Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 512.542

О p–ДЛИНЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП ШМИДТА

В. Н. Княгина, В. С. Монахов

Аннотация: Устанавливается, что конечная p-разрешимая группа, представимая в виде произведения двух своих подгрупп Шмидта, имеет p-длину не более 2.

Ключевые слова: конечная группа, p-разрешимая группа, p-длина.

Посвящается профессору В. Д. Мазурову
в связи с его 60-летием

Группой Шмидта называют ненильпотентную конечную группу, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Строение конечной группы $G = AB$, представимой в виде произведения двух подгрупп Шмидта A и B, исследовалось в работах В. Д. Мазурова, В. С. Монахова и С. А. Сыскина [1–4]. В частности, в этих работах доказаны следующие утверждения.

Если G — неразрешимая группа, то $G/S(G) \simeq PSL(2,5)$, $PSL(2,11)$, $SL(2,8)$, $\operatorname{Aut} SL(2,8)$ (см. [3, теорема 3.7]).

Если A и B — сверхразрешимые подгруппы, то группа G разрешима и ее производная длина не выше 3 (см. [4, следствие 3]).

Здесь $S(G)$ — разрешимый радикал группы G.

В работе А. Х. Журтова и С. А. Сыскина [5] установлено, что *если G — p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой, изоморфной силовской подгруппе из группы Шмидта, то p-длина группы G не выше* 1.

Отсюда, в частности, вытекает, что *разрешимая группа $G = AB$, где A и B — подгруппы Шмидта взаимно простых порядков, имеет единичную p-длину для всех $p \in \pi(G)$* (см. [3]). Но если условие взаимной простоты порядков подгрупп Шмидта A и B отбросить, то p-длина может быть больше 1. Например, симметрическая группа S_4 имеет 2-длину, равную 2, и является произведением двух подгрупп Шмидта A_4 и S_3.

В настоящей заметке доказывается следующая

Теорема. *Если A и B — подгруппы Шмидта конечной p-разрешимой группы G и $G = AB$, то p-длина группы G не выше* 2.

Используются стандартные обозначения, соответствующие [6]. Свойства групп Шмидта перечислены в [3], см. также [6, 7]. Группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой P и циклической ненормальной силовской q-подгруппой Q будем обозначать через $S = [P]Q$. Приведем формулировки наиболее часто используемых утверждений. Рассматриваются только конечные группы.

Лемма 1 [5, теорема 3]. *Если G — p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой, изоморфной силовской подгруппе из группы Шмидта, то $l_p(G) \leq 1$.*

Лемма 2 [6, теорема VI.6.6]. *Пусть G — p-разрешимая группа. Тогда $l_p(G) \leq c_p(G)$, где $c_p(G)$ — ступень нильпотентности силовской p-подгруппы группы G.*

Лемма 3 [6, теорема VI.4.4]. *Если группа $G = AB$, где A и B — абелевы подгруппы, то G метабелева.*

Лемма 4 [4, леммы 5, 7]. *Пусть в p-разрешимой группе G силовская p-подгруппа является произведением двух циклических подгрупп. Тогда*

(1) если $p > 2$, то $l_p(G) \leq 1$;

(2) если $p = 2$, то $G/O_{2',2}(G)$ либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3. В частности, $l_2(G) \leq 2$.

Пусть π — множество простых чисел. У каждой π-разрешимой группы существует нормальный ряд, факторы которого являются π-группами или π'-группами. Такой ряд называют (π, π')*-рядом.* π*-Длиной* π-разрешимой группы G называют наименьшее число π-факторов среди всех (π, π')-рядов группы G. π-Длина π-разрешимой группы G обозначается через $l_\pi(G)$. Как обычно, $\Phi(G)$ и $F(G)$ — подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G, а $O_{\pi'}(G)$ и $O_\pi(G)$ — наибольшие нормальные π'- и π-подгруппы группы G соответственно.

