Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 512.6

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КВАНТОВЫХ 3×3–МАТРИЦ

Ч. К. Гупта, А. Н. Панов

Аннотация: Проводится классификация неприводимых представлений квантовых 2×2 и 3×3 матриц в корнях из 1.

Ключевые слова: алгебра квантовых матриц, скобка Пуассона.

§ 1. Введение

В работе рассматривается некоммутативная $\mathbb{C}$-алгебра

$$R_q := \mathscr{O}_q(\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})) = \mathrm{Mat}_q(n, \mathbb{C}),$$

которую называют *алгеброй регулярных функций на квантовых матрицах* (или, коротко, *алгеброй квантовых матриц*). Эта алгебра является свободным модулем над алгеброй многочленов Лорана $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ и порождается как $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$-алгебра элементами x_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ (назовем их *квантовыми матричными элементами*) со следующими соотношениями, наложенными на матричные элементы любой 2×2-подматрицы $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$: $xy = qyx$, $xu = qux$, $xu = qux$, $yv = qvy$, $yu = uy$, $xv = vx + (q - q^{-1})uy$ (см. [1–3]). Она возникла в работах по математической физике и играет фундаментальную роль в некоммутативной геометрии.

Алгебра квантовых матриц является биалгеброй с коумножением $\Delta(x_{ij}) = \sum\limits_{s=1}^{n} x_{is} \otimes x_{sj}$. Квантовым определителем $\det_q$ называют элемент, равный сумме

$$\sum_{(i_1, \ldots, i_n)} (-q)^{N(i_1, \ldots, i_n)} a_{1i_1} \ldots a_{ni_n},$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $(i_1, \ldots, i_n)$ и $N(i_1, \ldots, i_n)$ — число инверсий в перестановке. Для $n = 2$ получаем $\det_q := ad - qbc$. Известно, что квантовый определитель и $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ порождают центр алгебры R_q [4, 5].

Пусть l — нечетное натуральное число и ε — первообразный корень степени l из единицы. Рассмотрим специализацию $R_\varepsilon := R_q \bmod (q - \varepsilon)$ алгебры R_q. Сохраним обозначения для образов квантовых матричных элементов в R_ε. Эта алгебра конечна над своим центром. Хорошо известно, что элементы $a_{ij} = x_{ij}^l$ лежат в центре алгебры R_ε (см. [1, 7.2]). Центральная подалгебра Z_0,

---

Работа второго из авторов поддержана Российским фондом фундаментальных исследования (коды проектов 02–01–00017, 03–01–00167). Кроме того, второй автор благодарен за организацию его визита в университет Манитоба (Канада) в феврале 2003 г.

порожденная a_{ij}, изоморфна алгебре многочленов $\mathbb{C}[a_{ij}]$ и является биалгеброй относительно ограничения Δ на Z_0 [1, 7.2.2]:

$$\Delta(a_{ij}) = \Delta\big(x_{ij}^l\big) = \sum_{s=1}^n x_{is}^l \otimes x_{sj}^l = \sum_{s=1}^n a_{is} \otimes a_{sj}.$$

Известно, что $\det(a_{ij}) = \det_q^l \bmod (q-\varepsilon)$ [1, 7.2.3].

Ограничение любого неприводимого представления π алгебры R_ε на Z_0 скалярно, т. е. $\pi|_{Z_0} = \mathbf{p}\cdot \mathrm{id}$ для некоторого центрального характера $\mathbf{p}$ алгебры Z_0. Можно рассматривать $\mathbf{p}$ как точку многообразия $\mathscr{X} := \mathrm{Maxspec}(Z_0)$. Отождествим $\mathscr{X}$ с $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$, Z_0 с алгеброй $\mathscr{F} := \mathscr{O}(\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})) = \mathbb{C}[\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})]$ и $\mathbf{p}$ с комплексной матрицей $\mathbf{p} = (p_{ij})_{ij=1}^n$, в которой $p_{ij} = \mathbf{p}(a_{ij}) = \mathbf{p}\big(x_{ij}^l\big)$. Неприводимое представление π проходит через конечномерную фактор-алгебру $R_{\varepsilon,\mathbf{p}} := R_\varepsilon/\mathbf{p}$ (назовем ее *слоем* R_ε над $\mathbf{p}$).

Центр Z_ε алгебры R_ε является пуассоновой подалгеброй [6–8] относительно скобки Пуассона, определенной следующим образом:

$$\{z, z'\} = \frac{\underline{z}\underline{z}' - \underline{z}'\underline{z}}{q-\varepsilon} \bmod (q-\varepsilon).$$

Здесь $z, z' \in Z_\varepsilon$ и элементы $\underline{z}, \underline{z}'$ являются их прообразами в R_q. С точностью до общей константы значения скобки Пуассона для элементов $a := x^l$, $b := y^l$, $t := u^l$, $s := v^l$ из квантовой 2×2-матрицы равны $\{a,b\} = ab$, $\{a,t\} = at$, $\{t,s\} = ts$, $\{b,s\} = bs$, $\{t,b\} = 0$, $\{a,t\} = 2ts$. Отсюда Z_0 — подалгебра Пуассона в центре Z_ε для квантовых $n\times n$-матриц. Поскольку мы отождествили $\mathscr{F}$ с Z_0, получаем скобку Пуассона на $\mathscr{F}$, общую с точностью до константы для всех l. В частности, эту скобку Пуассона можно получить при специализации $q \to 1$. В этом случае алгебра R_1, равная $R_q \bmod (q-1)$, совпадает с $\mathscr{F}$. Описание Z_ε содержится в работе [9].

В настоящей работе мы классифицируем неприводимые представления алгебры квантовых матриц R_ε для $n = 2, 3$. Оказывается, что все неприводимые представления π, лежащие над фиксированной точкой $\mathbf{p}$, имеют общую размерность $d_{\mathbf{p}}$. Основные результаты работы сформулированы в теоремах 3.1 и 4.1.

Дадим описание основных этапов этой классификации. Обозначим через $\mathfrak{Y}_q := \{\mathscr{I}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ множество первичных алгебры R_q, инвариантных относительно винтовых автоморфизмов (т. е умножений строк и столбцов на константы) и имеющих нулевое пересечение с $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$. Множество $\mathfrak{Y}_q$ конечно, и каждый идеал из $\mathfrak{Y}_q$ порождается квантовыми минорами [10, 11]. В работах [12, 13] дается полное описание идеалов из $\mathfrak{Y}_q$ для $n = 2, 3$ в терминах порождающих элементов (квантовых миноров). Для $n = 2$ число идеалов в $\mathfrak{Y}_q$ равно 14, а для $n = 3$ это число равно 230. Для идеалов используются символические обозначения. Мы сохранили их в работе. Для удобства читателей мы приводим в работе таблицы идеалов [12, 13] (см. табл. 1, 3, 5).

Для каждого идеала $\mathscr{I}_\alpha \in \mathfrak{Y}_q$ обозначим $\mathscr{P}_\alpha = \mathscr{I}_\alpha \bmod (q-1)$ и $\mathfrak{Y} = \{\mathscr{P}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Будем использовать для идеалов $\mathscr{P}_\alpha$ те же символические обозначения, что и для $\mathscr{I}_\alpha$. Табл. 1, 3, 5 можно рассматривать как таблицы идеалов из $\mathfrak{Y}$.

Идеал $\mathscr{P}_\alpha$ является пуассоновым идеалом в $\mathscr{F}$ $(= Z_0)$, инвариантным относительно винтовых автоморфизмов. Можно по аналогии с квантовым случаем доказать, что $\mathfrak{Y}$ для $n = 2, 3$ совпадает с множеством всех простых пуассоновых идеалов в $\mathscr{F}$, инвариантных относительно винтовых автоморфизмов. Впрочем, последнее утверждение не будет использоваться в работе.

Множество пуассоновых идеалов $\mathfrak{Y}$ определяет конечное разбиение $\mathscr{X} := \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{X}_\alpha$ (см. (2.3)). В настоящей работе доказывается, что размерность $d_{\mathbf{p}}$ и число $f_{\mathbf{p}}$ неприводимых представлений с Z_0-характером $\mathbf{p} \in \mathscr{X}_\alpha$ общее для всех точек из $\mathscr{X}_\alpha$ (см. табл. 2, 4, 6).

Отметим связь результатов этой работы с исследованиями по квантовым группам (алгебрам Хопфа). Локализация R_q по $\{\det_q^k : k \in \mathbb{N}\}$ называется *алгеброй регулярных функций на квантовой группе* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ и обозначается через $\mathrm{GL}_q(n,\mathbb{C})$. Последняя алгебра является алгеброй Хопфа. Алгебра $\mathrm{SL}_q(n,\mathbb{C})$ определяется как фактор-алгебра $\mathrm{Mat}_q(n,\mathbb{C})$ по идеалу, порожденному $\det_q -1$. В работе [14] получены формулы для размерности и числа неприводимых представлений для алгебры $\mathrm{SL}_q(n,\mathbb{C})$ и более общих алгебр $\mathbb{C}_q[G]$, где G — полупростая группа Ли. Последняя алгебра определяется как двойственная алгебра Хопфа к $U_q(\mathfrak{g})$.

§ 2. Разбиение пространства матриц

Рассмотрим последовательность строк $i_1 < \dots < i_r$ и столбцов $j_1 < \dots < j_r$. Обозначим $I = (i_1,\dots,i_r)$ и $J = (j_1,\dots,j_r)$. Будем говорить, что $I \le I'$ для $I' = (i'_1,\dots,i'_r)$, если $i_1 \le i'_1,\dots,i_r \le i'_r$.

