Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 512.542

ВЕСА НЕПРИВОДИМЫХ $SL_3(q)$–МОДУЛЕЙ В ХАРАКТЕРИСТИКЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

А. В. Заварницин

Аннотация: Закрывается проблема распознаваемости простых групп $L_3(p^k)$ по порядкам элементов. Доказано, что при действии этой группы на элементарной абелевой p-группе всегда возникает элемент нового порядка. Предложена модель для построения абсолютно неприводимых p-модулярных представлений данной группы в пространствах полиномов.

Ключевые слова: модулярные представления, веса, порядки элементов, распознаваемость.

Введение

Неприводимые модулярные представления конечных групп часто возникают как минимальные случаи при рассмотрении арифметических свойств групповых действий. Это верно, например, при изучении распознаваемости конечных групп по их спектру. Напомним, что *спектр* $\omega(G)$ конечной группы G — это множество порядков ее элементов. В работе [1] проблема распознаваемости простых групп $L_3(q)$ была решена по модулю следующего утверждения.

Теорема А. *Группа $L = L_3(q)$, где $q = p^k$ нечетно, удовлетворяет соотношению $\omega(N : L) \neq \omega(L)$ для каждого расщепляемого расширения $N : L$, где N — элементарная абелева p-группа, на которой L действует точно и неприводимо.*

Целью настоящей работы является доказательство этого утверждения с помощью разложения на весовые подпространства неприводимых $SL_3(q)$-модулей в характеристике p. Мы также предлагаем достаточно элементарную модель для построения таких модулей в тензорном произведении пространств однородных полиномов и пространств, дуальных к ним. В частности, мы показываем, что базовые абсолютно неприводимые модули для группы $SL_3(q)$ в характеристике p (т. е. те модули, старшие веса $\chi_{a,b}$ которых удовлетворяют $0 \leq a, b < p$) изоморфны определенным композиционным факторам модулей $S^aV \otimes S^bV^*$, где S^i — оператор i-й симметрической степени, а V и V^* — естественный трехмерный $SL_3(q)$-модуль и модуль, контрагредиентный к нему.

Эта статья завершает изучение распознаваемости всех групп $L_3(q)$ по порядкам элементов. В качестве следствия сформулируем здесь окончательный результат. Обозначим через $h(G)$ число неизоморфных конечных групп со спектром $\omega(G)$. Для натурального k и простого p запись $p^r || k$ означает, что $p^r \mid k$ и $p^{r+1} \nmid k$.

Работа выполнена при финансовой поддержке FAPESP, Бразилия (код проекта 01/14811–4).

Теорема B. *Пусть $L = L_3(q)$, где $q = p^k$.*

(i) *Если $q \equiv 1 \pmod 6$, то $h(L) = r+1$, где $3^r || k$, и $\omega(G) = \omega(L)$ тогда и только тогда, когда G удовлетворяет $L \le G \le L\langle\rho\rangle$, где ρ — полевой автоморфизм группы L порядка 3^r.*

(ii) *Если $q \equiv 5, 9 \pmod{12}$, то $h(L) = 2$ и $\omega(L) = \omega(L.2)$, где $L.2$ есть расширение L с помощью графового автоморфизма.*

(iii) *Если q четно либо $3 < q \equiv 3, 11 \pmod{12}$, то $h(L) = 1$.*

(iv) $h(L_3(3)) = \infty$.

Эта теорема является следствием теоремы A, результатов из [1–3] и предложения 3 из [4].

Неприводимые $SL_3(q)$-модули

Существует несколько моделей для построения абсолютно неприводимых p-модулярных представлений конечных групп G лиева типа характеристики p. Такие представления были впервые описаны в [5] в рамках теории полупростых алгебраических групп. В работе [6] классическая теория модулей Вейля над полем комплексных чисел перенесена на случай характеристики p. В работе [7] неприводимые модули реализованы как определенные подмодули индуцированного модуля $(1_U)^G$, где 1_U — тривиальный модуль для унипотентной подгруппы U из G.

В нашем случае группы $SL_3(q)$ мы предлагаем несколько более доступную полиномиальную модель, аналогичную модели из [8], которая позволит нам найти веса неприводимых модулей для этой группы.

