Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2004. Том 45, № 2

УДК 517.956

АСИМПТОТИКИ И ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ТРЕХМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ЧАСТОЙ СМЕНОЙ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Д. И. Борисов

Аннотация: Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения оператора Лапласа в цилиндре с частой сменой типа граничного условия на боковой поверхности. Смена граничных условий задается путем разбиения боковой поверхности на большое число узких полос, на которых поочередно задаются условия Дирихле и Неймана. Исследуется случай, когда усредненная задача содержит краевое условие Дирихле на боковой поверхности. В случае полос медленно меняющейся ширины построены первые члены асимптотических разложений собственных элементов, а в случае полос быстро меняющейся ширины получены оценки скорости сходимости.

Ключевые слова: асимптотика, сингулярное возмущение, оператор Лапласа.

Введение

Статья посвящена изучению трехмерной краевой задачи с частой сменой типа граничного условия. Характерной чертой описания такого рода краевых условий является разбиение границы области на две части, на одной из которых задается граничное условие одного типа (например, условие Дирихле), а на другой части — другого типа (например, условие Неймана). Предполагается, что одна из этих частей границы зависит от малого параметра и состоит из непересекающихся компонент, причем при стремлении малого параметра к нулю число компонент неограниченно растет, а мера каждой отдельной компоненты стремится к нулю. Вопросы усреднения такого рода задач изучены достаточно хорошо (см., например, [1–8]). Основной результат усреднения, полученный в этих работах, кратко можно сформулировать так. Решения краевых задач с частой сменой граничных условий сходятся к решениям задач с классическими краевыми условиями, тип которых определяется соотношением мер частей границы с разными граничными условиями в исходной задаче. В работах [5, 7, 9, 10] рассматривалось чередование первого краевого условия со вторым или третьим и были получены оценки скорости сходимости в предположении, что каждая связная компонента с граничным условием одного из типов стягивается к точке. Асимптотики решений задач с частой сменой граничных условий построены в [11–20]. Двумерные задачи исследовались в [11–16]. В [17] построено асимптотическое разложение решения краевой задачи для

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00693), программы «Ведущие научные школы» (НШ–1446.2003.1) и программы «Университеты России» Минобразования РФ.

уравнения Пуассона в многомерном слое в случае периодического чередования краевых условий на множествах, стягивающихся к точке. В работах [18, 19] построены полные асимптотические разложения собственных элементов оператора Лапласа в круговом цилиндре с частым чередованием граничных условий Дирихле и Неймана на узких полосах постоянной ширины, лежащих на боковой поверхности. В [18] рассматривался случай усредненной задачи с краевым условием Дирихле на боковой поверхности с дополнительным предположением, что ширина полос с граничным условием Дирихле имеет тот же порядок малости, что и ширина с граничным условием Неймана. В [19] изучался случай, соответствующий усредненной задаче со вторым или третьим краевым условием на боковой поверхности. В обоих случаях было показано, что исходная возмущенная задача содержит только простые и двукратные собственные значения. Кроме того, в [19] для цилиндра произвольного сечения и полос переменной медленно меняющейся ширины в случае усредненной задачи со вторым или третьим краевым условием на боковой поверхности были построены первые члены асимптотических разложений собственных значений, сходящихся к простым предельным собственным значениям, и первые члены асимптотик соответствующих собственных функций.

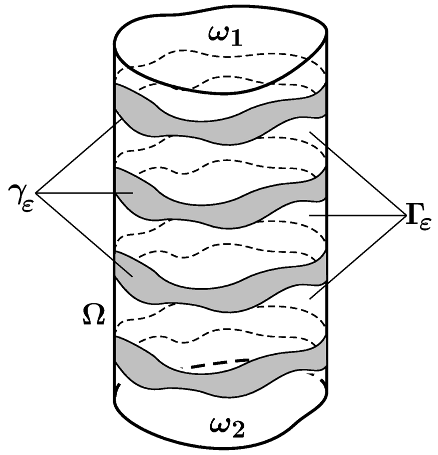
В настоящей работе рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения лапласиана в цилиндре с краевым условием Дирихле на верхнем основании и условием Неймана на нижнем основании. Боковая поверхность разбивается на большое число узких полос переменной ширины, описываемых двумя характерными параметрами. На этих полосах поочередно задаются граничные условия Дирихле и Неймана. Рассматривается случай, когда усредненная задача содержит краевое условие Дирихле на боковой поверхности. В предположении медленно меняющейся ширины полос построены первые члены двупараметрических асимптотических разложений собственных элементов. Вид этих асимптотических разложений позволяет утверждать, что в случае общего положения происходит расщепление всех кратных собственных значений усредненной задачи и возмущенная задача имеет только простые собственные значения. Рассмотрен также случай кругового цилиндра и показано, что в зависимости от ширины полос могут реализовываться как прежняя ситуация полного расщепления кратных собственных значений, так и ситуация, когда расщепления не происходит. Приведены достаточные условия, при выполнении которых спектр возмущенной задачи содержит двукратное собственное значение. В случае полос быстро меняющейся ширины получены оценки скорости сходимости собственных значений возмущенной задачи.