В дальнейшем будем обозначать через A_I^J минор матрицы (a_{ij}). Этот минор является элементом центральной подалгебры Z_0. Квантовый минор X_I^J определяется как квантовый определитель соответствующей подматрицы. Имеет место равенство $A_I^J = (X_I^J)^l \bmod (q-\varepsilon)$ [1, 7.2.3].

Фиксируем две последовательности $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_r)$ и $\mathbf{m} = (m_1,\dots,m_r)$, где $k_1 < \dots < k_r$ и $m_1 < \dots < m_r$. Рассмотрим идеал $\mathscr{P}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ алгебры $\mathscr{F}$, порожденный следующим множеством миноров:

$$\{A_I^J : |I| > r\} \cup \{A_I^J : |I| = s,\ I \ngeq (k_1,\dots,k_s)\} \cup \{A_I^J : |J| = s\ J \ngeq (m_1,\dots,m_s)\}.$$

Легко видеть, что $\mathscr{P}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ — пуассоновы идеалы (напомним, что идеал $\mathscr{P}$ в $\mathscr{F}$ называется *пуассоновым идеалом*, если $\{\mathscr{P},\mathscr{F}\} \subset \mathscr{P}$). Рассмотрим мультипликативное (т. е. замкнутое относительно умножения) подмножество $S_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$, порожденное $A_i^{\mathbf{k},\mathbf{m}} := A_{k_1\dots k_i}^{m_1,\dots,m_i}$, $1 \le i \le r$.

Гипотеза 2.1. *Идеал $\mathscr{P}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ простой. В частности, алгебраическое множество $W_{\mathbf{k},\mathbf{m}} := \operatorname{ann}\mathscr{P}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ неприводимо.*

Заменяя обычные миноры квантовыми, получаем определение идеалов $\mathscr{I}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ в R_q и мультипликативное подмножество, порожденное $D_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ (см. [12, 1.2]).

Гипотеза 2.2. *Идеал $\mathscr{I}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ первичный. Справедливость гипотез* 2.1 *и* 2.2 *проверена для $n = 2, 3$ в работе* [13].

Подмножество $D_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ удовлетворяет условиям Оре [12, 1.4]. Рассмотрим локализацию $R_q D_{\mathbf{k},\mathbf{m}}^{-1}$ и идеал $\mathscr{I}_{\mathbf{k},\mathbf{m}} D_{\mathbf{k},\mathbf{m}}^{-1}$. В [12, 2.5] показано, что $\mathscr{I}_{\mathbf{k},\mathbf{m}} D_{\mathbf{k},\mathbf{m}}^{-1} \ne 0$.

Рассмотрим следующие подмножества в $\mathscr{X}$:

$$W_{\mathbf{k}}^- := \{\mathbf{p} : p_{k_s s} \ne 0,\ p_{is} = 0 \text{ для } i < k_s, 1 \le s \le r \text{ и } p_{is} = 0 \text{ для } s > r\},$$

$$W_{\mathbf{m}}^+ := \{\mathbf{p} : p_{s m_s} \ne 0,\ p_{sj} = 0 \text{ для } s < m_s, 1 \le s \le r \text{ и } p_{sj} = 0 \text{ для } s > r\}.$$

Обозначим $\mathscr{F}_{\mathbf{k}}^- = \mathscr{O}(W_{\mathbf{k}}^-)$ и $\mathscr{F}_{\mathbf{m}}^+ = \mathscr{O}(W_{\mathbf{m}}^+)$. Здесь $\mathscr{O}(W_{\mathbf{k}}^-)$ — алгебра, порожденная переменными B_{is}, $i > k_s$ и $B_{k_s s}^{\pm 1}$, $1 \le s \le r$. Алгебра $\mathscr{O}(W_{\mathbf{m}}^+)$ порождена переменными C_{sj}, $i > m_s$ и $C_{s m_s}^{\pm 1}$, $1 \le s \le r$.

Алгебры $\mathscr{F}_{\mathbf{k}}^-$ и $\mathscr{F}_{\mathbf{m}}^+$ являются пуассоновыми алгебрами по отношению к скобке Пуассона, определенной в $\mathscr{F}$. Пусть $\pi_{\mathbf{k}}^-$ (соответственно $\pi_{\mathbf{m}}^+$) — проекторы $\mathscr{F}$ на $W_{\mathbf{k}}^-$ (соответственно $W_{\mathbf{m}}^+$).

Рассмотрим открытое подмножество $W_{\mathbf{k},\mathbf{m}}^0 = W_{\mathbf{k},\mathbf{m}} \cap \{A_i^{\mathbf{k},\mathbf{m}} \neq 0$ для $1 \leq i \leq r\}$ в $W_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$. Если гипотеза 2.1 верна, то $W_{\mathbf{k},\mathbf{m}}^0$ плотно в $W_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$. Любой элемент из $W_{\mathbf{k},\mathbf{m}}^0$ может быть записан в виде произведения BC, где $B \in W_{\mathbf{k}}^-$ и $C \in W_{\mathbf{m}}^+$. Это определяет отображение $W_{\mathbf{k}}^- \times W_{\mathbf{m}}^+ \to W_{\mathbf{k},\mathbf{m}}^0$ и морфизм

$$\alpha_{\mathbf{k},\mathbf{m}} : \mathscr{F} \xrightarrow{\Delta} \mathscr{F} \otimes \mathscr{F} \xrightarrow{\pi_{\mathbf{k}}^- \otimes \pi_{\mathbf{m}}^+} \mathscr{F}_{\mathbf{k}}^- \otimes \mathscr{F}_{\mathbf{m}}^+$$

пуассоновых алгебр.

Аналогично для квантовых алгебр [12, 2.2]. Пусть $R_{\mathbf{k}}^- := \mathscr{O}_q(W_{\mathbf{k}}^-)$ — алгебра, порожденная квантовыми матричными элементами Y_{is}, $i > k_s$, и $Y_{k_s s}^{\pm 1}$, $1 \leq s \leq r$. Алгебра $R_{\mathbf{m}}^+ := \mathscr{O}_q(W_{\mathbf{m}}^+)$ порождается квантовыми матричными элементами Z_{sj}, $i > m_s$, и $Z_{sm_s}^{\pm 1}$, $1 \leq s \leq r$. Пусть $\pi_{q,\mathbf{k}}^-$ (соответственно $\pi_{q,\mathbf{m}}^+$) — проекторы R_q на $R_{\mathbf{k}}^-$ (соответственно $R_{\mathbf{m}}^+$). Отображение

$$\beta_{\mathbf{k},\mathbf{m}} : R_q \xrightarrow{\Delta} R_q \otimes R_q \xrightarrow{\pi_{q,\mathbf{k}}^- \otimes \pi_{q,\mathbf{m}}^+} R_{\mathbf{k}}^- \otimes R_{\mathbf{m}}^+$$

является гомоморфизмом алгебр. Отображение $\alpha_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ получается из $\beta_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$, если рассмотреть редукцию по модулю $q - \varepsilon$, положить $a_{ij} = x_{ij}^l$ и отождествить Z_0 с $\mathscr{F}$. В частности, $\alpha_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ получается из $\beta_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ редукцией по модулю $q - 1$.

Продолжим $\beta_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ (соответственно $\alpha_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$) до гомоморфизма $\tilde\beta_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ (соответственно $\tilde\alpha_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$) алгебры $R_q^0 := R_q D_{\mathbf{k},\mathbf{m}}^{-1}$ (соответственно $\mathscr{F}^0 = \mathscr{F} S_{\mathbf{k},\mathbf{m}}^{-1}$). Ядро $\tilde\beta_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ совпадает с $\mathscr{I}_{\mathbf{k},\mathbf{m}} D_{\mathbf{k},\mathbf{m}}^{-1}$, и ядро $\tilde\alpha_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ — с $\mathscr{P}_{\mathbf{k},\mathbf{m}} S_{\mathbf{k},\mathbf{m}}^{-1}$ [12].

Образ $\widetilde{R}_q$ алгебры R_q^0 относительно $\tilde\beta_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ порождается $Y_{is} \otimes Z_{sj}$, $s \leq r$, $i \geq k_s$, $j \geq m_s$, и $v_s := (Y_{k_s s} \otimes Z_{sm_s})^{-1}$, $1 \leq s \leq r$ [12, 2.4]. Можно выбрать другую систему образующих в $\widetilde{R}_q$:

$$y_{is} := Y_{is} Y_{k_s s}^{-1} \otimes 1, \quad z_{sj} := 1 \otimes Z_{sj} Z_{sm_s}^{-1}, \quad v_s^{\pm 1}.$$

Новые образующие y_{ij} удовлетворяют соотношениям [12, 2.8]

$$y_{ij} y_{im} = q y_{im} y_{ij} \quad \text{для } j < m,$$
$$y_{ij} y_{sj} = q y_{sj} y_{ij} \quad \text{для } i < s,$$
$$y_{ij} y_{sm} = y_{sm} y_{ij} \quad \text{для } i < s, j > m;$$
$$y_{ij} y_{sm} := \begin{cases} y_{sm} y_{ij}, & i < k_m, \\ q^{-1} y_{sm} y_{ij} + (q - q^{-1}) y_{sj}, & i = k_m, \\ y_{sm} y_{ij} + (q - q^{-1}) y_{sj}, & i > k_m, \end{cases} \qquad \text{для } i < s,\ j > m.$$

Образующие z_{ij} удовлетворяют аналогичным соотношениям и коммутируют с y_{ij}. Образующие v_s порождают коммутативную подалгебру и q-коммутируют со всеми другими образующими (напомним, что два элемента u, v q-коммутируют, если $uv = q^m vu$ для некоторого целого числа s).