Сначала сделаем несколько общих замечаний относительно действия группы $G = SL_n(F)$ на алгебрах полиномов, где F — алгебраически замкнутое поле характеристики p. Группа G естественно действует на n-мерном пространстве V линейных F-форм от переменных $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ по правилу

$$x_i g = \sum_j g_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $g = (g_{ij}) \in G$. Таким образом, V становится (правым) FG-модулем, который мы отождествим с естественным FG-модулем. Контрагредиентный модуль V^*, который является пространством всех функционалов $v^* : V \to F$ с действием G, удовлетворяющим $\langle vg, v^*g\rangle = \langle v, v^*\rangle$ для всех $g \in G$, $v \in V$ и $v^* \in V^*$, также является правым FG-модулем. Здесь мы обозначаем через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ естественное билинейное отображение $V \times V^* \to F$, являющееся означиванием $\langle v, v^*\rangle = v^*(v)$. Будем рассматривать V^* как пространство всех линейных F-форм от *дуальных* переменных $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$, которые образуют дуальный базис V^* по отношению к форме $\langle\cdot,\cdot\rangle$, т. е. $\langle x_i, X_j\rangle = \delta_{ij}$. Действие G на V^* тогда определяется по правилу

$$X_i g = \sum_j (g^{-T})_{ij} X_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

где g^{-T} обозначает транспонированную обратную матрицу к g.

Пусть S и S^* — алгебры всех полиномов от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$ соответственно, которые изоморфны симметрическим алгебрам $\mathrm{S}(V)$ и $\mathrm{S}(V^*)$. Введем коммутативную алгебру $\mathbb{S} = S \otimes S^*$. Действие G естественно продолжается на $\mathbb{S}$ и сохраняет умножение этой алгебры. Имеем биградуировку $\mathbb{S} = \bigoplus_{a,b\ge 0} S_{a,b}$, где $S_{a,b}$ —

FG-подмодуль модуля $\mathbb{S}$, базисными элементами которого являются тензоры $x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}\otimes X_1^{b_1}\dots X_n^{b_n}$, где $a_1+\dots+a_n=a$ и $b_1+\dots+b_n=b$. Введем *сжимающее отображение* $\zeta:\mathbb{S}\to\mathbb{S}$, полагая

$$v_1\dots v_a\otimes v_1^*\dots v_b^*\zeta=\sum_{\substack{1\le i\le a\\1\le j\le b}}\langle v_i,v_j^*\rangle v_1\dots v_{i-1}v_{i+1}\dots v_a\otimes v_1^*\dots v_{j-1}^*v_{j+1}^*\dots v_b^*$$

для всех $v_i\in V$, $v_j^*\in V^*$ и $a,b\ge 0$. (Здесь считается, что сумма нулевого числа слагаемых равна 0 и произведение нулевого числа сомножителей равно 1.) Эквивалентным образом ζ можно определить как формальный дифференциальный оператор

$$\zeta=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial X_1}+\dots+\frac{\partial^2}{\partial x_n\partial X_n}.$$

Мы также используем еще одно важное отображение $\varepsilon:\mathbb{S}\to\mathbb{S}$, которое представляет собой умножение на элемент

$$e\overset{df}{=}x_1\otimes X_1+\dots+x_n\otimes X_n\in S_{1,1}.$$

Лемма 1. *Отображения ζ и ε являются эндоморфизмами FG-модуля $\mathbb{S}$. Отображение ε инъективно.*

Доказательство. Линейность ζ и ε очевидна. Заметим, что для любых $u_1,u_2\in S$ и $U_1,U_2\in S^*$ имеет место тождество

$$\begin{aligned}((u_1\otimes U_1)(u_2\otimes U_2))\zeta&=(u_1\otimes U_1)\zeta(u_2\otimes U_2)+(u_1\otimes U_2)\zeta(u_2\otimes U_1)\\&\quad+(u_2\otimes U_1)\zeta(u_1\otimes U_2)+(u_2\otimes U_2)\zeta(u_1\otimes U_1).\end{aligned}\tag{1}$$

Поэтому равенство

$$(s\zeta)g=(sg)\zeta,\tag{2}$$

где $g\in G$ и $s\in\mathbb{S}$, нужно проверить только для мономиальных тензоров s (т. е. произведения мономов) вида $u\otimes 1$, $1\otimes U$ или $x_i\otimes X_j$, где u и U — мономы от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$ соответственно. Первые два случая очевидны, так как обе части (2) равны нулю. Пусть $s=x_i\otimes X_j$. Имеем

$$(s\zeta)g=\delta_{ij}g=\delta_{ij},\quad (sg)\zeta=\Big(\sum_{k,l}g_{ik}(g^{-T})_{jl}x_k\otimes X_l\Big)\zeta=\sum_k g_{ik}(g^{-1})_{kj}=\delta_{ij}.$$

Значит, ζ — эндоморфизм модулей.

Так как e централизуется любым $g\in G$, то

$$(s\varepsilon)g=(se)g=(sg)(eg)=(sg)e=(sg)\varepsilon$$

для всех $s\in\mathbb{S}$. Следовательно, ε также является эндоморфизмом модулей. Инъективность ε — тривиальное следствие того, что $\mathbb{S}$ — область целостности. $\square$

Если $a,b\ge 1$, то ζ отображает подмодуль $S_{a,b}$ в $S_{a-1,b-1}$, а ε отображает $S_{a-1,b-1}$ в $S_{a,b}$. Таким образом, имеем гомоморфизмы модулей $\zeta_{a,b}\overset{df}{=}\zeta|_{S_{a,b}}$. Будем обозначать $W_{a,b}\overset{df}{=}\operatorname{Ker}\zeta_{a,b}\le S_{a,b}$.