Лемма 5. *Пусть G — π-разрешимая группа. Если силовские p-подгруппы группы G циклические для всех $p \in \pi(G)$, то $l_\pi \leq 1$.*

Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Ясно, что $\Phi(G) = O_{\pi'}(G) = 1$, $F = F(G) = O_p(G)$ и F является минимальной нормальной подгруппой группы G, причем $C_G(F) = F$. Понятно также, что силовская p-подгруппа G_p совпадает с F, а так как группа автоморфизмов циклической группы абелева, то фактор-группа G/F абелева. Поэтому $l_\pi(G) \leq 1$.

Лемма 6. *Пусть $G = AB$ — p-разрешимая группа, где A и B — p-замкнутые pd-подгруппы Шмидта. Если G не p-замкнута, то $p = 3$, $\pi(G) = \{2, 3\}$ и $l_3(G) \leq 1$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения: $A = [P_1]Q$, $B = [P_2]R$, где P_1 и P_2 — силовские p-подгруппы из A и B такие, что P_1P_2 — силовская p-подгруппа из G (см. лемму VI.4.7 в [6]), Q — силовская q-подгруппа из A, R — силовская r-подгруппа из B. Поскольку $\pi(G) = \{p, q, r\}$ и G p-разрешима, то группа G разрешима и по лемме VI.4.7 из [6] можно считать, что QR — $\{q, r\}$-холлова подгруппа при $q \neq r$ или QR — силовская q-подгруппа при $q = r$.

Предположим, что $q \neq r$, и пусть $\pi = \{q, r\}$. Тогда $l_\pi(G) \leq 1$ по лемме 5 и $K = O_p(G)(QR)$ нормальна в G. Теперь $Q \leq A \cap K \lhd A$ и $R \subseteq B \cap K \lhd B$. По свойствам групп Шмидта $A \leq K$ и $B \leq K$, т. е. $G = O_p(G)(QR)$ — p-замкнутая группа.

Пусть $q = r$. Если $l_q(G) \leq 1$, то опять $G = O_{p,q}(G)$ — p-замкнутая группа. Пусть $l_q(G) > 1$. Так как силовская q-подгруппа группы G является произведением двух циклических подгрупп Q и R, по лемме 4 получаем, что $q = 2$ и $p = 3$. Теперь $|P_1| = |P_2| = 3$ и $l_3(G) \leq 1$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть G — p-разрешимая группа, A и B — p-нильпотентные pd-подгруппы Шмидта и $G = AB$. Если группа G не p-нильпотентна, то $p = 2$, $3 \in \pi(G)$ и $l_2(G) \leq 2$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения: $A = [Q]P_1$, $B = [R]P_2$, где P_1 и P_2 — силовские p-подгруппы из A и B такие, что P_1P_2 является силовской p-подгруппой группы G (см. [6, лемма VI.4.7]), Q — силовская q-подгруппа из A, R — силовская r-подгруппа из B. Если $p > 2$, то P_1P_2 — метациклическая группа по лемме III.11.5 из [6] и $l_p(G) \leq 1$ по лемме 4. Теперь $K = O_{p'}(G)(P_1P_2)$ нормальна в G, поэтому $A \cap K \supseteq P_1$ и $A \cap K$ нормальна в A. По свойствам групп Шмидта получаем, что $A \leq K$. Аналогично $B \subseteq K$ и $K = G$ — p-нильпотентная группа.

Пусть $p = 2$. Тогда $|Q| = q$, $|R| = r$ и силовская 2-подгруппа P_1P_2 в группе G является произведением двух циклических подгрупп. По лемме 4 либо фактор-группа $G/O_{2',2}(G)$ имеет нечетный порядок, либо она изоморфна S_3 и $l_2(G) \leq 2$.

Пусть $G/O_{2',2}(G)$ имеет нечетный порядок. Тогда $P_1P_2 \subseteq O_{2',2}(G)$ и $A \cap O_{2',2}(G)$ — нормальная подгруппа в группе A, причем $P_1 \subseteq A \cap O_{2',2}(G)$. Это возможно, лишь когда $A \subseteq O_{2',2}(G)$. Аналогично $B \subseteq O_{2',2}(G)$ и $G = O_{2',2}(G)$ — 2-нильпотентная группа.