Результаты настоящей работы частично анонсированы в [20].

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $x' = (x_1, x_2)$, $x = (x', x_3)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, $\omega \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область с бесконечно дифференцируемой границей, $\Omega = \omega \times [0, H]$, $H > 0$, ω_1, ω_2 — верхнее и нижнее основания цилиндра Ω, $\omega_1 = \{x : x' \in \omega, x_3 = H\}$, $\omega_2 = \{x : x' \in \omega, x_3 = 0\}$. Через s будем обозначать натуральный параметр кривой $\partial\omega$. Будем считать, что N — натуральное число, стремящееся к бесконечности; $\varepsilon = H/(\pi N)$ — малый положительный параметр. На боковой поверхности Σ цилиндра Ω мы задаем подмножество γ_ε, состоящее из N узких полос:

$$\gamma_\varepsilon = \{x : x' \in \partial\omega,\ |x_3 - \varepsilon\pi(j + 1/2)| < \varepsilon\eta g_\varepsilon(s),\ j = 0, \dots, N-1\},$$



где $\eta = \eta(\varepsilon)$, $0 < \eta(\varepsilon) < \pi/2$, $g_\varepsilon \in C^\infty(\partial\omega)$ — произвольная функция, удовлетворяющая оценке $0 < c \le g_\varepsilon(s) \le 1$ с константой c, не зависящей от ε и s (см. рис.).

В работе рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения:

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon,\ x \in \Omega, \quad \psi_\varepsilon = 0,\ x \in \omega_1 \cup \gamma_\varepsilon, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \omega_2 \cup \Gamma_\varepsilon. \tag{1.2}$$

Здесь ν — внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$, а множество Γ_ε определяется как дополнение $\bar{\gamma}_\varepsilon$ до боковой поверхности Σ. Всюду далее задачу (1.1), (1.2) будем называть возмущенной.

В работе [4] исследовано усреднение уравнения Пуассона с граничными условиями (1.2) в случае, когда ω — единичный круг, $g_\varepsilon \equiv 1$. Установлено, что при выполнении равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \eta(\varepsilon) = 0 \tag{1.3}$$

решение такой задачи сходится в норме $H^1(\Omega)$ к решению того же уравнения Пуассона с прежними граничными условиями на основаниях и граничным условием Дирихле на боковой поверхности. Аналогичное утверждение будет доказано и в настоящей работе для задачи (1.1), (1.2).

Теорема 1.1. *Пусть выполнено равенство* (1.3). *Тогда собственные значения возмущенной задачи при* $\varepsilon \to 0$ *сходятся к собственным значениям предельной задачи*

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0,\ x \in \Omega, \quad \psi_0 = 0,\ x \in \omega_1 \cup \Sigma, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} = 0,\ x \in \omega_2. \tag{1.4}$$

Для всякой собственной функции ψ_0, *соответствующей собственному значению* λ_0, *существует сходящаяся к ней в* $H^1(\Omega)$ *линейная комбинация собственных функций возмущенной задачи, соответствующих собственным значениям, сходящимся к* λ_0. *Совокупная кратность собственных значений возмущенной задачи, сходящихся к одному и тому же предельному собственному значению, совпадает с кратностью этого предельного собственного значения.*

Задача (1.4) легко решается разделением переменных: $\lambda_0 = M^2 + \varkappa$, $\psi_0(x) = \phi_0(x')\cos Mx_3$, где $M = \pi(l+1/2)H^{-1}$, $l \geq 0$, — целое число, $\varkappa$ и ϕ_0 — собственные элементы двумерной задачи

$$-\Delta_{x'}\phi_0 = \varkappa\phi_0,\ x' \in \omega, \quad \phi_0 = 0,\ x' \in \partial\omega. \tag{1.5}$$

Собственные значения предельной и возмущенной задач расположим в порядке неубывания с учетом кратности:

$$\lambda_0^1 \leq \lambda_0^2 \leq \dots \leq \lambda_0^k \dots, \quad \lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \dots \leq \lambda_\varepsilon^k \dots. \tag{1.6}$$

Соответствующие собственные функции ψ_ε^k будем считать ортонормированными в $L_2(\Omega)$. Числа M, $\varkappa$ и функции ϕ_0, соответствующие λ_0^k, обозначим через M^k, $\varkappa^k$ и ϕ_0^k. Собственные функции задачи (1.5) будем считать ортонормированными в $L_2(\omega)$, причем собственные функции, соответствующие кратному собственному значению, выберем так, чтобы значения их нормальных производных были ортогональны в $L_2(\partial\omega)$ с весом $(-\ln\sin\eta g_\varepsilon)$. Возможность такой ортогонализации следует из известной теоремы алгебры о диагонализации двух квадратичных форм в конечномерном пространстве.