Лемма 2. *Если $a, b < p$, то гомоморфизм $\zeta_{a,b}$ сюръективен и имеет место формула*

$$\dim W_{a,b} = \binom{a+n-2}{a}\binom{b+n-2}{b}\frac{a+b+n-1}{n-1}.$$

Доказательство. Ввиду ограничений $a < p$ и $b < p$ мы можем выбрать базис $\mathscr{B}(S_{a,b})$ модуля $S_{a,b}$, состоящий из мономиальных тензоров

$$s_\rho \overset{df}{=} \frac{x_1^{a_1}}{a_1!}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n^{a_n}}{a_n!}\otimes\frac{X_1^{b_1}}{b_1!}\cdot\ldots\cdot\frac{X_n^{b_n}}{b_n!}, \tag{3}$$

где

$$a_i, b_i \geq 0, \quad a_1+\dots+a_n = a, \quad b_1+\dots+b_n = b \tag{4}$$

и $\rho \overset{df}{=} (a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n)$. Введем лексикографический порядок на векторах $\rho \in \mathbb{Z}^{2n}$, полагая $\rho \geq \rho'$ тогда и только тогда, когда первый ненулевой элемент разности $\rho - \rho'$ положителен. Определим порядок на мономах (3), полагая $s_\rho \geq s_{\rho'}$ тогда и только тогда, когда $\rho \geq \rho'$. Теперь будем считать, что элементы s_ρ базиса $\mathscr{B}(S_{a,b})$ *убывают* согласно введенному порядку. Для удобства положим $s_\rho = 0$, если $\rho = (a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n)$ не удовлетворяет (4). Теперь мы можем выписать матрицу M преобразования $\zeta_{a,b}$ в базисах $\mathscr{B}(S_{a,b})$ и $\mathscr{B}(S_{a-1,b-1})$. Заметим, что все элементы M либо 0, либо 1. Для доказательства леммы покажем, что первые $|\mathscr{B}(S_{a-1,b-1})|$ строк из M образуют (квадратную) нижнеунитреугольную матрицу M_0, т. е. $\operatorname{rank}(M) = \dim S_{a-1,b-1}$. В самом деле, пусть $s_\rho \in \mathscr{B}(S_{a-1,b-1})$. Положим $\rho_1 \overset{df}{=} (1,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, где единицы стоят на 1-м и $(n+1)$-м местах, и $\rho_i \overset{df}{=} \rho_1 + (0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0,-1,0,\ldots,0)$ при $2 \leq i \leq n$, где -1 стоит на i-м и $(n+i)$-м местах. Тогда

$$s_{\rho+\rho_1}\zeta = s_\rho + \sum_{i=2}^{n} s_{\rho+\rho_i}.$$

Так как $s_{\rho+\rho_i} > s_\rho$ при $i \geq 2$, элементы M_0 справа от диагонального элемента в позиции $(\rho+\rho_1,\rho)$ равны нулю, т. е. M_0 нижнеунитреугольная.

Формула размерности теперь легко получается, поскольку сюръективность влечет равенство $\dim W_{a,b} = \dim S_{a,b} - \dim S_{a-1,b-1}$, где $\dim S_{i,j} = N(i)N(j)$ и $N(t) = \binom{t+n-1}{t}$ — число мономов степени t от n переменных. $\square$

Заметим, что, вообще говоря, $\zeta_{a,b}$ может не быть сюръективно. Например, в характеристике $p = 2$ тензор $x_1 \otimes X_1 \in S_{1,1}$ не лежит в образе $\zeta_{2,2}$.

Следующая лемма показывает, что в некоторых случаях FG-модуль $W_{a,b}$ содержит подмодуль, изоморфный $W_{a',b'}$ при $a' < a$, $b' < b$.

Лемма 3. *Пусть $0 < m \leq a, b$. Если $p \nmid m(a+b-m+n-1)$, то $W_{a-m,b-m}\varepsilon^m \cap W_{a,b} = 0$. В противном случае $W_{a-m,b-m}\varepsilon^m \leq W_{a,b}$.*

Доказательство. Пусть $s \in S_{a-m,b-m}$. Сначала покажем индукцией по m, что

$$s\varepsilon^m\zeta = s\zeta\varepsilon^m + m(a+b-m+n-1)s\varepsilon^{m-1}. \tag{5}$$

