Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 517.982.272+515.122.55

КАРДИНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ λ–ТОПОЛОГИЙ

Н. В. Величко

Аннотация: Исследуются основные кардинально-значные инварианты пространств $C_\lambda(X)$ такие, как вес, плотность, сетевой вес, i-вес, теснота, где $C_\lambda(X)$ — пространство всех непрерывных вещественных функций на X в λ-топологии.

Ключевые слова: пространство непрерывных функций, λ-топология, кардинально-значные инварианты.

λ-Топология — это линейная топология на пространстве $C(X)$ всех непрерывных вещественных функций на вполне регулярном пространстве X, которая определяется следующим образом.

Напомним, что множество A ограничено в X, если каждая функция $x \in C(X)$ ограничена на A.

Пусть λ — некоторое семейство ограниченных в X множеств. Под λ-топологией на $C(X)$ понимают топологию равномерной сходимости на элементах λ, базу которой образуют множества $V(x, A, \varepsilon) = \{y \in C(X) : \sup |x(t) - y(t)| < \varepsilon$ при $t \in A \in \lambda\}$ ($V(A, \varepsilon)$, если x — нулевая функция). Пространство $C(X)$ с этой топологией обозначается через $C_\lambda(X)$.

К семейству λ предъявляются следующие требования:

(a) λ замкнуто относительно пересечений и конечных объединений, содержит замыкания своих элементов и их (замкнутые) подмножества;

(b) тело $\tilde{\lambda} = \bigcup\{A : A \in \lambda\}$ семейства λ должно быть плотно в X (для удовлетворения хаусдорфовой аксиомы отделимости).

Не теряя общности, будем предполагать, что $\tilde{\lambda} = X$.

Приведем классические примеры:

(1) семейство p всех конечных подмножеств X; p-топология есть топология поточечной сходимости на X, в которой $C(X)$ обычно обозначают через $C_p(X)$;

(2) семейство c всех (относительно) компактных подмножеств X, которому соответствует компактно-открытая топология на $C(X)$;

(3) семейство b всех ограниченных подмножеств X, задающее на $C(X)$ топологию ограниченной сходимости.

Семейство $\lambda' \subseteq \lambda$ будем называть *определяющим*, если каждое $A \in \lambda$ содержится в некотором $B = B(A) \in \lambda'$.

Таковым, например, является семейство всех замкнутых множеств из λ. Ясно, что λ-топология совпадает с λ'-топологией в случае определяющего λ', так что без потери общности мы можем предполагать λ состоящим из замкнутых множеств.

Введем число $\psi(\lambda) = \min\{|\lambda'| : \lambda'$ — определяющее подсемейство $\lambda\}$ — *псевдохарактер* λ (допускаются конечные значения). Введем также число $l(\lambda) = \min\{|\lambda'| : \lambda'$ — покрытие $X\}$ (которое можно назвать λ-*числом Линделёфа*).

Из условий (a) и (b) следует, что семейство p содержится в каждом λ. Это означает, что тождественное отображение $C(X)$ является уплотнением (взаимно однозначным непрерывным отображением) $C_\lambda(X)$ на $C_p(X)$, которое мы будем называть *каноническим уплотнением* и неоднократно использовать.

Используемые в работе понятия соответствуют книге [1]. Ниже приведен список названий основных инвариантов, которые обычно обозначаются буквами: w — вес, χ — характер, iw — i-вес, nw — сетевой вес, d — плотность, l — число Линделёфа, ψ — псевдохарактер, pw — псевдовес.

Через ω (ω_1) будем обозначать первый бесконечный (первый несчетный) ординал. Замыкание множества A обозначается обычно через $[A]$.

Отметим, что исследованию λ-топологий посвящены работы автора [2–4]. λ-Топологии определяются также в классе множественно-открытых топологий (см., например, [5]) и как топологии λ-сходимости (см., например, [6]). При их определении не используется ограниченность, так что получаются несколько иные теории.

Начнем с двух утверждений, не требующих доказательств. Поскольку эти утверждения вполне самостоятельны, будем называть их теоремами.

Теорема 1. *$C_\lambda(X)$ нормируемо тогда и только тогда, когда $\psi(\lambda) = 1$.*

Теорема 2. *$C_\lambda(X)$ метризуемо тогда и только тогда, когда $\psi(\lambda) \leq \omega$.*

Теорему 2 можно записать в более общем виде.

Теорема 3. $\chi(C_\lambda(X)) = \max\{\omega, \psi(\lambda)\}$.