Заметим, что задача (1.4) может иметь кратные собственные значения. Такая ситуация имеет место, если задача (1.5) имеет кратные собственные значения либо если для некоторых i и j выполнено равенство $\lambda_0^i = M_i^2 + \varkappa_i^2 = M_j^2 + \varkappa_j^2 = \lambda_0^j$. Ясно, что для любых $\varkappa_i$ и $\varkappa_j$ всегда можно выбрать высоту H так, чтобы выполнялось равенство $\lambda_0^i = \lambda_0^j$.

Сформулируем теперь основные результаты работы.

Теорема 1.2. *Пусть выполнено равенство* (1.3) *и существует* $\beta > 0$ *такое, что норма Гёльдера* $\|g_\varepsilon\|_{C^{2+\beta}(\partial\omega)}$ *ограничена по* ε. *Тогда асимптотики собственных значений возмущенной задачи имеют вид*

$$\lambda_\varepsilon^k = \lambda_0^k + \varepsilon\lambda_1^k(\eta,\varepsilon) + O(\varepsilon^{3/2}(|\ln\eta|^{3/2} + 1)), \tag{1.7}$$

$$\lambda_1^k(\eta,\varepsilon) = \int\limits_{\partial\omega} \left(\frac{\partial\phi_0^k}{\partial n}\right)^2 \ln\sin\eta g_\varepsilon\, ds, \tag{1.8}$$

где n *— внешняя нормаль к кривой* $\partial\omega$.

Утверждение об асимптотиках соответствующих собственных функций в условиях теоремы 1.2 будет сформулировано в § 3 (см. теорему 3.1).

Если для некоторых $i \neq j$ собственные значения λ_0^i и λ_0^j не равны, то, как видно из теоремы 1.2, собственные значения λ_ε^i и λ_ε^j также не совпадают. Если $\lambda_0^i = \lambda_0^j$, то для произвольных области ω и функции g_ε величины λ_1^i и λ_1^j, вообще говоря, не равны. Таким образом, в случае общего положения спектр задачи (1.1), (1.2) состоит из простых собственных значений. Вместе с тем, как показано в [18], для кругового цилиндра с $g_\varepsilon \equiv 1$ возмущенная задача имеет также и двукратные собственные значения. Ясно, что даже для кругового цилиндра с произвольной функцией g_ε возмущенная задача, вообще говоря, не имеет кратных собственных значений. В настоящей работе для случая кругового цилиндра доказаны достаточные условия на функцию g_ε, при выполнении которых возмущенная задача имеет кратные собственные значения; для их формулировки введем дополнительные обозначения.

Пусть ω — единичный круг с центром в нуле. Тогда задача (1.5) допускает разделение переменных, ее собственные значения являются корнями уравнений

$\mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}) = 0$, где $\mathscr{J}_m$ — функции Бесселя целого порядка $m \geq 0$, а соответствующие собственные функции (не нормированные в $L_2(\Omega)$) имеют вид $\mathscr{J}_0(\sqrt{\varkappa}r)$ $(m = 0)$, $\mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}r)\cos(m\theta)$, $\mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}r)\sin(m\theta)$ $(m > 0)$, где (r, θ) — полярные координаты, соответствующие переменным x'. Так как все корни уравнений $\mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}) = 0$ различны [21], задача (1.5) имеет только простые $(m = 0)$ и двукратные $(m > 0)$ собственные значения. Функцию $g_\varepsilon(\theta)$ периодически продолжим на все значения θ с периодом 2π.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.2, ω — *единичный круг с центром в нуле, функция* $g_\varepsilon(\theta)$ *периодична по* θ *с периодом* $\pi/(2m)$, $m > 0$, $\lambda_0^k = \varkappa_k^2 + M_k^2$ — *двукратное собственное значение задачи* (1.4), $\varkappa_k$ — *корень уравнения* $\mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}) = 0$. *Тогда собственное значение* λ_ε^k, *сходящееся к* λ_0^k, *двукратное и имеет асимптотику* (1.7), *где*

$$\lambda_1^k(\eta, \varepsilon) = \frac{2\varkappa_k}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(m\theta + \alpha_\varepsilon) \ln \sin \eta g_\varepsilon(\theta)\, d\theta = \frac{2\varkappa_k}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta + \alpha_\varepsilon) \ln \sin \eta g_\varepsilon(\theta)\, d\theta,$$

здесь α_ε *выбрано из условия*

$$\int_0^{2\pi} \sin(2m\theta + 2\alpha_\varepsilon) \ln \sin \eta g_\varepsilon(\theta)\, d\theta = 0. \tag{1.9}$$

Асимптотики соответствующих собственных функций имеют вид (4.3).

Условия, наложенные в теореме 1.2 на функцию g_ε, призваны исключить наличие у ограниченной функции g_ε неограниченных по ε производных. Тем самым не рассматриваются быстро осциллирующие функции g_ε, что геометрически соответствует полосам быстро меняющейся ширины на боковой поверхности. Для таких случаев на основе теоремы 1.2 в работе получены оценки скорости сходимости возмущенной задачи, результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1.4. *Пусть выполнено равенство* (1.3). *Тогда верны оценки*

$$-C_k \varepsilon(|\ln \eta| + 1) \leq \lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k \leq 0$$

с положительными константами C_k, *не зависящими от* ε *и* η.