Мы можем, очевидно, считать, что $s = u \otimes U$ — мономиальный тензор, где $u \in S$ и $U \in S^*$. Если $m = 1$, то, используя формулу (1), имеем

$$s\varepsilon\zeta = (se)\zeta = (s\zeta)e + s(e\zeta) + \sum_i (x_i \otimes U)\zeta(u \otimes X_i) + \sum_i (u \otimes X_i)\zeta(x_i \otimes U)$$

$$= s\zeta\varepsilon + ns + \sum_i \left(u \otimes X_i\frac{\partial U}{\partial X_i}\right) + \sum_i \left(x_i\frac{\partial u}{\partial x_i} \otimes U\right) = s\zeta\varepsilon + (a+b+n-2)s.$$

Для произвольного m по индукции получаем

$$
\begin{aligned}
s\varepsilon^m\zeta &= (s\varepsilon^{m-1})\varepsilon\zeta = (s\varepsilon^{m-1}\zeta)\varepsilon + (a+b+n-2)s\varepsilon^{m-1} \\
&- (s\zeta\varepsilon^{m-1} + (m-1)(a-1+b-1-m+n)s\varepsilon^{m-2})\varepsilon + (a+b+n-2)s\varepsilon^{m-1} \\
&= s\zeta\varepsilon^m + m(a+b-m+n-1)s\varepsilon^{m-1}.
\end{aligned}
$$

Теперь если $s \in W_{a-m,b-m}$, то $s\zeta = 0$ и формула (5) примет вид

$$s\varepsilon^m\zeta = m(a+b-m+n-1)s\varepsilon^{m-1}.$$

Следовательно, $s\varepsilon^m$ лежит в $W_{a,b}$ тогда и только тогда, когда либо $p \mid m(a+b-m+n-1)$, либо $s = 0$. $\square$

Иллюстрацией к такому вложению служит следующий пример. Пусть $n = 3$, $m = a = b = 1$ и $p = 3$. Модуль $S_{1,1} = V \otimes V^*$ изоморфен пространству всех 3×3-матриц над F, на котором G действует сопряжением. Тогда сжимающее отображение $\zeta_{1,1}$ — это в точности след матрицы и $W_{1,1}$ состоит из всех матриц со следом 0. В характеристике 3 все скалярные матрицы, которые образуют 1-мерный подмодуль $W_{0,0}\varepsilon$, имеют след 0. Отсюда получаем вложение $W_{0,0}\varepsilon \leq W_{1,1}$.

Теперь опишем связь между моделью из [8] и нашей конструкцией в случае $n = 3$. Пусть T — алгебра полиномов от $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$, на которой действует группа $GL_n(F)$ по правилу $y_i g = \sum\limits_j g_{ij} y_j$ для всех $g \in GL_n(F)$. В работе [8][1] авторы рассматривают градуированную алгебру $\mathbb{T} = T \otimes T = \bigoplus\limits_{i,j\geq 0} T_{i,j}$, где $T_{i,j}$ — подмодуль в $\mathbb{T}$ с базисом $y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n} \otimes y_1^{j_1} \ldots y_n^{j_n}$, где $i_1 + \cdots + i_n = i$ и $j_1 + \cdots + j_n = j$, вместе с эндоморфизмом модулей $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, который действует на мономиальных тензорах $u \otimes v \in \mathbb{T}$ по правилу

$$(u \otimes v)\varphi = \sum_{r=1}^{n} u y_r \otimes \frac{\partial v}{\partial y_r},$$

т. е. $\varphi_{i,j} \stackrel{df}{=} \varphi|_{T_{i,j}}$ отображает $T_{i,j}$ в $T_{i+1,j-1}$.

Лемма 4. *Если $i \geq j - 1$ и $j < p$, то отображение $\varphi_{i,j}$ сюръективно и*

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi_{i,j} = \binom{i+n-1}{i+1}\binom{j+n-2}{j}\frac{i-j+1}{n-1}.$$

Доказательство. Сюръективность доказана в предложении 2.7 из [8]. Формула размерности получается, как в лемме 2. $\square$

Далее считаем, что $n = 3$. Обозначим через D^l l-ю тензорную степень 1-мерного модуля, соответствующего представлению $[g \mapsto \det(g)]$ для $g \in GL_3(F)$.

Лемма 5 [8, предложения 2.9 и 2.11]). *Пусть $0 \leq i-j \leq p-1$ и $0 \leq j \leq p-1$. Тогда модуль $\operatorname{Ker}\varphi_{i,j}$ содержит единственный неприводимый подмодуль $F_{i,j}$ и*

a) *если либо $i \leq p-2$, либо $i - j = p-1$, либо $j = p-1$, то $\operatorname{Ker}\varphi_{i,j} = F_{i,j}$;*

b) *в противном случае $\operatorname{Ker}\varphi_{i,j}/F_{i,j} \cong \operatorname{Ker}\varphi_{2(p-2)-i,p-2-(i-j)} \otimes D^{i-p+2}$.*

Ясно, что модули $\operatorname{Ker}\varphi_{i,j}$ соответствуют рациональным представлениям алгебраической группы $GL_3(F)$. Заметим, что любое неприводимое представление $GL_n(F)$ остается неприводимым при ограничении на $SL_n(F)$, что следует

[1]в конструкции [8] основное поле F_p можно расширить до алгебраического замыкания F без изменения истинности и доказательства используемых нами предложений 2.7, 2.9 и 2.11.