Пусть $G/O_{2',2}(G) \simeq S_3$. Тогда $3 \in \pi(G)$ и $l_2(G) \leq 2$. Лемма доказана.

Пример. Пусть p — простое нечетное число и C_p — циклическая группа порядка p. Эта группа обладает автоморфизмом α порядка 2. Зададим отображение $\phi : S_4 \to \langle\alpha\rangle$ следующим образом: $\phi(\tau) = \alpha$, если τ — нечетная перестановка, и $\phi(\tau) = 1$, если τ — четная перестановка. Тогда ϕ — гомоморфизм группы S_4 на $\langle\alpha\rangle$, ядро которого совпадает с A_4. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [C_p]S_4$ относительно гомоморфизма ϕ. Тогда $G = S_3([C_p]\langle(1234)\rangle)$ есть произведение двух 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четных порядков, причем G — не 2-нильпотентная группа и $l_2(G) = 2$. При $p = 3$ построенная группа не 3-замкнута.

Приведенный пример показывает, что в лемме 6 группа может быть не 3-замкнутой, а в лемме 7 — не 2-нильпотентной.

Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы. Если одна из подгрупп A или B является p'-подгруппой, то $l_p(G) \leq 1$ по лемме 1. Поэтому считаем в дальнейшем, что A и B — pd-подгруппы. Теперь из условия теоремы получаем, что $|\pi(G)| \leq 3$ и G p-разрешима, поэтому G разрешима.

Если $1 \neq N \lhd G$, то $G/N = (AN/N)(BN/N)$ — p-разрешимая группа. Если AN/N и BN/N — pd-подгруппы, то они являются подгруппами Шмидта и по индукции $l_p(G/N) \leq 2$. Если один из факторов не является pd-группой, то $l_p(G/N) \leq 1$ по лемме 1. Итак, $l_p(G/N) \leq 2$ для любой подгруппы $1 \neq N \lhd G$. По лемме VI.6.9 из [6] получаем, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$ и $N = F(G) = O_p(G) = C_G(O_p(G))$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

По леммам 6 и 7 одна из подгрупп A или B должна быть p-замкнутой, а другая p-нильпотентной. Пусть A — p-замкнутая подгруппа Шмидта, а B — p-нильпотентная подгруппа Шмидта. Зафиксируем обозначения: $A = [P_1]Q$, $B = [R]P_2$, где P_1 и P_2 — силовские p-подгруппы из A и B соответственно, Q — силовская q-подгруппа из A, R — силовская r-подгруппа из B. Если подгруппа P_1 абелева, то по лемме VI.4.7 из [6] силовская p-подгруппа G_p группы G является произведением абелевых подгрупп. По лемме 3 ступень нильпотентности подгруппы G_p не выше 2, поэтому $l_p(G) \leq 2$ по лемме 2. Значит, в дальнейшем следует считать, что подгруппа P_1 неабелева, поэтому $q > 2$.

Проверим, что $A \cap B = 1$. Так как P_1 неабелева, а P_2 циклическая, то P_1 не содержится в P_2. Если P_2 содержится в P_1, то $l_p(G) \leq 1$ по лемме 1.

Пусть P_2 не содержится в P_1. Предположим, что $D = P_1 \cap P_2 \neq 1$. Тогда D — собственная подгруппа в P_2 и из свойств групп Шмидта получаем, что $D \leq Z(B)$. Теперь $D^G = D^{BA} = D^A \leq P_1^A = P_1$. Так как N — единственная минимальная нормальная подгруппа, то $N \leq P_1$. Если $N \neq P_1$, то из свойств групп Шмидта следует, что $N \leq Z(A)$; противоречие с тем, что $N = C_G(N)$. Если $N = P_1$, то в фактор-группе G/N силовская p-подгруппа циклическая, поэтому $l_p(G/N) \leq 1$ и $l_p(G) \leq 2$, т. е. теорема верна. Поэтому следует считать, что $P_1 \cap P_2 = 1$.