§ 2. Сходимость собственных элементов возмущенной задачи

В настоящем параграфе мы докажем теорему 1.1 и вспомогательную лемму, которая будет использована при доказательстве теоремы 1.2.

Всюду в параграфе считаем, что собственные значения возмущенной и предельной задач упорядочены согласно (1.6), а соответствующие собственные функции ортонормированы в $L_2(\Omega)$. Дополнительная ортогонализация предельных собственных функций в $L_2(\partial\omega)$, описанная в § 1, здесь не предполагается.

Для доказательства теоремы 1.1 нам понадобится

Лемма 2.1. *Пусть Q — произвольный компакт на комплексной плоскости, не содержащий собственных чисел предельной задачи. Тогда при $\lambda \in Q$ и достаточно малых ε краевая задача*

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda u_\varepsilon + f,\ x \in \Omega, \quad u_\varepsilon = 0,\ x \in \omega_1 \cup \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0,\ x \in \omega_2 \cup \Gamma_\varepsilon, \tag{2.1}$$

однозначно разрешима для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ и справедлива равномерная по ε, η, λ и f оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.2}$$

При $\varepsilon \to 0$ функция u_ε равномерно по $\lambda \in Q$ сходится в $H^1(\Omega)$ к решению задачи

$$-\Delta u_0 = \lambda u_0 + f,\ x \in \Omega, \quad u_0 = 0,\ x \in \partial\Omega \backslash \overline{\omega}_2, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0,\ x \in \omega_2. \tag{2.3}$$

Доказательство. Ясно, что однозначная разрешимость задачи (2.1) есть следствие оценки (2.2). Последнюю будем доказывать рассуждениями от противного. Допустим, что эта оценка не верна. Тогда существуют последовательности $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\lambda_k \in Q$, $f_k \in L_2(\Omega)$ такие, что при $\varepsilon = \varepsilon_k$, $\lambda = \lambda_k$, $f = f_k$ для решения задачи (2.1) имеет место неравенство

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega)} \ge k\|f_k\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.4}$$

Без ограничения общности будем считать, что функция u_{ε_k} нормирована в $L_2(\Omega)$. Тогда, умножая уравнение в (2.1) на u_{ε_k} и интегрируя один раз по частям, получаем, что

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega)} \le C\big(\|u_{\varepsilon_k}\|_{L_2(\Omega)} + \|f_k\|_{L_2(\Omega)}\big) = C\big(\|f_k\|_{L_2(\Omega)} + 1\big), \tag{2.5}$$

где константа C не зависит от k. Из (2.4), (2.5) следует ограниченность u_{ε_k} в норме $H^1(\Omega)$:

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{H^1(\Omega)} \le C, \tag{2.6}$$

где константа C не зависит от k. Неравенства (2.6) и (2.4) очевидным образом дают сходимость в $L_2(\Omega)$: $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Далее, вновь обращаясь к (2.6), учитывая компактность Q и выделяя при необходимости подпоследовательность из последовательности индексов k, заключаем, что λ_k сходятся к $\lambda_* \in Q$, а u_{ε_k} сходится к u_* слабо в $H^1(\Omega)$ и сильно в $L_2(\Omega)$, причем функция u_* не равна нулю в силу нормировки u_{ε_k}. Функция u_{ε_k}, очевидно, равна нулю на множестве $\{x : x' \in \partial\omega,\ |x_3 - \varepsilon\pi(j+1/2)| < c\varepsilon\eta,\ j = \overline{0, N-1}\} \cup \omega_1$. Опираясь на этот факт, аналогично доказательству теоремы II.4 из [4] несложно показать, что u_* равна нулю на боковой поверхности и верхнем основании цилиндра Ω. С другой стороны, для всякой функции $v \in H^1(\Omega)$, равной нулю на боковой поверхности и верхнем основании цилиндра Ω, выполнено очевидное интегральное равенство

$$\int\limits_\Omega (\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla v)\, dx = \int\limits_\Omega (\lambda_k u_{\varepsilon_k} + f_k) v\, dx,$$

переходя в котором к пределу при $k \to \infty$, получаем, что функция u_* является нетривиальным решением задачи

$$-\Delta u_* = \lambda_* u_*,\ x \in \Omega, \quad u_* = 0,\ x \in \partial\Omega \backslash \overline{\omega}_2, \quad \frac{\partial u_*}{\partial \nu} = 0,\ x \in \omega_2.$$

Таким образом, $\lambda_* \in Q$ является собственным значением предельной задачи, что противоречит условию леммы. Оценка (2.2) доказана.