Доказательство. Ограничиваемся случаем бесконечного $\psi(\lambda)$.

Пусть $\psi(\lambda) = \tau$. Положим $\sigma = \{V(A, \frac{1}{n}) : A \in \lambda', n \in \mathbb{N}\}$, где λ' — определяющее семейство мощности τ. Тогда σ — фундаментальная система окрестностей нуля и $\chi(C_\lambda(X)) \leq \tau$.

Пусть $\sigma = \{V(A, \varepsilon(A)) : A \in \lambda'\}$ — фундаментальная система окрестностей нуля. Тогда λ' — определяющее семейство. Действительно, пусть $B \in \lambda$. Множество $V(B, 1)$ содержит некоторое $V(A, \varepsilon(A)) \in \sigma$. Тогда $B \subseteq A$ (в противном случае при $t \in B \backslash A$ нашлась бы функция $x \in C(X)$ такая, что $x(t) = 1$ и $x(s) = 0$ при $s \in A$, ясно, что $x \in V(A, \varepsilon(A)) \setminus V(B, 1)$). Имеем $\chi(C_\lambda(X)) \geq \psi(\lambda)$. □

Чтобы разобраться с весом $C_\lambda(X)$, введем следующее понятие: λ-*весом* пространства X назовем число $w_\lambda(X) = \sup\{w(A) : A \in \lambda\}$. Если αX — некоторое расширение пространства X, то положим $w_{\lambda\alpha}(X) = \sup\{w([A]_{\alpha X}) : A \in \lambda\}$. В первую очередь нас будет интересовать число $w_{\lambda\upsilon}(X)$, где υX — хьюиттовское расширение X.

Теорема 4. $w(C_\lambda(X)) = w_{\lambda\upsilon}(X) \cdot \psi(\lambda)$.

Доказательство. Сначала отметим следующее наблюдение. Положим $\lambda X = \bigcup\{[A]_{\upsilon X} : A \in \lambda\}$. Заметим, что семейство $\tilde{\lambda} = \{[A]_{\upsilon X} : A \in \lambda\}$ состоит из компактных множеств. Легко проверяется, что пространство $C_\lambda(X)$ линейно гомеоморфно пространству $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$ (функции $x \in C(X)$ ставим в соответствие $\tilde{x} \in C(\lambda X)$ — непрерывное продолжение x на λX). Далее работаем с $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$. (Эту конструкцию мы будем использовать и в последующих рассмотрениях.)

Пусть $w(C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)) = \tau$. Тогда и $\chi(C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)) \leq \tau$, так что $\psi(\tilde{\lambda}) = \psi(\lambda) \leq \tau$ (теорема 3). Также $d(C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)) = \mu \leq \tau$. Выберем подмножество $S \subset C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$ мощности μ, плотное в $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$, и пусть $f = \Delta S$ — диагональное произведение элементов S. Отображение f непрерывно и взаимно однозначно отображает λX в $\mathbb{R}^\mu$, поэтому $w(f(\lambda X)) \leq \mu$. Так как $[A]_{\upsilon X}$ компактно при $A \in \lambda$, сужение f на

$[A]_{vX}$ является гомеоморфизмом, так что $w([A]_{vX}) \leq \mu$. Окончательно имеем $w_{\tilde{\lambda}}(\lambda X) = w_{\lambda v}(X) \leq \mu \leq \tau$, следовательно, $w(C_\lambda(X)) \geq w_{\lambda v}(X) \cdot \psi(\lambda)$.

Обратно, пусть $w_{\lambda v}(X) \cdot \psi(\lambda) = \tau$. Пусть λ' — определяющее семейство для $\tilde{\lambda}$ мощности τ. Для каждого множества $B = [A]_{vX} \in \lambda'$ вводим в рассмотрение пространство $C(B)$, наделенное топологией равномерной сходимости на B. Так как $w(B) \leq \tau$, плотность $C(B)$, а следовательно, и вес $C(B)$ не превосходят τ (что доказывается с использованием теоремы Вейерштрасса — Стоуна). Выберем в $C(B)$ базу $\mathscr{B}_B$ мощности $\leq \tau$, состоящую из стандартных множеств $V(x, \varepsilon) = \{y : |x(t) - y(t)| < \varepsilon$ при $t \in B$ и $x, y \in C(B)\}$. Положим $V(\tilde{x}, \varepsilon) = \{z \in C(\lambda X) : z|_B \in V(x, \varepsilon)\}$ и $\mathscr{B}'_B = \{V(\tilde{x}, \varepsilon) : V(x, \varepsilon) \in \mathscr{B}_B\}$. Тогда семейство $\mathscr{B} = \bigcup\{\mathscr{B}'_B : B \in \lambda'\}$ имеет мощность $\leq \tau$ и является базой $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$. Действительно, пусть $x \in C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$ и $V(x, A, \varepsilon)$ — стандартная окрестность точки x в $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$. Найдется множество $B \in \lambda'$, содержащее A. Множество $V(x|_B, A, \varepsilon)$ — окрестность точки $x|_B$ в $C(B)$, поэтому найдется $V(y, \delta) \in \mathscr{B}_B$ такое, что $x|_B \in V(y, \delta) \subseteq V(x|_B, A, \varepsilon)$. Ясно, что $V(\tilde{y}, \delta) \subseteq V(x, A, \varepsilon)$. Доказано, что $\mathscr{B}$ — база $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$, тем самым $w(C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)) = w(C_\lambda(X)) \leq \tau$. $\square$