из равенства $GL_n(F) = SL_n(F) \cdot Z(GL_n(F))$ и того, что любой центральный элемент представляется скалярной матрицей. Таким образом, лемма 5 также выполнена для $\operatorname{Ker}\varphi_{i,j}$, рассматриваемого как FG-модуль, где $G = SL_3(F)$. В этом случае D — тривиальный модуль для G.

Напомним, что внешний квадрат $\wedge^2 V$ естественного FG-модуля V изоморфен подмодулю в $V \otimes V$, порожденному всеми тензорами вида $v \otimes w - w \otimes v$. Существует изоморфизм модулей $V^* \to \wedge^2 V$, определенный на базисных элементах по правилу

$$X_1 \mapsto x_2 \otimes x_3 - x_3 \otimes x_2, \quad X_2 \mapsto x_3 \otimes x_1 - x_1 \otimes x_3, \quad X_3 \mapsto x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1.$$

Мы использует этот изоморфизм для построения гомоморфизма модулей $\nu : \mathbb{S} \to \mathbb{T}$, полагая

$$\begin{aligned} (x_1 \otimes 1)\nu &= y_1 \otimes 1, \quad (1 \otimes X_1)\nu = y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2; \\ (x_2 \otimes 1)\nu &= y_2 \otimes 1, \quad (1 \otimes X_2)\nu = y_3 \otimes y_1 - y_1 \otimes y_3; \\ (x_3 \otimes 1)\nu &= y_3 \otimes 1, \quad (1 \otimes X_3)\nu = y_1 \otimes y_2 - y_2 \otimes y_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Это действие можно очевидным образом продолжить до гомоморфизма алгебр и FG-модулей $\nu : \mathbb{S} \to \mathbb{T}$.

Лемма 6. (a) $\operatorname{Im}\nu \le \operatorname{Ker}\varphi$, (b) $\operatorname{Im}\varepsilon \le \operatorname{Ker}\nu$.

Доказательство. (a) Образы (6) порождающих алгебры $\mathbb{S}$, очевидно, лежат в $\operatorname{Ker}\varphi$.

(b) $\operatorname{Im}\varepsilon = \mathbb{S}e$ и $e\nu = 0$. $\square$

Заметим, что ν отображает $W_{a,b}$ в $\operatorname{Ker}\varphi_{a+b,b}$ и образ $W_{a,b}\nu$ ненулевой. В самом деле, например для $x_3^a \otimes X_1^b \in W_{a,b}$ имеем

$$x_3^a \otimes X_1^b \nu = (y_3^a \otimes 1)\big(y_2 \otimes y_3 - y_3 \otimes y_2\big)^b \ne 0.$$

Лемма 7. *Пусть* $0 \le a, b \le p-1$.

(a) *Если либо* $a + b \le p - 2$, *либо* $a = p - 1$, *либо* $b = p - 1$, *то положим* $\overline{W}_{a,b} \overset{df}{=} W_{a,b}$.

(b) *Если* $a + b > p - 2$ *и* $a < p - 1$ *и* $b < p - 1$, *то*

$$\overline{W}_{a,b} \overset{df}{=} W_{a,b}/W_{p-2-b,p-2-a}\varepsilon^{a+b-p+2}.$$

Тогда $\overline{W}_{a,b}$ *— неприводимый* FG*-модуль.*

Доказательство. (a) В этом случае модуль $W_{a,b}$ под действием ν нетривиально отображается в $\operatorname{Ker}\varphi_{a+b,b}$, который неприводим по лемме 5. По леммам 2 и 4

$$\dim W_{a,b} = \frac{1}{2}(a+1)(b+1)(a+b+2) = \dim \operatorname{Ker}\varphi_{a+b,b}.$$

Следовательно, $\nu|_{W_{a,b}}$ — изоморфизм модулей.