Используя теперь доказанную оценку (2.2) вместо (2.6), аналогичными рассуждениями несложно доказать сильную в $L_2(\Omega)$ и слабую в $H^1(\Omega)$ сходимость решения задачи (2.1) к решению задачи (2.3) для произвольных сходящихся последовательностей $\varepsilon_k \to 0$, $\lambda_k \to \lambda_*$ при $k \to \infty$. Из этой сходимости и непрерывной зависимости u_0 от $\lambda \in Q$ выводим равномерную по λ сходимость u_ε к u_0 (сильную в $L_2(\Omega)$ и слабую в $H^1(\Omega)$). Докажем теперь сильную сходимость в $H^1(\Omega)$. Ясно, что достаточно доказать сходимость нормы $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ к $\|u_0\|_{H^1(\Omega)}$. Этот факт вытекает из очевидных соотношений

$$\|u_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} = \lambda\|u_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} + (u_\varepsilon, f)_{L_2(\Omega)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \lambda\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + (u_0, f)_{L_2(\Omega)} = \|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Известно, что решения задач (2.1) и (2.3) мероморфны по λ в норме $H^1(\Omega)$ и имеют в качестве особенностей простые полюса, совпадающие с собственными значениями соответственно возмущенной и предельной задач, а вычеты в указанных полюсах суть соответствующие собственные функции.

Пусть $\lambda_0 = \lambda_0^q = \dots = \lambda_0^{q+p-1}$ — p-кратное собственное значение предельной задачи, $p \geq 1$, а $\mathscr{B}_\delta(\lambda_0)$ — замкнутый круг радиуса δ на комплексной плоскости с центром в точке λ_0. Возьмем δ достаточно малым так, чтобы круг $\mathscr{B}_\delta(\lambda_0)$ не содержал собственных значений предельной задачи, не совпадающих с λ_0. Тогда в силу аналитичности решений задач (2.1), (2.3) по параметру λ и леммы 2.1 имеем сходимость в $H^1(\Omega)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathscr{B}_\delta} u_\varepsilon\, d\lambda \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\mathscr{B}_\delta} u_0\, d\lambda. \tag{2.7}$$

Так как круг $\mathscr{B}_\delta(\lambda_0)$ содержит (простой) полюс функции u_0, правая часть в (2.7) не равна нулю. Следовательно, левая часть (2.7) также не равна нулю, т. е. круг $\mathscr{B}_\delta(\lambda_0)$ содержит (простой) полюс функции u_ε. Отсюда и из произвола в выборе δ выводим сходимость собственных значений возмущенной задачи к собственным значениям предельной задачи.

Докажем теперь сходимость собственных функций. Прямыми вычислениями проверяется, что при $\lambda \in \mathscr{B}_\delta(\lambda_0)$, $\lambda \neq \lambda_0$, $f = \psi_0^k$, $k = q, \dots, q+p-1$, решением задачи (2.3) является функция

$$u_0 = \frac{\psi_0^k}{\lambda_0 - \lambda}.$$

Подставляя последнее равенство в (2.7) и вычисляя правую часть, получаем, что левая часть (2.7), где u_ε — решение задачи (2.1) с $f = \psi_0^k$, и есть требуемая линейная комбинация, сходящаяся в $H^1(\Omega)$ к ψ_0^k.

Докажем, что собственные значения возмущенной задачи λ_ε^k, $k = q, \dots, q+p-1$, сходятся к λ_0. Пусть к λ_0 сходятся собственные значения λ_ε^j, $j \in I_0$. Совокупную кратность всех собственных значений возмущенной задачи, сходящихся к λ_0, обозначим через l, $l = |I_0|$. Показав, что $l = p$, мы, очевидно, докажем требуемую сходимость. Так как собственные функции ψ_0^k, $k = q, \dots, q+p-1$, линейно независимы, соответствующие линейные комбинации функций ψ_ε^j, $j \in I_0$, сходящиеся к ψ_0^k, также линейно независимы. Функции ψ_ε^k линейно независимы, следовательно, по теореме Штейница, число l не может быть меньше p. С другой стороны, допустив, что $l > p$, аналогично доказательству леммы 2.1 нетрудно показать существование последовательности $\varepsilon_k \to 0$, на которой каждая из (линейно независимых) функций ψ_ε^j, $j \in I_0$, сходится к линейным комбинациям функций ψ_0^k, причем эти комбинации также линейно независимы. Следовательно, число p не превосходит l, т. е. $l = p$. Теорема 1.1 полностью доказана.

