для всех i пара (A_i, B_i) лежит в Ω, а стало быть, подгруппа A_i нильпотентна, но $\langle A_i \cap B_i \cap x^G\rangle \leq A_i$, поэтому для всех i подгруппа $\langle A_i \cap B_i \cap x^G\rangle$ нильпотентна. По условиям теоремы в G не может быть бесконечно возрастающих цепочек нильпотентных подгрупп. Поэтому и наша цепочка стабилизируется на некотором номере n:

$$\langle A_1 \cap B_1 \cap x^G\rangle < \langle A_2 \cap B_2 \cap x^G\rangle < \dots < \langle A_n \cap B_n \cap x^G\rangle = \langle A_{n+1} \cap B_{n+1} \cap x^G\rangle = \dots.$$

Ясно, что $\langle A_n \cap B_n \cap x^G\rangle$ и есть искомая верхняя граница. Очевидно также, что она лежит в Γ. По лемме Цорна в Γ есть максимальный элемент. Пусть $C = \langle A \cap B \cap x^G\rangle$ — максимальный элемент в Γ, (A, B) — соответствующая ему пара элементов из Ω.

Отдельно рассмотрим следующую ситуацию: $C \lhd A$, $C \lhd B$. В силу условия (д) найдутся такие элементы $a \in A \setminus (A \cap B)$ и $b \in B \setminus (A \cap B)$, сопряженные с x, что $A = \langle C, a\rangle$, $B = \langle C, b\rangle$. Вследствие условия (а) подгруппы $\langle C, a\rangle$, $\langle C, b\rangle$ нильпотентны. Подгруппа $\langle a, b\rangle$ нильпотентна по условию теоремы. Ввиду предположения $C \lhd \langle A, B\rangle = \langle C, a, b\rangle$. По теореме 2 группа $\langle A, B\rangle$ нильпотентна, что противоречит условию (г).

Итак, C не может быть одновременно нормальной и в A, и в B. Пусть для определенности C не нормальна в A. Введем следующие обозначения:

$$D = N_A(C), \quad E = N_A(D), \quad C^E = \{c^f \mid c \in C, f \in E\}.$$

Отметим, что $C^E \neq C$. В противном случае $E \subseteq N_A(C) = D$, а следовательно, $E = D$. Таким образом, в нильпотентной группе A найдется подгруппа $D \neq \{e\}$, для которой $N_A(D) = D$, что возможно только в том случае, когда $D = A$, т. е. $C \ntriangleleft A$. Мы же предполагаем, что это не так.

В силу сказанного существует $z_0 \in C^E \backslash C \subseteq D \backslash C$. Тогда найдется $s \in E$ такой, что $z_0 = x^{f_1 s} \dots x^{f_n s} \notin C$, где f_i — элементы из G такие, что $x^{f_i} \in C$. Среди номеров i найдется такой, что $x^{f_i s} \notin A \cap B$, но $x^{f_i s} \in D$, т. е. найдется $z \in D \backslash C$, который сопряжен с x. Так как $z \in D$, то $C \triangleleft \langle C, z \rangle$.

Далее, если $C \triangleleft B$, то $C \triangleleft \langle C, B, z \rangle$. Тогда поступаем, как мы уже делали выше: берем такой элемент $b \in x^G$, который обеспечивается условием (д) и вместе с C порождает всю группу B, т. е. такой, что $B = \langle C, b \rangle$. Согласно условию (а) подгруппа $\langle C, b \rangle$ нильпотентна; $\langle C, z \rangle$ нильпотентна как подгруппа нильпотентной группы A; подгруппа $\langle z, b \rangle$ нильпотентна по условию теоремы. Опять по теореме 2 получаем, что $H = \langle C, B, z \rangle = \langle C, z, b \rangle$ нильпотентна. Отметим, что в силу справедливости условия (г) для пары (A, B) группа $\langle H, A \rangle = \langle A, B \rangle$ не нильпотентна. Обозначим $C_1 = \langle H \cap A \cap x^G \rangle = \langle C, z \rangle$. Выберем элемент $a \in A$, который обеспечивается условием (д) и который вместе с C порождает всю группу A, т. е. такой, что $A = \langle C, a \rangle$. Отметим, что a не лежит в C_1, так как в противном случае a нормализовал бы C и потому подгруппа A нормализовала бы C. Мы же предполагаем, что это не так. Кроме того, очевидно, $H = \langle C_1, b \rangle$, $A = \langle C_1, a \rangle$, т. е. пара (H, A) удовлетворяет условию (д). Пара (H, A) удовлетворяет и остальным условиям (а)–(г), а следовательно, лежит в Ω. Получили, что $\langle H \cap A \cap x^G \rangle \in \Gamma$. Ясно, что $C \leq \langle H \cap A \cap x^G \rangle$, кроме того, существует $z \in H \cap A$, который не лежит в C, но который сопряжен с элементом x. Получаем противоречие с максимальностью $\langle A \cap B \cap x^G \rangle$ в Γ.

Если же подгруппа C не нормальна в B, то, как и выше, можно гарантировать существование такого элемента $z' \in N_B(C) \backslash C$, который сопряжен с элементом x. Тогда $C \triangleleft \langle C, z, z' \rangle$. Мы находимся в условиях теоремы 2: $\langle C, z \rangle$ нильпотентна как подгруппа нильпотентной группы A; $\langle C, z' \rangle$ нильпотентна как подгруппа нильпотентной группы B; $\langle z, z' \rangle$ нильпотентна по условию теоремы. По теореме 2 группа $K = \langle C, z, z' \rangle$ нильпотентна.

Если группы $A_1 = \langle A, K \rangle$ и $B_1 = \langle B, K \rangle$ нильпотентны, то пара (A_1, B_1) удовлетворяет условиям (а)–(д), а следовательно, лежит в Ω. Тогда группа $\langle A_1 \cap B_1 \cap x^G \rangle$ лежит в Γ и содержит элемент z, сопряженный с x, который не лежит в C. Получаем противоречие с максимальностью C в Γ.

Если же, скажем, $\langle A, K \rangle$ не нильпотентна, то пара (A, K) удовлетворяет условиям (а)–(д) и тем самым лежит в Ω. Аналогично получаем противоречие с максимальностью C в Γ и в этом случае. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Endliche GruppenI. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979.
2. *Suzuki M.* Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed // Ann. of Math (2). 1968. V. 82. P. 191–212.
3. *Alperin J. Lyons R.* On conjugacy classes of p-elements // J. Algebra. 1971. V. 19. P. 536–537.
4. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin: de Gruyter, 1992.
5. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
6. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
7. *Khukhro E. I.* Nilpotent groups and their automorphisms. Berlin: de Gruyter, 1993.

Статья поступила 8 августа 2003 г., окончательный вариант — 31 октября 2003 г.

Мамонтов Андрей Сергеевич
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
andreysmamontov@yahoo.com