(b) В этом случае p нечетно. Из леммы 3 следует, что модуль $W_{a,b}$ содержит подмодуль $W_{p-2-b,p-2-a}\varepsilon^{a+b-p+2}$, который лежит в ядре ν по лемме 6. Значит, $W_{a,b}\nu$ — подмодуль в $\operatorname{Ker}\varphi_{a+b,b}$ размерности не больше

$$\frac{1}{2}(a+1)(b+1)(a+b+2) - \frac{1}{2}(p-1-a)(p-1-b)(2p-2-a-b).$$

Однако по леммам 4 и 5 это в точности размерность единственного нетривиального неприводимого подмодуля в $\operatorname{Ker}\varphi_{a+b,b}$. Следовательно, $\overline{W}_{a,b}$ неприводим. $\square$

Пусть H — диагональная подгруппа и U — верхнеунитреугольная подгруппа в $G = SL_3(F)$. Одномерные представления $\chi : H \to F$ называются *весами.* Веса можно параметризовать парами (a, b) целых чисел по правилу: если $h = \operatorname{diag}(\mu^{-1}, \mu\lambda^{-1}, \lambda) \in H$, то $h\chi_{a,b} = \lambda^a\mu^b$. Классическим фактом (см., например, [9, теорема 39]) является то, что каждый неприводимый рациональный FG-модуль W содержит единственный с точностью до скаляра вектор v (называемый *вектором старшего веса*), который неподвижен относительно действия U, и 1-мерное подпространство Fv является H-инвариантным. Вес, реализующийся на Fv, называется *старшим весом* модуля W. Известно, что два неприводимых рациональных FG-модуля изоморфны тогда и только тогда, когда их старшие веса совпадают.

Ясно, что вектор старшего веса естественного FG-модуля V есть x_3 и $\chi_{1,0}$ — старший вес V. Аналогично X_1 — старший вектор V^* с весом $\chi_{0,1}$. Легко видеть, что вектор $v_{a,b} \overset{df}{=} x_3^a \otimes X_1^b$ является U-инвариантным весовым вектором $S_{a,b}$ веса $\chi_{a,b}$. Так как $v_{a,b}\zeta = 0$, то $v_{a,b}$ лежит $W_{a,b}$, и так как $v_{a,b}\nu \neq 0$, то образ $v_{a,b}$ в $\overline{W}_{a,b}$ есть вектор старшего веса этого модуля. Таким образом, мы показали следующее утверждение.

Лемма 8. *Неприводимый FG-модуль $\overline{W}_{a,b}$, где $0 \le a, b \le p-1$, имеет старший вес $\chi_{a,b}$.*

Обозначим через ρ автоморфизм Фробениуса группы G, который действует по правилу $(g_{ij})\rho = \big(g_{ij}^p\big)$. Тогда для любого FG-модуля W мы можем определить скрученный модуль W^ρ, являющийся тем же пространством W с новым действием $w \cdot g \overset{df}{=} w(g\rho)$. Ясно, что если W неприводим и $\chi_{a,b}$ — его старший вес, то $\chi_{pa,pb}$ — старший вес неприводимого модуля W^ρ. Теперь мы можем сформулировать следующее описание.

Предложение. *Пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики p. Пусть $G = SL_3(F)$.*

(a) *Неприводимые рациональные FG-модули $M_{a,b}$ находятся во взаимно однозначном соответствии со своими старшими весами $\chi_{a,b}$, $a, b \ge 0$. Если*

$$\begin{aligned} a &= a_0 + pa_1 + \cdots + p^l a_l, \quad 0 \le a_i \le p-1, \\ b &= b_0 + pb_1 + \cdots + p^l b_l, \quad 0 \le b_i \le p-1, \end{aligned} \tag{7}$$

— p-разложения a и b, то $M_{a,b} \cong M_{a_0,b_0} \otimes M_{a_1,b_1}^{\rho} \otimes \cdots \otimes M_{a_l,b_l}^{\rho^l}$.

(b) *Если $0 \le a, b \le p-1$, то $M_{a,b} \cong \overline{W}_{a,b}$, где $\overline{W}_{a,b}$ — модуль, определенный в лемме 7.*

(c) *Пусть $q = p^k$. Тогда все q^2 абсолютно неприводимых представлений конечной группы $SL_3(q)$ над полем характеристики p эквивалентны ограничениям на $SL_3(q)$ представлений G, соответствующих модулям $M_{a,b}$, где $0 \le a, b \le q-1$.*

Доказательство. П. (a) — хорошо известная теорема Стейнберга о скрученном тензорном произведении (см. [9, теорема 41]). П. (b) следует из леммы 8. П. (c) также известный факт (см. [9, теорема 43]). $\square$

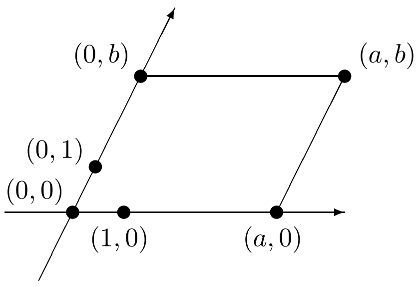

Рис. 1

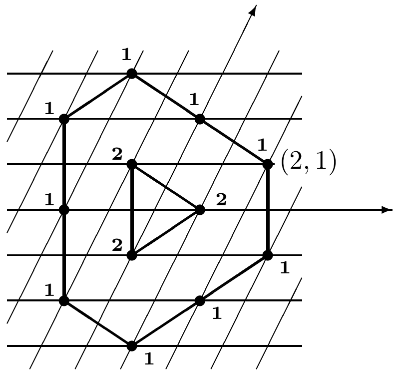

Рис. 2. Веса модуля $W_{2,1}$.