Рассмотрим центральную подалгебру в $\widetilde{R}_\varepsilon := \widetilde{R}_q \bmod (q - \varepsilon)$, порожденную $b_{ij} = y_{ij}^l$, $c_{ij} = z_{ij}^l$, $t_s = v_s^l$. Прямыми вычислениями получаем значения скобки Пуассона:

$$\{b_{ij}, b_{im}\} = b_{im} b_{ij} \quad \text{для } j < m,$$
$$\{b_{ij}, b_{sj}\} = b_{sj} b_{ij} \quad \text{для } i < s,$$
$$\{b_{ij}, b_{sm}\} = 0 \quad \text{для } i < s,\ j > m;$$

$$\{b_{ij}, b_{sm}\} := \begin{cases} 0, & i < k_m, \\ -b_{sm}b_{ij} + 2b_{sj}, & i = k_m, \\ 2b_{sj}, & i > k_m, \end{cases} \qquad \text{для } i < s, \ j > m.$$

Значения скобки Пуассона на c_{ij} имеют такой же вид, и $\{t_i, t_j\} = 0$, $\{t_i, u\} = \mathrm{const} \cdot t_i u$, если u — один из элементов b_{ij}, c_{ij}.

Если J, K — идеалы алгебр $R^-_{\mathbf{k}}$, $R^+_{\mathbf{m}}$, то

$$\mathscr{I}_{JK} := \beta^{-1}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(J \otimes R^+_{\mathbf{m}} + R^-_{\mathbf{k}} \otimes K) \tag{2.1}$$

— идеал алгебры R_q. Если J, K — первичные идеалы, инвариантные относительно винтовых автоморфизмов (см. введение), то $\mathscr{I}_{JK}$ такой же идеал. Аналогично для пуассоновых алгебр. Если Q, M — пуассоновы идеалы $\mathscr{F}^-_{\mathbf{k}}$, $\mathscr{F}^+_{\mathbf{m}}$, то

$$\mathscr{P}_{QM} := \alpha^{-1}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}(Q \otimes \mathscr{F}^+_{\mathbf{m}} + \mathscr{F}^-_{\mathbf{k}} \otimes M) \tag{2.2}$$

— пуассонов идеал $\mathscr{F}$.

Для любого идеала $\mathscr{I}_\alpha \in \mathfrak{Y}_q$ (см. введение) существует единственный идеал $\mathscr{I}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ такой, что $\mathscr{I}_{\mathbf{k},\mathbf{m}} \subset \mathscr{I}_\alpha$ и $\mathscr{I}_\alpha \cap D_{\mathbf{k},\mathbf{m}} = \varnothing$ [12, следствие 1.10].

Для любого первичного идеала $\mathscr{I}$, имеющего нулевое пересечение с $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$, идеал $\mathscr{P} := \mathscr{I} \bmod (q-1)$ в $\mathscr{F}$ является пуассоновым идеалом [8, лемма 3.12]. Мы получаем набор пуассоновых идеалов $\mathfrak{Y} = \{\mathscr{P}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Обозначим

$$W_\alpha = \mathrm{ann}(\mathscr{P}_\alpha), \quad \mathscr{X}_\alpha := W_\alpha - \bigcup_{W_\alpha \supset W_\beta} W_\beta. \tag{2.3}$$

Подмножества $\mathscr{X}_\alpha$ образуют разбиение $\mathscr{X} := \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} \mathscr{X}_\alpha$.

Аннулятор пуассонового идеала является пуассоновым подмножеством. Иначе говоря, для любой точки этого подмножества ее симплектический лист также ему принадлежит. Поэтому $\mathscr{X}_\alpha$ является объединением симплектических листов.

Идеалы $\mathscr{I}_\alpha$ и $\mathscr{P}_\alpha$ порождаются минорами. Для любого α существует мультипликативное подмножество, порожденное минорами S_α, такое, что $\mathscr{O}(\mathscr{X}_\alpha) = \mathscr{O}(W_\alpha)S^{-1}_\alpha$. Обозначим

$$X^0_\alpha := \mathrm{ann}\, \mathscr{O}(\mathscr{X}_\alpha)S^{-1}_{\mathbf{k},\mathbf{m}} = \mathrm{ann}\, \mathscr{O}(W_\alpha)S^{-1}_\alpha S^{-1}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}.$$

Подмножество $\mathscr{X}^0_\alpha$ открыто в $\mathscr{X}_\alpha$. Если гипотеза 2.1 верна, то подмножество $\mathscr{X}^0_\alpha$ всюду плотно в $\mathscr{X}_\alpha$.

Гипотеза 2.3. *Любой симплектический лист в $\mathscr{X}_\alpha$ имеет непустое пересечение с $\mathscr{X}^0_\alpha$ (это верно для $n = 2, 3$, см. доказательство теорем* 3.1, 4.1).

Так как мультипликативное подмножество S_α порождается минорами, можно образовать его квантовый аналог D_α. Для любого минора $d \in D_\alpha \bmod (q - \varepsilon)$ элемент d^l принадлежит S_α. Рассмотрим алгебру $\mathscr{O}_q(\mathscr{X}_\alpha) = \mathscr{O}_q(W_\alpha)D^{-1}_\alpha$ и

$$\mathscr{F}^0_\alpha := \mathscr{O}_q(\mathscr{X}^0_\alpha) := \mathscr{O}_q(\mathscr{X}_\alpha)D^{-1}_{\mathbf{k},\mathbf{m}} = \mathscr{O}_q(W_\alpha)D^{-1}_\alpha D^{-1}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}.$$

Напомним, что *алгеброй скрученных многочленов Лорана* называют алгебру $A_{\mathbb{S}}$, порожденную элементами $\{x_i^{\pm 1}\}_{i=1}^N$, с соотношениями $x_i x_j = q^{s_{ij}} x_j x_i$, где $\mathbb{S} = (s_{ij})$ — некоторая целочисленная кососимметрическая матрица.

Гипотеза 2.4. *Алгебра $\mathscr{F}_\alpha^0$ изоморфна некоторой алгебре скрученных многочленов Лорана A_S. Справедливость гипотезы для $n = 2, 3$ проверена при доказательстве теорем* 3.1 *и* 4.1.

Предложение 2.5 [5]. *Любая алгебра скрученных многочленов Лорана A_S изоморфна алгебре A_C, где C — каноническая матрица:*

$$C := \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ -d_1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & d_k \\ -d_k & 0 \end{pmatrix}, 0, \ldots, 0\right).$$

Следствие 2.6 [7, 7.2]. *Пусть $y_1^{\pm 1}, \ldots, y_N^{\pm 1}$ — образующие алгебры A_C. Обозначим через $Z_{C,0}$ центральную подалгебру в $A_{C,\varepsilon} = A_C \bmod (q - \varepsilon)$, порожденную элементами $\{y_i^l\}$ и обратными к ним. Пусть l взаимно просто со всеми d_i. Тогда*

1) центр $A_{C,\varepsilon}$ порождается элементами $y_1^l, \ldots, y_{2k}^l, y_{2k+1}, \ldots, y_N$ и обратными к ним;

2) размерность любого неприводимого представления алгебры $A_{C,\varepsilon}$ равна l^k;

3) число неприводимых представлений над любой точкой $Z_{C,0}$ равно l^{N-2k}.

§ 3. Представления 2×2-матриц

Для $n = 2$ имеют место следующие случаи $\mathbf{k}, \mathbf{m}$-последовательностей:

$$((1,2),(1,2)), \quad ((1),(1)), \quad ((2),(1), \quad ((1),(2)), \quad ((2),(2)), \quad (\varnothing,\varnothing).$$

Идеалы $\mathscr{P}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ и мультипликативные $S_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ подмножества имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_0 &= \mathscr{P}_{(1,2),(1,2)} = 0, & S_0 &= \langle a_{11}, \det\rangle,\\
\mathscr{P}_{11} &= \langle \det\rangle, & S_{11} &= \langle a_{11}\rangle,\\
\mathscr{P}_{21} &= \langle a_{11}, a_{21}\rangle, & S_{21} &= \langle a_{12}\rangle,\\
\mathscr{P}_{12} &= \langle a_{11}, a_{12}\rangle, & S_{12} &= \langle a_{21}\rangle,\\
\mathscr{P}_{22} &= \langle a_{11}, a_{12}, a_{21}\rangle, & S_{22} &= \langle a_{22}\rangle,\\
\mathscr{P}_1 &= \mathscr{P}_{(\varnothing,\varnothing)} = \langle a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}\rangle, & S_0 &= 1.
\end{aligned}$$

В дальнейшем, следуя [12, 13], будем использовать для этих идеалов символические обозначения

$$\mathscr{P}_0 = \begin{smallmatrix}\circ & \circ\\ \circ & \circ\end{smallmatrix}, \quad \mathscr{P}_{11} = \square, \quad \mathscr{P}_{21} = \begin{smallmatrix}\bullet & \circ\\ \bullet & \circ\end{smallmatrix}, \quad \mathscr{P}_{12} = \begin{smallmatrix}\bullet & \bullet\\ \circ & \circ\end{smallmatrix}, \quad \mathscr{P}_{22} = \begin{smallmatrix}\bullet & \bullet\\ \circ & \circ\end{smallmatrix}, \quad \mathscr{P}_1 = \begin{smallmatrix}\bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet\end{smallmatrix}.$$

Здесь черный круг на месте (i, j) в символической матрице означает, что матричный элемент a_{ij} является одним из образующих соответствующего идеала. Равенство $\mathscr{P}_{11} = \square$ означает, что идеал порожден определителем.