Следствие. $w(C_\lambda(X)) \geq nw(X)$.

Доказательство. Действительно, пусть $w(C_\lambda(X)) = \tau$ и λ' — определяющее семейство мощности $\psi(\lambda) \leq \tau$. В каждом $A \in \lambda'$ выберем базу $\mathscr{B}_A$ мощности $\leq \tau$. Ясно, что семейство $\mathscr{B} = \bigcup\{\mathscr{B}_A : A \in \lambda'\}$ будет сетью в X мощности $\leq \tau$. $\square$

Вряд ли полученный критерий веса можно считать вполне удовлетворительным, поскольку в нем присутствует внешнее условие — пространство λX. Формально можно выписать критерий, свободный от внешних атрибутов, но будет ли он проще для проверки — непонятно.

В достаточно важном случае $\lambda \subseteq c$ (в частности, когда X является вещественно-компактным пространством) мы имеем чисто внутренний критерий.

Теорема 5. *Пусть* $\lambda \subseteq c$. *Тогда* $w(C_\lambda(X)) = w_\lambda(X) \cdot \psi(\lambda)$.

В случае p-топологий вес и характер совпадают. В общем случае это не так. А для каких λ это так? Сравнивая теоремы 2 и 5, получаем тривиальный ответ: когда $w_{\lambda v}(X) \leq \psi(\lambda)$. Например, когда λ состоит из метризуемых компактов (это уже не так, если λ составлена из метризуемых подпространств счетного веса).

Рассмотрим вопрос о плотности $C_\lambda(X)$. В работе [4] доказана

Теорема 6′. *Если* $\lambda \subseteq c$, *то* $d(C_\lambda(X)) = iw(X)$.

Учитывая теорему 6′, а также линейную гомеоморфность $C_\lambda(X)$ и $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$, мы можем записать следующую формулу.

Теорема 6″. $d(C_\lambda(X)) = iw(\lambda X)$.

Выделим еще одну формулу. Выше мы ввели число $l(\lambda) = \min\{|\lambda'| : \lambda'$ — покрытие $X\}$ (λ-число Линделёфа). Заменив X на λX и λ на $\tilde{\lambda}$, получим число $l(\tilde{\lambda})$. Несмотря на линейную гомеоморфность $C_\lambda(X)$ и $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$, числа $l(\lambda)$ и $l(\tilde{\lambda})$ различны. Ясно, что $l(\lambda) \leq l(\tilde{\lambda})$, но легко построить пример, где неравенство будет строгим (в качестве X можно взять $\omega_1 \times (\omega_2 + 1)$ и подобрать требуемое λ). Можно только заметить, что из счетности $l(\lambda)$ следует счетность и числа $l(\tilde{\lambda})$. Действительно, пусть $\lambda' \subseteq \lambda$ счетно и $X = \bigcup\{A : A \in \lambda'\}$. Положим $\lambda'' = \{[A]_v X : A \in \lambda'\}$. Тогда $\lambda X = \bigcup\{B : B \in \lambda''\}$. Если предположить противное, то при $x \in \lambda X \setminus \bigcup\{B : B \in \lambda''\}$ для каждого B выберем окрестность

$O_B(x)$ точки x в λX так, чтобы $O_B(x) \cap B = \varnothing$. Тогда $\bigcap\{O_B(x) : B \in \lambda''\}$ будет G_δ-множеством, целиком лежащим в $\upsilon X \backslash X$, что противоречит известным свойствам υX.