Для доказательства теоремы 1.2 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.2. *При λ, близких к p-кратному собственному значению $\lambda_0 = \lambda_0^q = \dots = \lambda_0^{q+p-1}$, для решения краевой задачи (2.1) справедливо представление*

$$u_\varepsilon = \sum_{k=q}^{q+p-1} \frac{\psi_\varepsilon^k}{\lambda_\varepsilon^k - \lambda} \int\limits_\Omega \psi_\varepsilon^k f \, dx + \tilde{u}_\varepsilon, \tag{2.8}$$

где $\tilde{u}_\varepsilon$ — голоморфная по λ функция, ортогональная ко всем ψ_ε^k в $L_2(\Omega)$, $k = q, \dots, q+p-1$. Для функции $\tilde{u}_\varepsilon$ справедлива равномерная по ε, η, λ и f оценка

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Как отмечено при доказательстве теоремы 1.1, u_ε — голоморфная по λ функция, имеющая простые полюсы в точках λ_ε^k, вычеты в которых суть соответствующие собственные функции. Следовательно,

$$u_\varepsilon = \sum_{k=q}^{q+p-1} b_k \frac{\psi_\varepsilon^k}{\lambda_\varepsilon^k - \lambda} + \tilde{u}_\varepsilon, \tag{2.10}$$

где $\tilde{u}_\varepsilon$ голоморфна по $\lambda \in \mathscr{B}_\delta(\lambda_0)$. Умножим уравнение в задаче (2.1) на ψ_ε^k и проинтегрируем по частям. Тогда

$$\big(\lambda_\varepsilon^k - \lambda\big)\big(\psi_\varepsilon^k, u_\varepsilon\big) = \big(f, \psi_\varepsilon^k\big).$$

Подставляя в полученные соотношения представление (2.10), выводим:

$$b_k = \int\limits_\Omega \psi_\varepsilon^k f \, dx, \quad \big(\tilde{u}_\varepsilon, \psi_\varepsilon^k\big) = 0,$$

что и доказывает (2.8). Осталось установить справедливость неравенства (2.9). Нетрудно видеть, что $\tilde{u}_\varepsilon$ есть решение задачи (2.1) с правой частью

$$f - \sum_{k=q}^{q+p-1} \psi_\varepsilon^k (f, \psi_\varepsilon^k),$$

голоморфное по $\lambda \in \partial\mathscr{B}_\delta(\lambda_0)$. Поэтому для $\lambda \in \partial\mathscr{B}_\delta(\lambda_0)$ верна равномерная по ε, η, λ и f оценка

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C \left\| f - \sum_{k=q}^{q+p-1} \psi_\varepsilon^k \big(f, \psi_\varepsilon^k\big) \right\|_{L_2(\Omega)} \le C\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

которая в силу принципа максимума для голоморфных функций имеет место и для $\lambda \in \mathscr{B}_\delta(\lambda_0)$. Лемма доказана.

§ 3. Асимптотики собственных значений возмущенной задачи

В настоящем параграфе мы докажем теорему 1.2 об асимптотиках собственных значений возмущенной задачи, а также в ее условиях теорему 3.1 об асимптотиках соответствующих собственных функций.

Доказательство теоремы 1.2. Асимптотики будем строить на основе метода составных разложений [22] и метода многих масштабов [23]. Вначале будет проведено формальное построение асимптотических разложений, а затем будет строго доказано, что формально построенные разложения действительно являются асимптотиками собственных элементов возмущенной задачи. Формальное построение удобно разделить на два случая в зависимости от того, простое или кратное собственное значение задачи (1.5) соответствует предельному собственному значению. В формальном построении мы подробно остановимся на случае простого собственного значения задачи (1.5); случай кратного собственного значения имеет лишь некоторые незначительные отличия, которые ниже будут пояснены отдельно.

Начнем формальное построение. Пусть $\lambda_0 = M^2 + \varkappa^2$, где $\varkappa$ — простое собственное значение задачи (1.5), $\psi_0(x) = \phi_0(x')\cos Mx_3$ — соответствующая собственная функция, $\|\phi_0\|_{L_2(\omega)} = 1$, λ_ε — собственное значение возмущенной задачи, сходящееся к λ_0.

Асимптотику собственного значения λ_ε будем строить в виде

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1(\eta, \varepsilon). \tag{3.1}$$

Асимптотику соответствующей собственной функции мы строим в виде суммы двух разложений: внешнего разложения и пограничного слоя. Внешнее разложение выглядит следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x, \eta) = (\phi_0(x') + \varepsilon\phi_1(x', \eta, \varepsilon))\cos Mx_3, \tag{3.2}$$

а пограничный слой имеет вид

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, x_3, \eta) = \varepsilon v_1^+(\xi, s, \eta, \varepsilon)\cos Mx_3, \tag{3.3}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (\tau\varepsilon^{-1}, x_3\varepsilon^{-1} - \pi/2)$, τ — расстояние от точки до границы $\partial\omega$, измеренное в направлении внутренней нормали. Пограничный слой вводится для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на γ_ε и Γ_ε. Кроме того, при построении пограничного слоя также применяется метод многих масштабов, роль медленного времени здесь играет переменная x_3.