Квантовые аналоги этих идеалов будем обозначать через $\mathscr{I}_0$, $\mathscr{I}_{11}$, $\mathscr{I}_{21}$, $\mathscr{I}_{12}$, $\mathscr{I}_{22}$, $\mathscr{I}_1$. Для них также будем использовать указанные выше символические обозначения.

Обозначим через W_0, W_{11}, W_{21}, W_{12}, W_{22}, W_1 алгебраические подмножества, определяемые этими идеалами. По формуле (2.3) получаем разбиение $\mathscr{X}$ на 5 подмножеств:

$$\mathscr{X}_0 = \{\mathbf{p} \in \mathscr{X} : \det \mathbf{p} \neq 0\}, \quad \mathscr{X}_{11} = \{\mathbf{p} \in \mathscr{X} : \det \mathbf{p} = 0,\ p_{12} \neq 0,\ p_{21} \neq 0\},$$

$$\mathscr{X}_{21} = \{\mathbf{p} \in \mathscr{X} : p_{11} = p_{21} = 0,\ p_{12} \neq 0\},$$
$$\mathscr{X}_{12} = \{\mathbf{p} \in \mathscr{X} : p_{11} = p_{12} = 0,\ p_{21} \neq 0\},$$
$$\mathscr{X}_{22} = \{\mathbf{p} \in \mathscr{X} : p_{11} = p_{21} = p_{12} = 0,\ p_{22} \neq 0\}, \quad \mathscr{X}_1 = W_1 = \{\mathbf{p} = 0\}.$$

В случае $\mathbf{k} = \mathbf{m} = (1,2)$ алгебра $R^-_{(1,2)}$ порождается $Y^{\pm1}_{11}$, $Y^{\pm1}_{22}$, Y_{21} с соотношениями $Y_{11}Y_{21} = qY_{21}Y_{11}$, $Y_{22}Y_{21} = q^{-1}Y_{21}Y_{22}$. Элементы Y_{11}, Y_{22} коммутируют. Рассмотрим два первичных идеала в $R^-_{(1,2)}$: $J^-_1 = 0$ и $J^-_2 = \langle Y_{21}\rangle$. Обозначим эти идеалы в символической форме [12, 13]

$$J^-_1 = \begin{smallmatrix} * & \\ \circ & * \end{smallmatrix}, \quad J^-_2 = \begin{smallmatrix} * & \\ \bullet & * \end{smallmatrix}.$$

Алгебра $R^+_{(1,2)}$ порождается $Z^{\pm1}_{11}$, $Z^{\pm1}_{22}$, Z_{12} с соотношениями

$$Z_{11}Z_{12} = qZ_{12}Z_{11}, \quad Z_{22}Z_{12} = q^{-1}Z_{12}Z_{22}.$$

Элементы Z_{11}, Z_{22} коммутируют. Рассмотрим два первичных идеала в $R^+_{(1,2)}$: $J^+_1 = 0$ и $J^+_2 = \langle Z_{12}\rangle$. Обозначим их через

$$J^+_1 = \begin{smallmatrix} * & \circ \\ & * \end{smallmatrix}, \quad J^+_2 = \begin{smallmatrix} * & \bullet \\ & * \end{smallmatrix}.$$

Факторизуя по модулю $q-1$, получаем алгебру $\mathscr{F}^-_{(1,2)} = \mathbb{C}\big[B^{\pm1}_{11}, B^{\pm1}_{22}, B_{21}\big\}$ со скобкой Пуассона $\{B_{11}, B_{21}\} = B_{11}B_{21}$, $\{B_{22}, B_{21}\} = -B_{22}B_{21}$, $\{B_{11}, B_{22}\} = 0$. Для пуассоновой алгебры $\mathscr{F}^+_{(1,2)} = \mathbb{C}\big[C^{\pm1}_{11}, C^{\pm1}_{22}, C_{21}\big\}$ будет

$$\{C_{11}, C_{12}\} = C_{11}C_{12}, \quad \{C_{22}, C_{12}\} = -C_{22}C_{12}, \quad \{C_{11}, C_{22}\} = 0.$$

Построим пуассоновы идеалы о $\mathscr{P}^\pm_1$ и $\mathscr{P}^\pm_2$ по аналогии с квантовым случаем. Сохраним для них обозначения в символической форме.

Используя прообразы отображений $\beta_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ (соответственно $\alpha_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$), см. (2.1) и (2.2), для четырех идеалов в $R^-_{(1,2)} \otimes R^+_{(1,2)}$ (соответственно $\mathscr{F}^-_{(1,2)} \otimes \mathscr{F}^+_{(1,2)}$), получаем четыре первичных идеала из $\mathfrak{Y}_q$ (соответственно простых пуассоновых идеала из $\mathfrak{Y}$). Эти идеалы можно представить в таблице [12, 4.1]

	$\begin{smallmatrix} * & \circ \\ & * \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} * & \bullet \\ & * \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} * & \\ \circ & * \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \circ & \bullet \\ \circ & \circ \end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix} * & \\ \bullet & * \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \circ & \circ \\ \bullet & \circ \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{smallmatrix}$

В случае $\mathbf{k} = \mathbf{m} = (1)$ алгебра $R^-_{(1)}$ порождается $Y^{\pm1}_{11}, Y_{21}$ с соотношением $Y_{11}Y_{21} = qY_{21}Y_{11}$. Рассмотрим два первичных идеала в $R^-_{(1,2)}$: $J^-_1 = 0$ и $J^-_2 = \langle Y_{21}\rangle$. Будем использовать для них символические обозначения

$$J^-_1 = \begin{smallmatrix} * \\ \circ \end{smallmatrix}, \quad J^-_2 = \begin{smallmatrix} * \\ \bullet \end{smallmatrix}.$$

Алгебра $R^+_{(1)}$ порождается $Z^{\pm1}_{11}, Z_{12}$ с соотношением $Z_{11}Z_{12} = qZ_{12}Z_{11}$. Рассмотрим два первичных идеала в $R^+_{(1,2)}$: $J^+_1 = 0$ и $J^+_2 = \langle Z_{12}\rangle$, обозначим их через

$$J^+_1 = * \circ, \quad J^+_2 = * \bullet.$$

Редуцируя алгебры $R^{-}_{(1)}$ (соответственно $R^{+}_{(1)}$) по модулю $q \to 1$, мы получаем пуассонову алгебру $\mathscr{F}^{-}_{(1)} = \mathbb{C}\big[B^{\pm 1}_{11}, B_{21}\big]$ (соответственно $\mathscr{F}^{+}_{(1)} = \mathbb{C}\big[C^{\pm 1}_{11}, C_{12}\big]$) со скобкой Пуассона $\{B_{11}, B_{21}\} = B_{11}B_{21}$ (соответственно $\{C_{11}, C_{12}\} = C_{11}C_{12}$). Аналогично квантовому случаю рассмотрим простые пуассоновы идеалы $\mathscr{P}^{\pm}_{1}$ и $\mathscr{P}^{\pm}_{2}$. Сохраним для них обозначения в символической форме.

Алгебра $R^{-}_{(2)}$ (соответственно $R^{+}_{(2)}$) порождается $Y^{\pm 1}_{11}$ (соответственно $Z^{\pm}_{11}$). Нулевой идеал в этих алгебрах будем обозначать символом $\ast$. По формулам (2.1) и (2.2) получаем 9 новых первичных идеалов из $\mathfrak{Y}_q$ (соответственно простых пуассоновых идеалов из $\mathfrak{Y}$), которые можно представить в виде следующей таблицы [12, 4.1]:

$$\begin{array}{c|cc|c}
 & \ast\ \circ & \ast\ \bullet & \ast \\ \hline
\begin{matrix}\ast\\ \circ\end{matrix} & \square & \begin{matrix}\circ&\bullet\\ \circ&\bullet\end{matrix} & \begin{matrix}\bullet&\circ\\ \bullet&\circ\end{matrix} \\[2ex]
\begin{matrix}\ast\\ \bullet\end{matrix} & \begin{matrix}\circ&\circ\\ \bullet&\bullet\end{matrix} & \begin{matrix}\circ&\bullet\\ \bullet&\bullet\end{matrix} & \begin{matrix}\bullet&\circ\\ \bullet&\bullet\end{matrix} \\ \hline
\begin{matrix}\\ \ast\end{matrix} & \begin{matrix}\bullet&\bullet\\ \circ&\circ\end{matrix} & \begin{matrix}\bullet&\bullet\\ \circ&\bullet\end{matrix} & \begin{matrix}\bullet&\bullet\\ \bullet&\circ\end{matrix}
\end{array}.$$

В работе [12] показывается, что $\mathfrak{Y}_q$ состоит из 13 идеалов, представленных в приведенных выше таблицах, и идеала $\mathscr{I}_1 = \begin{smallmatrix}\bullet&\bullet\\ \bullet&\bullet\end{smallmatrix}$.