Предположим, что $L = A \cap B \neq 1$. Если $Q \leq R$ или $R \leq Q$, то $l_q(G) \leq 1$ по лемме 1, поэтому $l_p(G) \leq 2$. Пусть Q не содержится в R и R не содержится в Q. Тогда L — собственная подгруппа в Q и $L \leq Z(A)$. Теперь $L^G = L^{AB} = L^B \leq R^B = R$ и в группе G появилась нормальная p'-подгруппа. Это невозможно. Значит, всегда $A \cap B = 1$.

Предположим, что подгруппа R циклическая. Тогда $|R| = r > 2$. Если $q = r$, то $l_q(G) \leq 1$ по лемме 4 и $l_p(G) \leq 2$. Если $q \neq r$, то $l_{\{q,r\}}(G) \leq 1$ по лемме 5 и опять $l_p(G) \leq 2$. Итак, подгруппа R нециклическая, поэтому $p > 2$ и подгруппа B не сверхразрешима.

Ясно, что $N \leq P_1P_2$. Если P_2 не содержится в $N_G(P_1)$, то $N_G(P_1) \cap P_2 \subseteq Z(B)$, а так как $P_1 \neq N_G(P_1)$, то $D = N_G(P_1) \cap P_2 \neq 1$. Теперь $D^G = D^{BA} = D^A \leq N_G(P_1)$ и $N \leq N_G(P_1)$. Если $P_2 \subseteq N_G(P_1)$, то $N \leq P_1P_2 \leq N_G(P_1)$. Итак, в любом случае $N \leq N_G(P_1)$.

Если $N \cap P_1 = 1$, то

$$N \simeq NP_1/P_1 \leq P_1P_2/P_1 \simeq P_2$$

и N имеет простой порядок p. Так как $N = C_G(N)$, то G/N изоморфна подгруппе из группы $\mathrm{Aut}\, N$, которая является циклической группой порядка $p-1$; противоречие. Значит, $N \cap P_1 = N_1 \neq 1$, и по теореме Машке $N = N_1 \times N_2$, где $N_G(N_2) \geq Q$. Предположим, что $N_2 \neq 1$, т. е. N не содержится в P_1. Так как N — элементарная абелева p-группа и $N/N_1 \simeq NP_1/P_1 \leq P_1P_2/P_1 \simeq P_2$, то $|N/N_1| = p$ и $|N_2| = p$. Поскольку P_1 неабелева, по свойствам групп Шмидта показатель числа p по модулю q четен. Значит, q не делит $p-1$. Поэтому подгруппа $[N_2]Q = N_2 \times Q$ нильпотентна и

$$Q \subseteq C_G(N_1) \cap C_G(N_2) \leq C_G(N) = N.$$

Имеем противоречие. Следовательно, $N \leq P_1$. Теперь N — нормальная p-подгруппа группы Шмидта A, значит, $N = P_1$ или $N \leq Z(A)$. Второе исключается равенством $N = C_G(N)$. Поэтому $N = P_1$ и в фактор-группе G/N силовская p-подгруппа циклическая. Следовательно, $l_p(G/N) \leq 1$ и $l_p(G) \leq 2$. Теорема доказана полностью.

Следствие. *Если A и B — подгруппы Шмидта разрешимой группы G и $G = AB$, то $l_p(G) \leq 2$ для всех $p \in \pi(G)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазуров В. Д., Сыскин С. А.* О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 2. С. 217–222.
2. *Монахов В. С.* Произведение двух групп Шмидта // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19, № 1. С. 8–11.
3. *Монахов В. С.* Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 70–100.

4. *Монахов В. С.* Произведение сверхразрешимых групп Шмидта // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. 1999. № 1. С. 41–46.
5. *Журтов А. Х., Сыскин С. А.* О группах Шмидта // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 36, № 3. С. 74–78.
6. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
7. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 28 апреля 2003 г.

Княгина Виктория Николаевна, Монахов Виктор Степанович
Гомельский университет им. Ф. Скорины, кафедра алгебры и геометрии
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь

monakhov@gsu.unibel.by