Перейдем к построению асимптотик, т. е. к определению функций λ_1, ϕ_1, v_1^+. Вначале подставим (3.1) и (3.2) в уравнение (1.1) и соберем коэффициенты при первой степени ε. Эта стандартная процедура дает уравнение для функции ϕ_1:

$$(\Delta_{x'} + \varkappa)\phi_1 = -\lambda_1\phi_0, \quad x' \in \omega. \tag{3.4}$$

Краевое условие для функции ϕ_1 будет определено при построении пограничного слоя. Выведем граничные условия для функции v_1^+. В соответствии с методом составных разложений потребуем, чтобы сумма функций ψ_ε^{ex} и ψ_ε^{bl} асимптотически (по ε) удовлетворяла краевым условиям (1.2) на γ_ε и Γ_ε. Из этого требования вытекают граничные условия для функций v_1^+:

$$v_1^+ = -\phi_1^D, \ \xi \in \gamma(\eta g_\varepsilon), \quad \frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_2} = \phi_0^\nu, \ \xi \in \Gamma(\eta g_\varepsilon), \tag{3.5}$$

где $\gamma(a) = \{\xi : \xi_2 = 0, |\xi_1 - \pi j| < a,\ j \in \mathbb{Z}\}$, $\Gamma(a) = O\xi_1 \backslash \overline{\gamma(a)}$,

$$\phi_1^D = \phi_1^D(s,\eta,\varepsilon) = \phi_1(x',\eta,\varepsilon), \quad \phi_0^\nu = \phi_0^\nu(s) = \frac{\partial}{\partial n}\phi_0(x'), \quad x' \in \partial\omega.$$

Для того чтобы вывести уравнения для функций v_1^+, вначале запишем оператор Лапласа в переменных (s,τ,x_3):

$$\Delta_x = \frac{1}{\mathscr{H}}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\mathscr{H}\frac{\partial}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\mathscr{H}}\frac{\partial}{\partial s}\right)\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \mathscr{H} = 1 + \tau K, \tag{3.6}$$

$K = K(s) = (\rho''(s), n(s))_{\mathbb{R}^2}$, $n = n(s)$, $\rho(s)$ — двумерная вектор-функция, задающая кривую $\partial\omega$, $K \in C^\infty(\partial\omega)$. Теперь подставим (3.1), (3.3), (3.6) в (1.1), перейдем к переменным ξ и выпишем коэффициент при наименьшей степени ε. Тогда получим следующее уравнение для функции v_1^+:

$$\Delta_\xi v_1^+ = 0, \quad \xi_2 > 0. \tag{3.7}$$

Согласно методу составных разложений мы должны построить решение задачи (3.5), (3.7), экспоненциально убывающее при $\xi_2 \to +\infty$.

Пусть $\mathscr{V}(a)$ — пространство π-периодических по ξ_1 функций из $C^\infty(\{\xi : \xi_2 > 0\} \backslash \{\xi : \xi \neq (\pm a + \pi j),\ j \in \mathbb{Z}\})$, экспоненциально убывающих при $\xi_2 \to +\infty$ вместе со всеми своими производными равномерно по ξ_1. Обозначим $\Pi = \{\xi : \xi_2 > 0,\ |\xi_1| < \pi/2\}$.

Введем в рассмотрению функцию

$$X(\xi, a) = \operatorname{Re}\ln(\sin z + \sqrt{\sin^2 z - \sin^2 a}) - \xi_2,$$

$z = \xi_1 + i\xi_2$ — комплексная переменная. Прямыми вычислениями проверяем, что $X(\xi,a) \in \mathscr{V}(a) \cap H^1(\Pi)$ — гармоническая функция в полуплоскости $\xi_2 > 0$, четная по ξ_1 и удовлетворяющая следующим граничным условиям:

$$X = \ln\sin a,\ x \in \gamma(a), \quad \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = -1,\ x \in \Gamma(a). \tag{3.8}$$

Следовательно, решение задачи (3.5), (3.7) имеет вид

$$v_1^+(\xi,s,\eta,\varepsilon) = -\phi_0^\nu(s) X(\xi, \eta g_\varepsilon(s)). \tag{3.9}$$

Тогда в силу граничных условий (3.8)

$$v_1^+(\xi,s,\eta,\varepsilon) = -\phi_0^\nu(s)\ln\sin\eta g_\varepsilon(s) \quad \text{на } \gamma(\eta g_\varepsilon(s)).$$

Ввиду (3.5) последнее равенство позволяет получить граничное условие для ϕ_1:

$$\phi_1 = \phi_0^\nu \ln\sin\eta g_\varepsilon, \quad x \in \partial\omega. \tag{3.10}$$

Условие разрешимости краевой задачи (3.4), (3.10) получаем стандартным путем: умножаем обе части уравнения (3.4) на ϕ_0 и интегрируем по частям. Полученное таким образом равенство и нормировка ϕ_0 приводят к формуле (1.8).