Построенные выше 14 пуассоновых идеала $\{\mathscr{P}_\alpha\}$ задают разбиение (см. (2.3)) $\mathscr{X}$ на 14 подмножеств:

$$\mathscr{X}_0 = \mathscr{X}_0' \sqcup \mathscr{X}_0'' \sqcup \mathscr{X}_0''' \sqcup \mathscr{X}_0^{\mathrm{iv}}, \quad \mathscr{X}_{11} = \mathscr{X}_{11}' \sqcup \mathscr{X}_{11}'' \sqcup \mathscr{X}_{11}''' \sqcup \mathscr{X}_{11}^{\mathrm{iv}},$$

$$\mathscr{X}_{21} = \mathscr{X}_{21}' \sqcup \mathscr{X}_{21}'', \quad \mathscr{X}_{12} = \mathscr{X}_{12}' \sqcup \mathscr{X}_{12}'', \quad \mathscr{X}_{22}, \quad \mathscr{X}_1.$$

Будем использовать обозначение «$\ast$» для ненулевых элементов матрицы и «$\cdot$» — для произвольных элементов. Подмножества разбиения имеют вид

$$\mathscr{X}_0' = \begin{pmatrix} \cdot & \ast \\ \ast & \cdot \end{pmatrix}, \ \det \neq 0; \quad \mathscr{X}_0'' = \begin{pmatrix} \ast & 0 \\ \ast & \ast \end{pmatrix}, \ \det \neq 0;$$

$$\mathscr{X}_0''' = \begin{pmatrix} \ast & \ast \\ 0 & \ast \end{pmatrix}, \ \det \neq 0; \quad \mathscr{X}_0^{\mathrm{iv}} = \begin{pmatrix} \ast & 0 \\ 0 & \ast \end{pmatrix}, \ \det \neq 0;$$

$$\mathscr{X}_{11}' = \begin{pmatrix} \cdot & \ast \\ \ast & \cdot \end{pmatrix}, \ \det = 0; \ \mathscr{X}_{11}'' = \begin{pmatrix} \ast & 0 \\ \ast & 0 \end{pmatrix}; \ \mathscr{X}_{11}''' = \begin{pmatrix} \ast & \ast \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \ \mathscr{X}_{11}^{\mathrm{iv}} = \begin{pmatrix} \ast & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathscr{X}_{21}' = \begin{pmatrix} 0 & \ast \\ 0 & \ast \end{pmatrix}; \quad \mathscr{X}_{21}'' = \begin{pmatrix} 0 & \ast \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathscr{X}_{12}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \ast & \ast \end{pmatrix}; \quad \mathscr{X}_{12}'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \ast & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathscr{X}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ast \end{pmatrix}; \quad \mathscr{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathbf{p} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$. *Тогда*

1) *все неприводимые представления алгебры* R_ε *с* Z_0*-характером* $\mathbf{p}$ *имеют общую размерность* $d_{\mathbf{p}}$,

2) *размерность* $d_{\mathbf{p}}$ *и число* $f_{\mathbf{p}}$ *неприводимых представлений с* Z_0*-характером* $\mathbf{p} \in \mathscr{X}_\alpha$ *общие для всех* $\mathbf{p} \in \mathscr{X}_\alpha$,

3) *числа $d_{\mathbf{p}}$ и $f_{\mathbf{p}}$ представлены в следующей таблице:*

	$\mathscr{X}_0'$	$\mathscr{X}_0''$	$\mathscr{X}_0'''$	$\mathscr{X}_0^{\mathrm{iv}}$	$\mathscr{X}_{11}'$	$\mathscr{X}_{11}''$	$\mathscr{X}_{11}'''$	$\mathscr{X}_{11}^{\mathrm{iv}}$	$\mathscr{X}_{12}'$	$\mathscr{X}_{12}''$	$\mathscr{X}_{21}'''$	$\mathscr{X}_{21}^{\mathrm{iv}}$	$\mathscr{X}_{22}$	$\mathscr{X}_1$
$d_{\mathbf{p}}$	l	l	l	1	l	l	l	1	l	1	l	1	1	1
$f_{\mathbf{p}}$	l^2	l	l	l^2	l	1	1	l	1	l	1	l	l	1

Доказательство. Мы дадим доказательство для $\mathbf{p} \in \mathscr{X}_* := \mathscr{X}_0'$. Для других подмножеств разбиения доказательство аналогично.

Наша цель — изучить неприводимые представления конечномерной алгебры $R_{\varepsilon,\mathbf{p}}$ для случая $\mathbf{p} = (p_{ij})_{ij=1}^2$, $p_{12} \neq 0$, $p_{21} \neq 0$, $\det \mathbf{p} \neq 0$.

Обозначим через Ω симплектический лист, проходящий через $\mathbf{p}$. Рассмотрим функцию $a_{11} \in \mathscr{F}$. Предположим, что $a_{11}|_\Omega = 0$. Тогда $2a_{12}a_{21} = \{a_{11}, a_{22}\}|_\Omega = 0$. Отсюда $a_{12}|_\Omega = 0$ или $a_{21}|_\Omega = 0$. В частности, $p_{12} = 0$ или $p_{21} = 0$. Это противоречит выбору $\mathbf{p}$. Выберем матрицу $\mathbf{p}' \in \Omega$ такую, что $p_{11} = a_{11}(\mathbf{p}') \neq 0$. Соответствующие алгебры $R_{\varepsilon,\mathbf{p}}$ и $R_{\varepsilon,\mathbf{p}'}$ изоморфны [15].

Приведенные выше рассуждения позволяют в дальнейшем предположить, что $p_{11} \neq 0$. Рассмотрим локализацию R_q по мультипликативному подмножеству D, порожденному x_{11}, x_{12}, x_{21}, $\det_q$. Алгебра $R_q D^{-1}$ является алгеброй скрученных многочленов Лорана относительно системы образующих $x_{11}^{\pm 1}$, $x_{12}^{\pm 1}$, $x_{21}^{\pm 1}$, $\det_q$. Напомним, что $\det_q = x_{11}x_{22} - qx_{12}x_{21}$ содержится в центре алгебры R_q. Каноническая форма алгебры $R_q D^{-1}$ (см. предложение 2.5) имеет матрицу

$$C := \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0\right).$$

Алгебра $R_{\varepsilon,\mathbf{p}}$ совпадает со слоем алгебры $R_q D^{-1}$ над $\mathbf{p}$. Окончательно получаем $d_\pi = l$ и $f_\pi = l^2$. Эти числа не зависят от выбора точки $\mathbf{p}$ в $\mathscr{X}_*$. $\square$

§ 4. Представления 3×3-матриц

Следуя методу предыдущего параграфа, дадим список пуассоновых идеалов $\mathscr{P}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$:

$$\begin{array}{rl}
\mathrm{rank} = 3 & \mathscr{P}_0 = \mathscr{P}_{(123),(123)} = 0; \\
\mathrm{rank} = 2 & \mathscr{P}_{(12),(12)} = \langle \det \rangle, \\
& \mathscr{P}_{(12),(13)} = \left\langle \text{все } A^{12}_{i_1 i_2} \right\rangle, \quad \mathscr{P}_{(13),(12)} = \left\langle \text{все } A^{j_1 j_2}_{12} \right\rangle, \\
& \mathscr{P}_{(12),(23)} = \langle a_{11}, a_{21}, a_{31} \rangle, \quad \mathscr{P}_{(23),(12)} = \langle a_{11}, a_{12}, a_{13} \rangle, \\
& \mathscr{P}_{(13),(13)} = \left\langle \text{все } A^{12}_{i_1 i_2}, A^{j_1 j_2}_{12} \right\rangle, \\
& \mathscr{P}_{(13),(23)} = \left\langle A^{23}_{12}, a_{11}, a_{21}, a_{31} \right\rangle, \quad \mathscr{P}_{(23),(13)} = \left\langle A^{12}_{23}, a_{11}, a_{12}, a_{13} \right\rangle, \\
& \mathscr{P}_{(23),(23)} = \langle a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{11}, a_{12}, a_{13} \rangle; \\
\mathrm{rank} = 1 & \mathscr{P}_{(1),(1)} = \left\langle \text{все } A^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} \right\rangle, \\
& \mathscr{P}_{(1),(2)} = \left\langle \text{все } A^{12}_{i_1 i_2}, a_{11}, a_{12}, a_{13} \right\rangle, \quad \mathscr{P}^T_{(1),(2)}, \\
& \mathscr{P}_{(1),(3)} = \langle \text{все } a_{ij} : j < 3 \rangle \text{ и } \mathscr{P}^T_{(1),(3)}, \\
& \mathscr{P}_{(2),(2)} = \left\langle \text{все } a_{1j}, a_{i1}, A^{23}_{23} \right\rangle, \\
& \mathscr{P}_{(2),(3)} = \langle \text{все } a_{ij}, j \langle 3 \text{ и } a_{13} \rangle, \\
& \mathscr{P}_{(3),(3)} = \langle \text{все } a_{ij}, (i,j) \neq (3,3) \rangle; \\
\mathrm{rank}=0 & \mathscr{P}_1 = \langle \text{все } a_{ij} \rangle.
\end{array}$$

Здесь для идеала $\mathscr{P}$, порожденного минорами, мы обозначаем через $\mathscr{P}^T$ идеал, порожденный транспонированными минорами. Заметим, что $\mathscr{P}^T_{\mathbf{k},\mathbf{m}} = \mathscr{P}_{\mathbf{m},\mathbf{k}}$.

В первом столбце таблицы указан ранг матрицы общего положения в $W_{\mathbf{k},\mathbf{m}} = \operatorname{ann} \mathscr{P}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$. Аналогично определяются идеалы $\mathscr{I}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ в R_q.

Для каждой пары $\mathbf{k}, \mathbf{m}$, следуя § 2, рассмотрим пару некоммутативных алгебр $R^-_{\mathbf{k}}$, $R^+_{\mathbf{m}}$. При специализации $q \to 1$ получаем пару пуассоновых алгебр $\mathscr{F}^-_{\mathbf{k}}$, $\mathscr{F}^+_{\mathbf{m}}$.