Веса неприводимых модулей

Преимуществом определенной в предыдущем пункте конструкции базовых неприводимых модулей $\overline{W}_{a,b}$ является простота нахождения их весов. Напомним, что FG-модуль W, где $G = SL_3(F)$, является вполне приводимым FH-модулем для диагональной подгруппы H из G, т. е. $W = \oplus_\chi W_\chi$, где W_χ, называемое *весовым подпространством*, соответствующим весу χ, есть сумма одномерных FH-подмодулей с весом χ. Например, естественный FG-модуль V допускает разложение $V = V_{(1,0)} \oplus V_{(-1,1)} \oplus V_{(0,-1)}$ в сумму одномерных весовых подпространств $V_{(1,0)} = Fx_3$, $V_{(-1,1)} = Fx_2$ и $V_{(0,-1)} = Fx_1$.

Принято ассоциировать веса $\chi_{a,b}$ с узлами (a,b) решетки на плоскости, в которой векторы фундаментальных весов $(1,0)$ и $(0,1)$ наклонены под углом $\pi/3$ (рис. 1). Если отметить все веса данного модуля вместе с указанием их кратности (т. е. размерности соответствующих весовых подпространств), то получим диаграмму весов. Например, диаграмма весов для $W_{2,1}$ указана на рис. 2. Это хорошо известно в случае характеристики 0. Отметим, что мы могли аналогично определить модуль $W_{a,b}$ для группы $SL_3(\mathbb{C})$ над комплексным полем $\mathbb{C}$, диаграмма весов которого совпадает с p-модулярным случаем при условии $a, b < p$. Мы можем дать явное описание всех весов модуля $W_{a,b}$.

Лемма 9. *Пусть $0 \le a, b < p$. Тогда диаграмма весов FG-модуля $W_{a,b}$ — это последовательность концентрических, убывающих и симметричных относительно координатных осей шестиугольников H_i с вершинами в узлах $(a-i, b-i)$, где $i = 0, 1, \dots, \min\{a,b\} - 1$, за которой следует последовательность треугольников T_j с вершинами в узлах $(a-b-3j, 0)$, если $a \ge b$, и в узлах $(0, b-a-3j)$, если $b \ge a$, где $j = 0, 1, \dots, [|a-b|/3]$. Веса, лежащие на H_i, имеют кратность $i+1$, а веса, лежащие на любом T_j, имеют кратность $\min\{a,b\}+1$.*

Доказательство. Мы дадим только набросок доказательства ввиду его схожести со случаем характеристики 0 (см. [10, § 13.2]). Так как FG-модуль $S_{a,0}$ (соответственно $S_{0,b}$) изоморфен a-й (соответственно b-й) симметрической степени V (соответственно V^*), то веса этого модуля суть всевозможные суммы a (соответственно b) весов V (соответственно V^*). Так как $S_{a,b} \cong S_{a,0} \otimes S_{0,b}$, то веса $S_{a,b}$ — попарные суммы весов сомножителей. Заметим, что базисный тензор $x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \otimes X_1^{b_1} X_2^{b_2} X_3^{b_3}$ модуля $S_{a,b}$ будет весовым вектором с весом

$\chi_{a_3-a_2+b_2-b_3,a_2-a_1+b_1-b_2}$. Если $a, b < p$, то гомоморфизм $\zeta_{a,b} : S_{a,b} \to S_{a-1,b-1}$ сюръективен, что позволяет явно определить веса $W_{a,b}$, вычитая кратность каждого веса в $S_{a-1,b-1}$ из кратности того же веса в $S_{a,b}$. $\square$

Лемма 10. *Пусть* $0 \le a, b < p$. *Тогда кратность веса* $\chi_{a-b,0}$ FG-*модуля* $W_{a,b}$ *равна* $\min\{a, b\} + 1$.

Доказательство. Вес $\chi_{a-b,0}$ лежит на самом большом треугольнике T_0 в диаграмме весов для $W_{a,b}$, и утверждение следует из леммы 9. $\square$

В отличие от случая характеристики 0 модули $W_{a,b}$ могут не быть неприводимыми, даже если $a, b < p$, как было видно в случае (b) леммы 7. В такой ситуации $W_{a,b}$ содержит подмодуль, изоморфный $W_{p-2-b,p-2-a}$, и диаграмма весов простого фактор-модуля $\overline{W}_{a,b}$ получается «вычитанием» диаграммы для $W_{p-2-b,p-2-a}$ из диаграммы для $W_{a,b}$. Для наших целей потребуется лишь знать, будет ли кратность веса $\chi_{a-b,0}$ в $\overline{W}_{a,b}$ ненулевой.