Теорема 6. $d(C_\lambda(X)) \leq w_{\lambda\upsilon}(X) \cdot l(\tilde{\lambda})$.

Доказательство. Будем работать с пространством $C_{\tilde{\lambda}}(\lambda X)$. Пусть $w_{\lambda\upsilon}(X) \cdot l(\tilde{\lambda}) = \tau$. Выберем $\lambda' \subseteq \lambda$ удовлетворяющим условиям: $|\lambda'| \leq \tau$, далее, $\tilde{\lambda}'$ покрывает λX и λ' замкнуто относительно конечных объединений. Если $A \in \lambda$, то $w([A]_{\upsilon X}) \leq \tau$, откуда вытекает, что $d(\pi_A(C_\lambda(X))) \leq \tau$, тем самым для каждого $A \in \lambda'$ можно выбрать множество $S_A \subseteq C_\lambda(X)$ такое, что $\pi_A(S_A)$ плотно в $\pi_A(C_\lambda(X))$ и $|S_A| \leq \tau$. Положим $S = \bigcup\{S_A : A \in \lambda'\}$. Пусть $\widetilde{S} = \{\tilde{x} : x \in S\}$. Тогда $|\widetilde{S}| \leq \tau$ и $\widetilde{S}$ разделяет точки λX. Докажем последнее. Пусть t и s — две различные точки λX. Найдется множество $A \in \lambda'$ такое, что $t, s \in [A]_{\upsilon X}$. Пусть функция x непрерывна и $x(t) = 0$, $x(s) = 1$. В ее окрестности $V(x, [A]_{\upsilon X}, 4^{-1})$ найдется функция $\tilde{y} : y \in S_A$ (в силу плотности $\pi_A(S_A)$ в $\pi_A(C_\lambda(X))$). Тогда $\tilde{y}(t) \neq \tilde{y}(s)$). Доказано, что семейство $\widetilde{S}$ разделяет точки λX. Взяв диагональ элементов $\widetilde{S}$, получим уплотнение пространства λX на некоторое пространство веса $\leq \tau$. Остается применить теорему $6''$. $\square$

Следствие. *При $\lambda \subseteq c$ выполняется формула $d(C_\lambda(X)) \leq w_\lambda(X) \cdot l(\lambda)$.*

Когда в последней формуле достигается равенство? Оно достигается, например, при $\lambda(X) \leq w_\lambda(X)$, ибо всегда $d(C_\lambda(X)) \geq w_{\lambda\upsilon}(X)$ (это очевидно). В общем случае вопрос остается открытым.

Еще один вопрос: насколько необходимым в следствии является условие $\lambda \subseteq c$?

Неисследованным остается также вопрос о совпадении чисел $d(C_\lambda(X))$ и $w_\lambda(X)$.

Пространство X называют *секвенциально сепарабельным*, если в нем имеется счетное множество S такое, что каждая точка $x \in X$ является пределом некоторой последовательности $\{x_n\}$ точек множества S.

Когда пространство $C_\lambda(X)$ секвенциально сепарабельно? Критерия нет даже в случае $\lambda = p$.

Ответом на частный вопрос является следующее

Предложение. *Если X — σ-компактное пространство счетного сетевого веса, то $C_p(X)$ секвенциально сепарабельно.*

Доказательство. Из наличия счетной сети в X вытекает метризуемость любого компакта в X, так что если $X = \bigcup\{F_n : F_n$ компактно для всякого $n\}$, то пространство $C(F(n))$ сепарабельно в топологии равномерной сходимости (по известной теореме анализа). Из компактности $F(n)$ следует равенство $C(F(n)) = \pi_n(C(X))$, где π_n есть проекция $\mathbb{R}^X$ на $\mathbb{R}^{F(n)}$. Можно предположить, что $F_n \subset F(n+1)$.

Пусть S'_n — плотное в $C(F(n))$ счетное множество. Каждый элемент S'_n продолжим по непрерывности до элемента $C(X)$, получим счетное множество S_n в $C(X)$. Положим $S = \{S_n : n\}$. Множество S искомое.

Пусть $x \in C(X)$. Для каждого n выберем элемент $x_n \in S_n$ такой, что $|x(t) - x_n(t)| < n^{-1}$ при $t \in F(n)$. Пусть $V = V(x, A, \varepsilon) = \{y : |x(t) - y(t)| < \varepsilon$ при $t \in A$ и $|A| < \omega\}$ — произвольная базисная окрестность x в $C_p(X)$. Найдется n такое, что $A \subseteq F(n)$ и $n^{-1} < \varepsilon$. При $m > n$ имеем $|x(t) - x_m(t)| < m^{-1} < \varepsilon$ при $t \in A$, так что $x_m \in V$ и последовательность $\{x_n\}$ сходится к x. $\square$

Неясно, справедливо ли это утверждение в случае произвольного λ.