В [13, 2.3] проведена классификация идеалов, инвариантных относительно винтовых автоморфизмов и имеющих нулевое пересечение с $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$, для алгебр $R^-_{\mathbf{k}}$, $R^+_{\mathbf{m}}$. Ниже приведены результаты классификации для $R^+_{\mathbf{m}}$ в символической форме:

$\begin{array}{ccc} * & \circ & \circ \\ & * & \circ \\ & & * \end{array}$	$\begin{array}{ccc} * & \square & \\ & * & \\ & & * \end{array}$	$\begin{array}{ccc} * & \circ & \bullet \\ & * & \circ \\ & & * \end{array}$	$\begin{array}{ccc} * & \bullet & \bullet \\ & * & \circ \\ & & * \end{array}$	$\begin{array}{ccc} * & \circ & \bullet \\ & * & \bullet \\ & & * \end{array}$	$\begin{array}{ccc} * & \bullet & \bullet \\ & * & \bullet \\ & & * \end{array}$
$\begin{array}{ccc} * & \circ & \circ \\ & * & \circ \end{array}$	$\begin{array}{ccc} * & \square & \\ & * & \end{array}$	$\begin{array}{ccc} * & \circ & \bullet \\ & * & \circ \end{array}$	$\begin{array}{ccc} * & \bullet & \bullet \\ & * & \circ \end{array}$	$\begin{array}{ccc} * & \circ & \bullet \\ & * & \bullet \end{array}$	$\begin{array}{ccc} * & \bullet & \bullet \\ & * & \bullet \end{array}$
	$\begin{array}{ccc} * & \circ & \circ \\ & & * \end{array}$	$\begin{array}{ccc} * & \bullet & \bullet \\ & & * \end{array}$	$\begin{array}{ccc} * & \bullet & \circ \\ & & * \end{array}$	$\begin{array}{ccc} * & \bullet & \bullet \\ & & * \end{array}$	
		$\begin{array}{cc} * & \circ \\ & * \end{array}$	$\begin{array}{cc} * & \bullet \\ & * \end{array}$		
	$* \ \circ \ \circ$	$* \ \circ \ \bullet$	$* \ \bullet \ \circ$	$* \ \bullet \ \bullet$	
		$* \ \circ$	$* \ \bullet$		
			$*$		
			$\circ$		

Так же будет для $R^-_{\mathbf{k}}$ с заменой верхнетреугольных матричных символов нижнетреугольными. Редукцией $q \to 1$ получаем классификацию пуассоновых идеалов, инвариантных относительно винтовых автоморфизмов, в алгебрах $\mathscr{F}^-_{\mathbf{k}}$, $\mathscr{F}^+_{\mathbf{m}}$. Как и в § 3, сохраним для пуассоновых идеалов те же обозначения в символической форме, что и для их квантовых аналогов.

По каждому пуассонову идеалу $\mathscr{P}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ алгебры $\mathscr{F}$ (соответственно идеалу $\mathscr{I}_{\mathbf{k},\mathbf{m}}$ алгебры R_q) можно построить набор новых идеалов как прообразов пар идеалов в $\mathscr{F}^-_{\mathbf{k}}$ и $\mathscr{F}^+_{\mathbf{m}}$ (соответственно $R^-_{\mathbf{k}}$ и $R^+_{\mathbf{m}}$) (см. (2.1) и (2.2)). Список этих идеалов представлен в работе [13, рис. 2.5, 3.1, 4.1]. Так как мы используем эти таблицы, они помещены в настоящую работу в виде табл. 1, 3, 5.

Комментарии к таблицам. См. также [13, 2.5]).

1. В верхней строке (будем называть ее нулевой строкой) расположены символы идеалов в алгебре $R^+_{\mathbf{m}}$ (соответственно пуассоновых идеалов в $\mathscr{F}^+_{\mathbf{m}}$). В крайнем левом столбце (будем называть его нулевым столбцом) расположены символы идеалов в алгебре $R^-_{\mathbf{k}}$ (соответственно пуассоновых идеалов в $\mathscr{F}^-_{\mathbf{k}}$). На пересечении соответствующих строк и столбцов расположен символ идеала R_q (пуассонова идеала $\mathscr{F}$) как прообраза пар идеалов по формуле (2.1) в квантовом случае ((2.2) в пуассоновом случае). Будем обозначать идеалы $\mathscr{I}^{(i)}_{jk}$ в R_q (пуассоновы идеалы $\mathscr{P}^{(i)}_{jk}$ в $\mathscr{F}$). Здесь верхний индекс (i) равен 1, 2, 3 и соответствует номеру таблицы: 5 (для Rank $= 1$), 3 (для Rank $= 2$), 1 (для Rank $= 3$).

	$\begin{smallmatrix}*&\circ&\circ\\&*&\circ\\&&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}*&\square&\\&*&\\&&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}*&\circ&\bullet\\&*&\circ\\&&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}*&\bullet&\bullet\\&*&\circ\\&&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}*&\circ&\bullet\\&*&\bullet\\&&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}*&\bullet&\bullet\\&*&\bullet\\&&*\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}*&&\\\circ&*&\\\circ&\circ&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\square&\\\circ&&\\\circ&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\circ&\circ&\bullet\\\circ&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\circ&\circ&\bullet\\\circ&\circ&\circ\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}*&&\\\square&*&\\&&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\circ\\\square&&\circ\\&&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\square&\\\square&&\\&&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\square&&\circ\\&&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\square&&\circ\\&&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\square&&\bullet\\&&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\square&&\bullet\\&&\circ\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}*&&\\\circ&*&\\\bullet&\circ&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\circ\\\bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\square&\\\circ&&\\\bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\circ&\circ&\circ\\\bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\circ&\circ&\circ\\\bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}*&&\\\bullet&*&\\\bullet&\circ&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\circ\\\bullet&\circ&\circ\\\bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\square&\\\bullet&&\\\bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\\\bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\\\bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\bullet&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}*&&\\\circ&*&\\\bullet&\bullet&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\circ\\\bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\square&\\\circ&&\\\bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\circ&\circ&\circ\\\bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\circ&\circ&\circ\\\bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}*&&\\\bullet&*&\\\bullet&\bullet&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\circ\\\bullet&\circ&\circ\\\bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\square&\\\bullet&&\\\bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\\\bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\\\bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\bullet\\\bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}\circ&\bullet&\bullet\\\bullet&\circ&\bullet\\\bullet&\bullet&\circ\end{smallmatrix}$

Таблица 1. Rank $=1$. Идеалы.

	$\begin{smallmatrix}*&\circ&\circ\\&*&\circ\\&&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}*&\square&\\&*&\\&&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}*&\circ&\bullet\\&*&\circ\\&&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}*&\bullet&\bullet\\&*&\circ\\&&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}*&\circ&\bullet\\&*&\bullet\\&&*\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}*&\bullet&\bullet\\&*&\bullet\\&&*\end{smallmatrix}$
$\begin{smallmatrix}*&&\\\circ&*&\\\circ&\circ&*\end{smallmatrix}$	$l^3,\ l^3$	$l^3,\ l^2$	$l^3,\ l^2$	$l^3,\ l$	$l^3,\ l$	$l^2,\ l^2$
$\begin{smallmatrix}*&&\\\square&*&\\&&*\end{smallmatrix}$	$l^3,\ l^2$	$l^2,\ l^3$	$l^3,\ l$	$l^2,\ l^2$	$l^2,\ l^2$	$l^2,\ l$
$\begin{smallmatrix}*&&\\\circ&*&\\\bullet&\circ&*\end{smallmatrix}$	$l^3,\ l^2$	$l^3,\ l$	$l^2,\ l^3$	$l^2,\ l^2$	$l^2,\ l^2$	$l^2,\ l$
$\begin{smallmatrix}*&&\\\bullet&*&\\\bullet&\circ&*\end{smallmatrix}$	$l^3,\ l$	$l^2,\ l^2$	$l^2,\ l^2$	$l,\ l^3$	$l^2,\ l$	$l,\ l^2$
$\begin{smallmatrix}*&&\\\circ&*&\\\bullet&\bullet&*\end{smallmatrix}$	$l^3,\ l$	$l^2,\ l^2$	$l^2,\ l^2$	$l^2,\ l$	$l,\ l^2$	$1,\ l^3$
$\begin{smallmatrix}*&&\\\bullet&*&\\\bullet&\bullet&*\end{smallmatrix}$	$l^2,\ l^2$	$l^2,\ l$	$l^2,\ l$	$l,\ l^2$	$1,\ l^3$	$1,\ l^3$

Таблица 2. Rank $=1$. Числа $d_{\mathbf{p}}$ и $f_{\mathbf{p}}$.