Лемма 11. *Пусть* $0 \le a, b < p$. *Тогда кратность веса* $\chi_{a-b,0}$ *неприводимого* FG-*модуля* $\overline{W}_{a,b}$ *положительна.*

Доказательство. Если $\overline{W}_{a,b} = W_{a,b}$, т. е. выполнен случай (a) леммы 7, то утверждение вытекает из леммы 10. Иначе имеем $a + b > p - 2$ и кратность веса $\chi_{a-b,0}$ равна $\min\{a, b\} - \min\{p - 2 - b, p - 2 - a\} = a + b - (p - 2) > 0$. $\square$

Этот факт можно обобщить на все неприводимые FG-модули.

Лемма 12. *В неприводимом* FG-*модуле* $M_{a,b}$ *старшего веса* $\chi_{a,b}$ *кратность веса* $\chi_{a-b,0}$ *положительна.*

Доказательство. По предложению имеем $M_{a,b} \cong \overline{W}_{a_0,b_0} \otimes \cdots \otimes \overline{W}^{\rho^l}_{a_l,b_l}$, где a_i и b_i — коэффициенты разложения (7). Пусть w_i — ненулевой весовой вектор в $\overline{W}_{a_i,b_i}$ веса $\chi_{a_i-b_i,0}$, $i = 0, \dots, l$, который существует по лемме 11. Тогда $w_1 \otimes \cdots \otimes w_l$ — ненулевой вектор в $M_{a,b}$ веса $\chi_{a-b,0}$. $\square$

Приложение

Конечная группа G называется *распознаваемой*, если для любой конечной группы H равенство спектров $\omega(G) = \omega(H)$ влечет изоморфизм $G \cong H$. Ясно, что расширение $N.G$ нетривиальной группы N с помощью распознаваемой группы G должно содержать элемент, порядок которого отличен от порядков всех элементов из G. В работе [1] проблема распознаваемости простой группы $L = L_3(q)$, q нечетно, была сведена к проверке этого свойства для любой элементарной абелевой p-группы N, на которой L действует нетривиально. Теперь мы можем доказать теорему A, сформулированную во введении.

Доказательство. Ввиду результатов из [1] мы можем считать, что $q \equiv 1 \pmod 3$. Покажем, что L содержит элемент порядка $q-1$, который централизует нетривиальный элемент из N. Отсюда будет следовать, что $p(q-1) \in \omega(N : L)$, а поскольку число $p(q-1)$ не лежит в $\omega(L)$, когда $q \equiv 1 \pmod 3$ (см. [1, лемма 9]), получим требуемое.

Достаточно показать, что любой неприводимый модуль для группы $SL_3(q)$ над алгебраически замкнутым полем F характеристики p содержит нетривиальный вектор, который централизуется элементом c из $SL_3(q)$ порядка $q - 1$ таким, что циклическая группа $\langle c \rangle$ не содержит центр $SL_3(q)$. По п. (c) предложения все такие модули являются ограничениями некоторых модулей $M_{a,b}$ группы $SL_3(F)$. По лемме 12 любой такой модуль имеет ненулевой вектор v

веса $\chi_{a-b,0}$. Это значит, что все элементы $\mathrm{diag}(\mu^{-1}, \mu, 1)$ диагональной подгруппы H группы $SL_3(q)$ централизуют v. Однако эти элементы образуют нужную циклическую группу $\langle c\rangle$ порядка $q-1$, не содержащую центр $SL_3(q)$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zavarnitsine A. V.* Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders // J. Group Theory. 2004. V. 7, N 1. P. 81–97.
2. *Мазуров В. Д., Су М. Ч., Чао Ч. П.* Распознавание конечных простых групп $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 567–585.
3. *Мазуров В. Д.* Множество порядков элементов конечной группы // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 1. С. 81–89.
4. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.
5. *Curtis C. W.* Irreducible representations of finite groups of Lie type // J. Reine Angew. Math. 1965. V. 219. P. 180–199.
6. *Carter R. W., Lusztig G.* On the modular representations of the general linear and symmetric groups // Math. Z. 1974. Bd 136. S. 193–242.
7. *Carter R. W., Lusztig G.* Modular representations of finite groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. 1976. V. 32, N 2. P. 347–384.
8. *Doty S. R., Walker G.* The composition factors of $F_p[x_1, x_2, x_3]$ as a $\mathrm{GL}(3, p)$-module // J. Algebra. 1992. V. 147, N 2. P. 411–441.
9. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.
10. *Fulton W., Harris J.* Representation theory. A first course. New York etc.: Springer-Verl., 1991. (Graduate Texts in Math.; 129).

Статья поступила 27 августа 2003 г.

Заварницин Андрей Витальевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090.
Current address: Departamento de Matemática, Universidade de São Paulo,
Caixa Postal 66281, São Paulo-SP, 05311-970, Brasil
zavarn@ime.usp.br