Переходим к проблеме оценки сетевого веса $C_\lambda(X)$.

Окрестность V множества A назовем *функциональной*, если множества A и $X \setminus V$ функционально отделимы. Такова, например, любая окрестность компактного множества или замкнутого множества в нормальном пространстве.

Семейство δ подмножеств X назовем λ-*сетью*, если для любого множества $A \in \lambda$ и любой его функциональной окрестности V найдется множество $B \in \delta$ такое, что $A \subseteq B \subseteq V$.

Введем число $nw(\lambda) = \min\{|\lambda'| : \lambda' \subseteq \lambda$, где λ' — λ-сеть$\}$.

Теорема 7. $nw(C_\lambda(X)) = nw(\lambda)$.

Доказательство. Предположим, что $nw(C_\lambda(X)) = \tau$. Выберем в $C_\lambda(X)$ сеть $\gamma = \{H\}$ мощности τ, а в $\mathbb{R}$ счетную базу $\mathscr{B} = \{U_n\}$. Для каждой пары (H, U_n), где $H \in \gamma$, $U_n \in \mathscr{B}$, определяем множество $S_{H,n} = \{t \in X : x(t) \in U_n$ для каждого $x \in H\}$. Семейство $S = \{S_{H,n}\}$ будет λ-сетью в X. Действительно, пусть $A \in \lambda$, V — функциональная окрестность множества A. Пусть $x \in C(X)$ таково, что $x|_A = 1$ и $x|_{X \setminus V} = 0$. Пусть $U_n \in \mathscr{B}$ — окрестность единицы в $\mathbb{R}$ диаметра меньшего, чем 2^{-1}. Множество $V = V(x, A, U_n) = \{y : y(t) \in U_n$ при $t \in A\}$ является окрестностью точки x в $C_\lambda(X)$, поэтому найдется элемент $H \in \gamma$ такой, что $x \in H \subseteq V$. В этом случае выполняется формула $A \subseteq S_{H,n} \subseteq V$. Действительно, если $t \in A$ и $y \in H$, то $y(t) \in U_n$ по определению $V(x, A, U_n)$, так что $A \subseteq S_{H,n}$. Если $t \notin V$, то $x(t) = 0$, откуда следует, что $x(t) \notin U_n$. Но $x \in H$, следовательно, $t \notin S_{H,n}$. Остается заметить, что $|S| \leq \tau$, так что $nw(\lambda) \leq \tau$.

Обратно, пусть $nw(\lambda) = \tau$. Пусть $\mathscr{B} = \{U_n\}$ — счетная база $\mathbb{R}$, $S = \{H\}$ — λ-сеть X мощности τ. Для каждой пары (H, U_n) определяем множество $W_{H,n} = \{x : x(H) \subseteq U_n\}$. Семейство $\{W_{H,n} : H \in S,\ U_n \in \mathscr{B}\}$ замкнем относительно конечных пересечений, получим семейство T мощности $\leq \tau$. Докажем, что T будет сетью в $C_\lambda(X)$. Действительно, пусть $x \in C_\lambda(X)$, $V(x, A, \varepsilon) = \{y : \sup|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ при $t \in A\}$ — окрестность x, где $A \in \lambda$. Положим $B = [x(A)]$. Множество B компактно, так что оно допускает конечное покрытие $\{U_{n(i)} : i \leq n\}$ элементами базы $\mathscr{B}$ диаметра $< \varepsilon \cdot 2^{-1}$. Для каждого i выберем замкнутое множество $B_i \subseteq U_{n(i)}$ так, чтобы семейство $\{B_i\}$ покрывало B. Положим $A_i = x^{-1}(B_i) \cap A$. Тогда $A_i \in \lambda$ и $V_i = x^{-1}(U_{n(i)})$ — функциональная окрестность множества A_i. Найдется элемент $H_i \in S$ такой, что $A_i \subseteq H_i \subseteq V_i$. Понятно, что $x \in W_{H_i, n(i)}$. Положим $W = \cap\{W_{H_i, n(i)} : i \leq n\}$. Тогда $W \in T$, $x \in W$ и остается показать, что $W \subseteq V(x, A, \varepsilon)$. Пусть $y \in W$. Тогда $y \subseteq W_{H_i, n(i)}$ для каждого i, откуда при $t \in A_i$ выполняются включения $x(t) \in B_i$ и $y(t) \in U_{n(i)}$, так что $|x(t) - y(t)| < \varepsilon$ (диаметр $U_{n(i)}$ не превосходит $\varepsilon \cdot 2^{-1}$). Это верно для всякого $t \in A$, ибо $A = \bigcup A_i$ в силу того, что семейство $\{B_i\}$ покрывает $x(A)$.