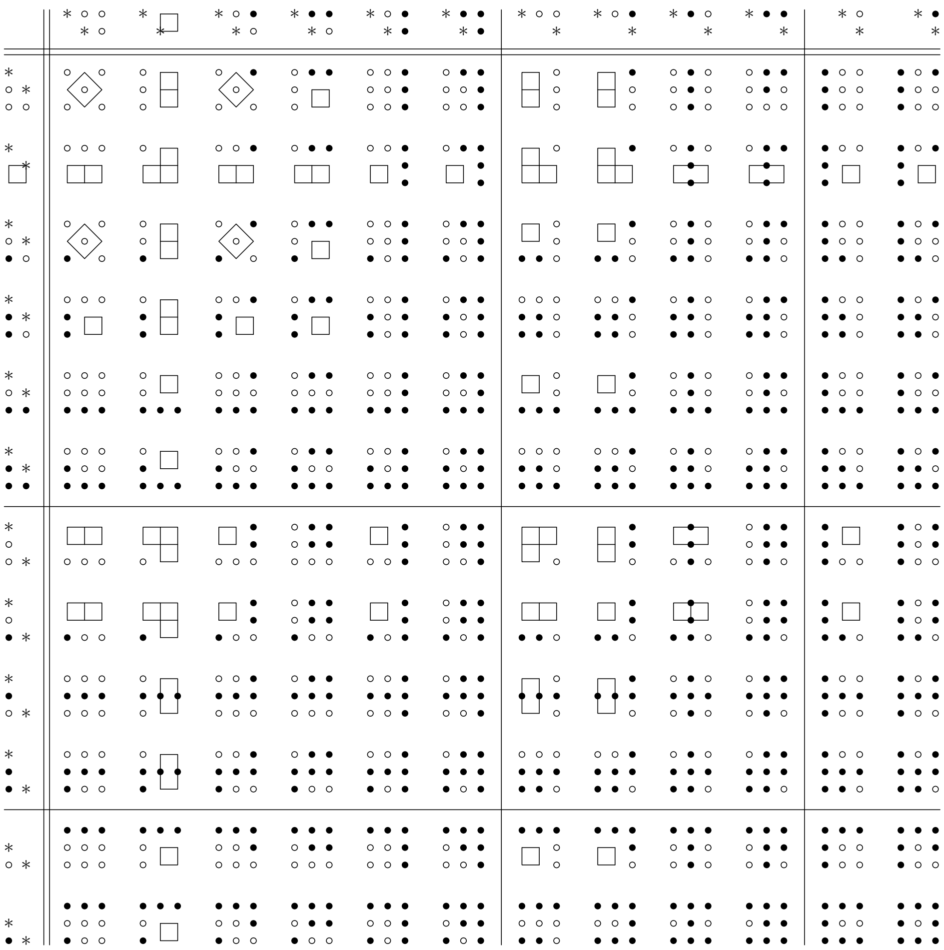

Таблица 3. Rank = 2. Идеалы.

2. Символ $\bullet$ означает, что соответствующий матричный элемент является одним из образующих элементов идеала.

3. Символ $\square$ означает, что соответствующий 2×2-минор является одним из образующих элементов идеала. Например, символ из табл. 3, стоящий в 1-й строке и 4-м столбце, обозначает идеал, порожденный A_{23}^{23}, a_{12}, a_{13}. Символ из табл. 2, находящийся во 2-й строке и 9-м столбце, обозначает идеал, порожденный A_{23}^{13}, a_{12}, a_{22}, a_{32}. Напомним, что здесь в обозначении минора 2, 3 — строки и 1, 3 — столбцы.

4. Символ $\square\square$ означает, что все 2×2-миноры в соответствующих строках и столбцах являются образующими идеала. Например, символ из табл. 3, стоящий в 1-й строке и 2-м столбце, обозначает идеал, порожденный всеми 2×2-минорами A_{i_1,i_2}^{23}. Символ из табл. 3, находящийся во 2-й строке и 2-м столбце, обозначает идеал, порожденный всеми 2×2-минорами вида A_{i_1,i_2}^{23}, $A_{2,3}^{j_1j_2}$.

5. Символ $\diamond$ обозначает идеал, порожденный определителем.

Множество $\mathfrak{Y}_q$ состоит из идеалов $\mathscr{I}_\alpha = \mathscr{I}_{jk}^{(i)}$ и идеала, порожденного всеми

	$\ast\ \circ\ \circ$ $\ast\ \circ$	$\ast\ \square$ $\ast$	$\ast\ \circ\ \bullet$ $\ast\ \circ$	$\ast\ \bullet\ \bullet$ $\ast\ \circ$	$\ast\ \circ\ \bullet$ $\ast\ \bullet$	$\ast\ \bullet\ \bullet$ $\ast\ \bullet$	$\ast\ \circ\ \circ$ $\ast$	$\ast\ \circ\ \bullet$ $\ast$	$\ast\ \bullet\ \circ$ $\ast$	$\ast\ \bullet\ \bullet$ $\ast$	$\ast\ \circ$ $\ast$	$\ast\ \bullet$ $\ast$
$\ast$ $\circ\ \ast$ $\circ\ \circ$	$l^3,\ l^2$	$l^3,\ l$	$l^3,\ l$	$l^3,\ 1$	$l^3,\ 1$	$l^3,\ l$	$l^3,\ l$	$l^2,\ l^2$	$l^3,\ 1$	$l^2,\ l$	$l^3,\ 1$	$l^2,\ l$
$\ast$ $\square\ast$	$l^3,\ l$	$l^2,\ l^2$	$l^3,\ 1$	$l^2,\ l$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l^2,\ 1$	$l^2,\ l$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$
$\ast$ $\circ\ \ast$ $\bullet\ \circ$	$l^3,\ l$	$l^3,\ 1$	$l^2,\ l^2$	$l^2,\ l$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l^3,\ 1$	$l^2,\ l$	$l^2,\ l$	$l,\ l^2$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$
$\ast$ $\bullet\ \ast$ $\bullet\ \circ$	$l^3,\ 1$	$l^2,\ l$	$l^2,\ l$	$l,\ l^2$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$
$\ast$ $\circ\ \ast$ $\bullet\ \bullet$	$l^3,\ 1$	$l^2,\ l^2$	$l^2,\ l^2$	$l^2,\ l$	$l,\ l^2$	$1,\ l^3$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l,\ l^2$	$l,\ l$	$l,\ l^2$	$l,\ l$
$\ast$ $\bullet\ \ast$ $\bullet\ \bullet$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$1,\ l^2$	$1,\ l^2$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$l,\ l$	$1,\ l^2$	$l,\ l$	$1,\ l^2$
$\ast$ $\circ$ $\circ\ \ast$	$l^3,\ l$	$l^2,\ 1$	$l^3,\ 1$	$l^2,\ l$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l^3,\ 1$	$l^2,\ l$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$
$\ast$ $\circ$ $\bullet\ \ast$	$l^2,\ l^2$	$l^2,\ l$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$l^2,\ l$	$l,\ l^2$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$
$\ast$ $\bullet$ $\circ\ \ast$	$l^3,\ 1$	$l^2,\ l$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l,\ l^2$	$l,\ l$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$l,\ l^2$	$l,\ l^2$	$l,\ l$
$\ast$ $\bullet$ $\bullet\ \ast$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l,\ l^2$	$l,\ l$	$l,\ l$	$1,\ l^2$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$l,\ l^2$	$1,\ l^2$	$l,\ l$	$1,\ l^2$
$\ast$ $\circ\ \ast$	$l^3,\ 1$	$l^2,\ l$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l,\ l^2$	$l,\ l$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l,\ l^2$	$l,\ l$	$l,\ l^2$	$l,\ l$
$\ast$ $\bullet\ \ast$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$l,\ l$	$1,\ l^2$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$l,\ l$	$1,\ l^2$	$l,\ l$	$1,\ l^2$

Таблица 4. Rank $= 2$. Числа $d_{\mathbf{p}}$ и $f_{\mathbf{p}}$.

образующими $\{x_{ij}\}$ [13]. Соответственно $\mathfrak{Y}$ состоит из идеалов $\mathscr{P}_\alpha = \mathscr{P}^{(i)}_{jk}$ и идеала, порожденного всеми образующими $\{a_{ij}\}$. Рассмотрим разбиение (2.3) пространства матриц $\mathscr{X} = \mathrm{Mat}(3, \mathbb{C}) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} \mathscr{X}_\alpha$.

Используя таблицы, можно легко найти аннулятор W_α соответствующего пуассонова идеала. По данной матрице $\mathbf{p}$ можно определить, какому подмножеству в разбиении $\mathscr{X}_\alpha$ она принадлежит. Например, матрица

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 2. По табл. 3 (которая соответствует рангу 2) находим, что $\mathbf{p}_0$ аннулируется идеалом (4,3) и не аннулируется бо́льшими идеалами из таблицы. Заключаем, что $\mathbf{p}_0$ принадлежит подмножеству разбиения $\mathscr{X}_\alpha$, соответствующему идеалу (4,3).

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathbf{p} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{C})$. *Тогда*

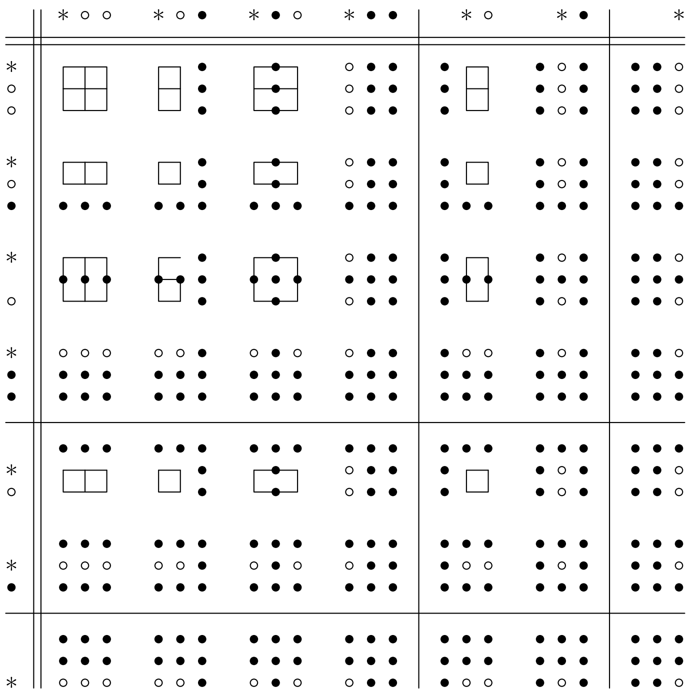

Таблица 5. Rank = 1. Идеалы.