Итак, T действительно есть сеть в $C_\lambda(X)$. $\square$

Вопрос о псевдохарактере пространства $C_\lambda(X)$ решен в работе [4]. Там был введен инвариант $d_\lambda(X) = \min\{|\sigma| : \sigma \subseteq \lambda,\ \tilde{\sigma}$ плотно в $X\}$ (λ-*плотность* X) и доказана следующая формула:

(A) $\psi(C_\lambda(X)) = d_\lambda(X)$.

Там же фактически было доказано, что в случае компактного X справедливо утверждение

(B) $iw(C(X)) \leq \tau$ *тогда и только тогда, когда* $w(X) \leq \exp\tau$ ($C(X)$ рассматривается в топологии равномерной сходимости).

Эти формулы будут использованы для решения вопроса об i-весе в общем случае.

Теорема 8. *$iw(C_\lambda(X)) \le \tau$ тогда и только тогда, когда $w_{\lambda\upsilon}(X) \le \exp\tau$ и $d_\lambda(X) \le \tau$.*

Доказательство. В данном вопросе удобнее работать с пространством $C_{\tilde\lambda}(\lambda X)$.

Пусть $iw(C_\lambda(X)) \le \tau$. По известной формуле C_p-теории (см. [7]) имеем $d(C_p(C_\lambda(X))) = \eta \le \tau$. По другой известной формуле (для псевдовеса, см. там же) $pw(C_p(C_\lambda(X))) \le \exp d(C_p(C_\lambda(X))) \le \exp\eta \le \exp\tau$. Для компактных пространств вес и псевдовес совпадают, так что для всякого $A \in \tilde\lambda$ выполняется формула $w(A) \le \exp\tau$, откуда следует, что $w_{\lambda\upsilon}(X) \le \exp\tau$. Неравенство $d_\lambda(X) \le \tau$ вытекает из формулы (A) (ибо $\psi(Z) \le iw(Z)$ для всякого Z).

В одну сторону теорема доказана. Докажем в обратную.

Так как $d_\lambda(X) \le \tau$, найдется семейство $\sigma' \subseteq \lambda$, мощность которого не превосходит τ и тело которого плотно в X. Положим $\sigma = \{[C]_{\lambda X} : C \in \sigma'\}$. Пусть $A \in \sigma$. Отображение сужения $\pi_A : C_{\tilde\lambda}(\lambda X) \to C_{\lambda'}(A)$ непрерывно, где $\lambda' = \{B \cap A : B \in \tilde\lambda\}$. Так как A компактно и $w(A) \le \exp\tau$, то, применяя формулу (B), получим неравенство $iw(C_{\lambda'}(A)) \le \tau$. Пусть $f_A : C_{\lambda'}(A) \to X_A$ — уплотнение $C_{\lambda'}(A)$ на пространство X_A веса $\le \tau$. Положив $\tilde f_A = f_A \circ \pi_A$, получим непрерывное отображение пространства $C_{\tilde\lambda}(\lambda X)$ на пространство X_A. Рассмотрим диагональное произведение f отображений $\tilde f_A$. Оно отображает пространство $C_{\tilde\lambda}(\lambda X)$ на произведение $\prod\{X_A : A \in \sigma\}$, которое имеет вес $\le \tau$ (так как $|\sigma| \le \tau$ и $w(X_A) \le \tau$). Остается показать, что отображение f взаимно однозначно.

Пусть x, y — произвольные элементы $C(\lambda X)$ и $x \ne y$. Ввиду плотности множества $\tilde\sigma$ в λX найдется множество $A \in \sigma$ такое, что $\pi_A(x) \ne \pi_A(y)$. В силу взаимной однозначности отображения f_A имеем $f_A(\pi_A(x)) \ne f_A(pi_A(y))$, или $f(x) \ne f(y)$. $\square$

Можно сформулировать теорему 8 несколько иначе.

Теорема 8$'$. *$iw(C_\lambda(X)) \le \tau$ тогда и только тогда, когда найдется семейство $\sigma \subseteq \lambda$ такое, что выполняются условия:*

(a) *$|\sigma| \le \tau$;*

(b) *$\tilde\sigma$ плотно в X;*

(c) *$w([A]_{\upsilon X}) \le \exp\tau$ для каждого $A \in \sigma$.*

Когда $iw(C_\lambda(X)) = \psi(C_\lambda(X))$? Очевидно, что в общем случае это не так, но будет в случае $\lambda = p$. Из теоремы 8 видно, что равенство выполняется, если λ состоит, например, из метризуемых компактов.

Несколько слов о числе Линделёфа. Если обратиться к C_p-теории, то там имеется теорема М. О. Асанова [1]: $l(C_p(X)) \ge t^*(X)$, где $t^*(X) = \sup\{t(X^n) : n \in \mathbb{N}\}$ — супертеснота X. Пространство $C_\lambda(X)$ естественно уплотняется на пространство $C_p(X)$, число Линделёфа не увеличивается при непрерывных отображениях, так что получается формула $l(C_\lambda(X)) \ge l(C_p(X)) \ge t^*(X)$. Если использовать пространство $C_{\tilde\lambda}(\lambda X)$, то появится следующая дополнительная информация. Пусть $A \in \lambda$, $\widetilde{A} = [A]_{\upsilon X}$. Тогда $\widetilde{A}$ компактно, отображение сужения $\pi_{\widetilde{A}}$ переводит $C_{\tilde\lambda}(\lambda X)$ на $C_{\lambda'}(\widetilde{A})$ (λ' определено в доказательстве теоремы 8), так что $l(C_{\lambda'}(\widetilde{A})) \le l(C_{\tilde\lambda}(\lambda X)) = l(C_\lambda(X))$ и $d(C_{\tilde\lambda}(\lambda X)) = l(C_{\lambda'}(\widetilde{A}))$ (равномерная топология). По известной теореме анализа имеем $w(\widetilde{A}) \le l(C_\lambda(X))$.

В итоге получатся следующая

Теорема 9. (a) $l(C_\lambda(X)) \geq t^*(X)$;
(b) *вес любого $A \in \lambda$ (более того, вес $[A]_{\upsilon X}$) не превосходит $l(C_\lambda(X))$.*

Следствие 1. *Если пространство $C_\lambda(X)$ линделёфово, то X обладает счетной супертеснотой и каждое $A \in \lambda$, а также его замыкание в υX обладают счетной базой.*

Неясно, будут ли в данном случае элементы λ компактными множествами. Можно к этому добавить (см. (A))

Следствие 2. *Если пространство $C_\lambda(X)$ линделёфово и имеет счетный псевдохарактер, то X — сепарабельное пространство счетной супертесноты и счетного λ-веса.*

Действительно, линделёфовость обеспечивает счетный λ-вес и счетную супертесноту, а счетный псевдохарактер — плотность в X объединения элементов некоторого счетного подсемейства элементов λ (каждый из которых сепарабелен).

Больше о числе Линделёфа пространства $C_\lambda(X)$ сказать нечего.

Переходим к вопросу о тесноте.

Семейство σ открытых множеств пространства X назовем λ-*покрытием* (λ-*функциональным покрытием*) X, если для всякого $A \in \lambda$ найдется множество $V \in \sigma$, являющееся (функциональной) окрестностью множества A.

Вводим инвариант $l_\lambda(X) = \min\{\tau$: любое λ-покрытие пространства X содержит λ-подпокрытие мощности $\leq \tau\}$, а также аналогичный инвариант $l_{\lambda,f}(X)$, отличающийся от первого заменой λ-покрытий λ-функциональными покрытиями.

В частности, если $l_\lambda(X)$ счетен, то пространство X можно назвать λ-*линделёфовым*.

Понятно, что эти инварианты совпадают, если λ состоит из компактных множеств.

Теорема 10. $t(C_\lambda(X)) = l_{\lambda,f}(X)$.