	$* \circ \circ$	$* \circ \bullet$	$* \bullet \circ$	$* \bullet \bullet$	$* \circ$	$* \bullet$	$*$
$* \circ \circ$	$l^2,\ l$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$l,\ l$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$l,\ l$
$* \circ \bullet$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$l,\ l$	$l,\ l$	$l,\ l$	$l,\ 1$	$l,\ 1$
$* \ \ \circ$	$l,\ l$	$l,\ l$	$l,\ l$	$l,\ 1$	$l,\ l$	$l,\ 1$	$l,\ 1$
$* \bullet \bullet$	$l,\ l$	$l,\ 1$	$l,\ 1$	$1,\ l$	$l,\ 1$	$l,\ 1$	$l,\ 1$
$* \circ$	$l^2,\ 1$	$l,\ l$	$l,\ l$	$l,\ 1$	$l,\ l$	$l,\ 1$	$l,\ 1$
$* \bullet$	$l,\ l$	$l,\ 1$	$l,\ 1$	$l,\ 1$	$l,\ 1$	$1,\ l$	$1,\ l$
$*$	$l,\ l$	$l,\ 1$	$l,\ 1$	$l,\ 1$	$l,\ 1$	$1,\ l$	$1,\ l$

Таблица 6. Rank = 1. Числа $d_{\mathbf{p}}$ и $f_{\mathbf{p}}$.

1. *Все неприводимые представления алгебры R_ε с Z_0-характером $\mathbf{p}$ имеют общую размерность $d_\mathbf{p}$.*

2. *Размерность $d_\mathbf{p}$ и число $f_\mathbf{p}$ неприводимых представлений с Z_0-характером $\mathbf{p} \in \mathscr{X}_\alpha$ общие для всех характеров из $\mathscr{X}_\alpha$.*

3. *Числа $d_\mathbf{p}$ и $f_\mathbf{p}$ можно найти по табл. 1–6. Сначала определяется, какому подмножеству в разбиении принадлежит $\mathbf{p}$, затем в следующей по номеру таблице на том же месте располагаются числа $d_\mathbf{p}$ и $f_\mathbf{p}$. Например, алгебра R_ε имеет ровно l неприводимых представлений с $\mathbf{p}_0$ из примера, и их размерность равна l^2 (см. табл. 4, место (4.3)).*

Доказательство проведем для случая $\mathbf{p} \in \mathscr{X}_* = W_0 - \bigcup_{W_\beta \subset W_0} W_\beta$, в остальных случаях оно проводится аналогично. Из табл. 1

$$\mathscr{X}_* = \bigl\{\mathbf{p} \in \mathscr{X} : a_{31} \neq 0,\ A^{12}_{23} \neq 0,\ \det \neq 0,\ A^{23}_{12} \neq 0,\ a_{13} \neq 0\bigr\}.$$

Обозначим через S_* мультипликативное подмножество, порожденное a_{31}, A^{12}_{23}, $\det$, A^{23}_{12}, a_{13} и $\mathscr{O}(\mathscr{X}_*) = \mathscr{O}(\mathscr{X})S_*^{-1}$.

Можно предположить, что миноры a_{11}, a_{12}, a_{21}, A^{12}_{12} не аннулируют $\mathbf{p}$ (см. доказательство теоремы 3.1). Обозначим через S мультипликативное подмножество, порожденное S_* и a_{11}, a_{12}, a_{21}, A^{12}_{12}. В дальнейшем $\mathbf{p} \in \mathscr{X}^0_* = \operatorname{ann} \mathscr{O}(\mathscr{X}_*)S^{-1}$.

Построим по аналогии с S подмножество Оре D в R_q. Множество D порождается x_{11}, x_{12}, x_{21}, X^{12}_{12}, и $D_* := \bigl\langle x_{31}, X^{12}_{23}, \det_q, X^{23}_{12}, x_{13}\bigr\rangle$.

Наша следующая цель — доказать, что $R_q D^{-1}$ — алгебра скрученных многочленов Лорана. Подмножество Оре D содержит подмножество Оре D_0, порожденное x_{11}, X^{12}_{12}, $\det_q$.

Гомоморфизм $\tilde\beta$ (см. § 2) устанавливает изоморфизм $R^0_q := R_q D_0^{-1}$ и алгебры $\widetilde{R}_q$, порожденной элементами $y_1 := y_{21}$, $y_2 := y_{32}$, $y_3 := y_{31}$, $z_1 := z_{12}$, $z_2 := z_{23}$, $z_3 := z_{13}$, $v_i^{\pm 1} := (Y_{ii} \otimes Z_{ii})^{-1}$, где $1 \le i \le 3$.

Соотношения между элементами $\{y_i\}$ имеют вид (см. § 2)

$$y_1 y_3 = q y_3 y_1, \quad y_2 y_3 = q^{-1} y_3 y_2, \quad y_1 y_2 = q^{-1} y_2 y_1 + (q - q^{-1}) y_3.$$

Аналогичные соотношения имеют место между образующими $\{z_i\}$. Элементы v_i q-коммутируют со всеми другими образующими. Обозначим $\Delta_y = y_1 y_2 - q y_3$ и $\Delta_z = z_1 z_2 - q z_3$. Прямыми вычислениями показывается, что $y_1 \Delta_y = q^{-1} \Delta_y y_1$, $y_2 \Delta_y = q \Delta_y y_2$ и $y_3 \Delta_y = \Delta_y y_3$. Аналогично для z_1, z_2, z_3, Δ_z.

Легко вычисляется, что $\beta(x_{11}) = v_1$, $\beta\bigl(X^{12}_{12}\bigr) = v_1 v_2$, $\beta(\det_q) = v_1 v_2 v_3$, $\beta(x_{21}) = y_2 v_1$, $\beta(x_{12}) = z_1 v_1$, $\beta\bigl(X^{12}_{23}\bigr) = \Delta_y v_1 v_2$, $\beta\bigl(X^{23}_{12}\bigr) = \Delta_z v_1 v_2$.

Мы расширим отображения $\tilde\beta$ до изоморфизма $R_q D^{-1}$ и локализации $\widetilde{R_q}$ по множеству знаменателей $\widetilde{D}$, порожденному y_1, z_1, Δ_y, Δ_z. Последняя алгебра есть алгебра скрученных многочленов Лорана по отношению к системе образующих $y_1^{\pm 1}$, $y_3^{\pm 1}$, $\Delta_y^{\pm 1}$, $z_1^{\pm 1}$, $z_3^{\pm 1}$, $\Delta_z^{\pm 1}$, $v_i^{\pm 1}$ для $1 \le i \le 3$. Каноническая матрица C имеет вид

$$C := \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0, 0\right).$$

Из следствия 2.6 получаем $d_\pi = l^3$, $f_\mathbf{p} = l^3$ (см. левый верхний угол в табл. 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Parshall B., Wang J.-P.* Quantum linear groups. Providence: Amer. Math. Soc., 1991. (Memoirs Amer. Math. Soc.; 439).
2. *Manin Yu. I.* Quantum groups and non-commutative geometry. Montreal: CRM, Universite de Montreal, 1988.
3. *Демидов Е. Е.* Квантовые группы. М.: Факториал, 1998.
4. *Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Квантование групп и алгебр Ли // Алгебра и анализ. 1990. Т. 1, № 1. С. 193–226.
5. *Панов А. Н.* Тела скрученных рациональных функций и тело рациональных функций на $\mathrm{GL}_q(n, \mathbb{C})$ // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 1. С. 153–169.
6. *Concini C. De, Kac V. G., Procesi C.* Quantum coadjoint action // J. Amer. Math. Soc. 1992. V. 5. P. 151–189.
7. *Concini C. De, Procesi C.* Quantum Groups // Lecture Notes in Math. 1993. V. 1565. P. 31–140.
8. *Panov A. N.* Quantum solvable algebras. Ideals and representations at roots of 1 // Transformation groups. 2002. V. 7, N 4. P. 379–402. Archived as math.QA/0105250.
9. *Jakobsen H. P., Zhang, H.* The center of the quantized matrix algebra // J. Algebra. 1997. V. 196. P. 458–474.
10. *Cauchon G.* Spectre premier de $O_q(M_n(k))$: Image canonique et separation normale // J. Algebra. 2003. V. 260. P. 519–569.
11. *Launois S.* Les ideaux premiers invariants de $O_q(M_{m,p}(\mathbb{C}))$. Univ. of Reims (France). (Preprint).
12. *Goodearl K. R., Lenagan T. H.* Prime ideals invariant under winding automorphisms in quantum matrices // Internat. J. Math. 2002. V. 13. P. 497–532.
13. *Goodearl K. R., Lenagan T. H.* Winding prime ideals in quantum 3×3 matrices // J. Algebra. 2003. V. 260. P. 657–687. Archived as math.QA/0112051.
14. *Concini C. De, Procesi C.* Quantum Schubert cells and representations at roots of 1 // Algebraic groups and Lie groups / G. I. Lehrer, editor. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. (Australian Math. Soc. Lecture Series; N 9).
15. *Brown K. A., Gordon I.* Poisson orders, symplectic leaves and representation theory. Archived as math.RT/0201042.

Статья поступила 17 апреля 2003 г.

Гупта Чандра Канта (Chandra Kanta Gupta)
Manitoba University, Winnipeg, R3T 2N2, Canada
CGUPTA@cc.umanitoba.ca

Панов Александр Николаевич,
Самарский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра алгебры и геометрии,
ул. Акад. Павлова, 1, Самара 441011
panov@ssu.samara.ru