Доказательство. Пусть $t(C_\lambda(X)) = \tau$, а σ — λ-функциональное покрытие пространства X. Для каждого множества $A \in \lambda$ находим множество $V(A) \in \sigma$, являющееся функциональной окрестностью A, и выберем функцию $x_A \in C(X)$ таким образом, чтобы $x|A = 1$ и $x|X \setminus V(A) = 0$. Очевидно, что множество $S = \{x_A : A \in \lambda\}$ имеет предельную точку x, тождественно равную 1. По условию найдется подмножество $T \subseteq S$ мощности $\leq \tau$, для которого x также будет точкой прикосновения. Положим $\sigma(T) = \{V(A) : x_A \in T\}$. Тогда $\sigma(T)$ будет λ-функциональным покрытием пространства X мощности $\leq \tau$. Действительно, пусть $B \in \lambda$ — произвольный элемент. Рассмотрим окрестность $V(x, B, 2^{-1})$ точки x. Найдется элемент $x_A \in T \cap V(x, B, 2^{-1})$. Так как $x_A(t) > 2^{-1}$ при $t \in B$ и $x_A(t) = 0$ при $t \notin V(A)$, функция x_A разделяет множества B и $X \setminus V(A)$, т. е. $V(A)$ — функциональная окрестность множества B.

Доказано, что $\sigma(T)$ — λ-функциональное покрытие, так что $l_{\lambda,f}(X) \leq \tau$.

Обратно, пусть $l_{\lambda,f}(X) = \tau$. Докажем, что $t(C_\lambda(X)) \leq \tau$. Пусть x — единичная функция на X и $x \in [S]$. Для каждого $A \in \lambda$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем окрестность $V_n = V(x, A, 2^{-n}) = \{y : \sup|x(t) - y(t)| < 2^{-n}$ при $t \in A\}$ точки x, в этой окрестности точку $x_{A,n} \in S$ и положим $W(A, n) = x_{A,n}^{-1}((1 - n^{-1}, 1 + n^{-1}))$. При этих условиях будут выполнены соотношения $x_{A,n}(A) \subseteq [1 - 2^{-n}, 1 + 2^{-n}]$ и $x_{A,n}(X \setminus W(A, n)) \subseteq \mathbb{R} \setminus [1 - n^{-1}, 1 + n^{-1}]$. Это означает, что

$W(A,n)$ — функциональная окрестность множества A и что $\sigma_n = \{W(A,n) : A \in \lambda\}$ — λ-функциональное покрытие пространства X. Выделим из σ_n λ-функциональное подпокрытие γ_n мощности $\leq \tau$. Тем самым будет определено множество $S_n \subseteq S$ мощности $\leq \tau$, состоящее из всех тех точек $x_{A,n}$, для которых $W(A,n) \in \gamma_n$. Положив $S' = \bigcup\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$, получим формулу $x \in [S']$. Действительно, пусть $V(x,A,\varepsilon)$ — произвольная базисная окрестность точки x. Пусть n таково, что $n^{-1} < \varepsilon$. В семействе γ_n найдется множество $W(B,n)$, являющееся функциональной окрестностью множества A. Соответствующая этому множеству функция $x_{B,n}$ обладает свойством: $|x_{B,n}(t) - 1| \leq n^{-1}$ при $t \in W(B,n) \supseteq A$, или $|x_{B,n}(t) - x(t)| \leq n^{-1} < \varepsilon$ при $t \in A$, так что $x_{B,n} \in S_n \cap V(x,A,\varepsilon)$.

Доказано, что $x \in [S']$, а следовательно, $t(C_\lambda(X)) \leq \tau$. $\square$

Следствие 1. *Если $\lambda \subseteq c$, то $t(C_\lambda(X)) = l_\lambda(X)$.*

При $\lambda = p$ имеем

Следствие 2. $t(C_\lambda(X)) = l_p(X)$.

Например, $C_\lambda(X)$ имеет счетную тесноту тогда и только тогда, когда любое p-покрытие пространства X содержит не более чем счетное p-подпокрытие.

Сравнивая следствие 2 и теорему Архангельского — Пыткеева [1], получаем

Следствие 3. *Любая конечная степень пространства X линделёфова тогда и только тогда, когда любое p-покрытие X содержит не более чем счетное p-подпокрытие.*

Кратко: $l^*(X) = l_p(X)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Архангельский А. В.* Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.
2. *Величко Н. В.* Замечания по $C_\lambda(X)$ // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 1998. № 2. С. 57–60.
3. *Velichko N. V.* On spaces $C_\lambda(X)$ // Topology Appl. 2000. V. 107. P. 191–195.
4. *Нохрин С. Э.* σ-компактность и λ-топология // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 1998. № 2. С. 81–88.
5. *Асанов М. О.* О пространстве непрерывных отображений // Изв. вузов. Математика. 1980. № 4. С. 6–10.
6. *Архангельский А. В.* Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, № 6. С. 29–84.

Статья поступила 28 июля 2002 г.

Величко Николай Васильевич
Институт математики и механики УрО РАН
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219
vel@imm.uran.ru