Для того чтобы обосновать формально построенные первые члены асимптотик, необходимо построить дополнительные члены в асимптотике для ψ_ε. В пограничном слое следует добавить два слагаемых; в результате пограничный слой принимает вид

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon^{bl}(\xi,s,x_3,\eta) = \big(\varepsilon v_1^+(\xi,s,\eta,\varepsilon) + \varepsilon^2 v_2^+(\xi,s,\eta,\varepsilon)\big)\cos Mx_3 \\ + \varepsilon^2 v_2^-(\xi,s,\eta,\varepsilon)\sin(Mx_3).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Уравнения для функций $v_2^{\pm}$ получаем подстановкой (3.1), (3.6) и (3.11) в (1.1) и выписыванием коэффициентов при одинаковых степенях ε отдельно для $\cos(Mx_3)$ и $\sin(Mx_3)$:

$$\Delta_\xi v_2^+ = -K\frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_2}, \quad \Delta_\xi v_2^- = 2M\frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_1}, \quad \xi_2 > 0. \tag{3.12}$$

Граничные условия для $v_2^{\pm}$ выводим так же, как и (3.5):

$$\frac{\partial v_2^+}{\partial \xi_2} = \phi_1^\nu, \quad \frac{\partial v_2^-}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma(\eta g_\varepsilon), \tag{3.13}$$

где ϕ_1^ν — значение нормальной производной функции ϕ_1 на $\partial\omega$, $\phi_1^\nu = \phi_1^\nu(s,\eta,\varepsilon)$.

Обозначим

$$Y(\xi,a) = \operatorname{Im}\ln(\sin z + \sqrt{\sin^2 z - \sin^2 a}) - \frac{\pi}{2} + \xi_1.$$

Непосредственно проверяется, что $Y \in \mathscr{V}(a) \cap H^1(\Pi)$ — нечетная по ξ_1 гармоническая функция, вместе с X удовлетворяющая условиям Коши — Римана:

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_1} = \frac{\partial Y}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = -\frac{\partial Y}{\partial \xi_1}. \tag{3.14}$$

Решения задач (3.12), (3.13) можно получить в явном виде:

$$\begin{aligned} v_2^+(\xi,s,\eta,\varepsilon) &= \frac{1}{2}K(s)\phi_0^\nu(s)\left(\xi_2 X(\xi,\eta g_\varepsilon(s)) + \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t,\eta g_\varepsilon(s))\,dt\right) \\ &\qquad - \phi_1^\nu(s,\eta,\varepsilon)X((\xi,\eta g_\varepsilon(s)), \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$v_2^-(\xi,s,\eta,\varepsilon) = -K(s)M\phi_0^\nu(s)\left(\xi_2 Y(\xi,\eta g_\varepsilon(s)) + \int\limits_{\xi_2}^{+\infty} Y(\xi_1,t,\eta g_\varepsilon(s))\,dt\right).$$

Ясно, что $v_2^{\pm} \in H^1(\Pi) \cap \mathscr{V}(\eta g_\varepsilon)$.

Далее нам понадобятся следующие вспомогательные леммы.

Из определения множества $\mathscr{V}(a)$, принадлежностей $X, Y \in \mathscr{V}(a)$, четности X и нечетности Y по ξ_1 вытекает

Лемма 3.1. *Верны равенства*

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_1} = 0, \quad Y = 0, \quad \xi_1 = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 3.2. *Пусть функция* $v \in \mathscr{V}(a) \cap L_2(\Pi)$ *для всех* $\xi_2 > 0$ *удовлетворяет равенству* $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} v(\xi)\,d\xi_1 = 0$ *и* $\frac{\partial v}{\partial \xi_1} \in L_2(\Pi)$. *Тогда верна оценка*

$$\|v\|_{L_2(\Pi)} \le \pi \left\| \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \right\|_{L_2(\Pi)}.$$

Доказательство. Для $\xi_2 > 0$ в силу неравенства Пуанкаре имеем

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} v^2\,d\xi_1 \le \frac{\pi^2}{2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi_1}\right)^2 d\xi_1 \le \pi^2 \int\limits_{\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi_1}\right)^2 d\xi_1.$$

Интегрируя теперь полученное неравенство по $\xi_2 \in (0,+\infty)$, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана.

Всюду в следующей лемме посредством C будем обозначать различные неспецифические константы, не зависящие от a.

Лемма 3.3. *При $a \in (0, \pi/2]$ функции X и Y обладают следующими свойствами.*

(1) *Для всех $\xi_2 > 0$ справедливо равенство*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} X(\xi, a)\, d\xi_1 = 0.$$

(2) *Выполнены соотношения*

$$\|X\|_{L_2(\Pi)} = \|Y\|_{L_2(\Pi)} \le C, \quad \|\xi_2 X\|_{L_2(\Pi)} = \|\xi_2 Y\|_{L_2(\Pi)} \le \pi \|X\|_{L_2(\Pi)},$$
$$\|\nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi)} = \sqrt{\pi} |\ln \sin a|^{1/2}, \quad \|\xi_2 \nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi)} = \|\xi_2 \nabla_\xi Y\|_{L_2(\Pi)} = \|X\|_{L_2(\Pi)},$$
$$\left\| \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, a)\, dt \right\|_{L_2(\Pi)} = \left\| \int_{\xi_2}^{+\infty} Y(\xi_1, t, a)\, dt \right\|_{L_2(\Pi)} \le \pi \|X\|_{L_2(\Pi)}.$$

(3) *Для функций $\frac{\partial X}{\partial a}, \frac{\partial Y}{\partial a} \in \mathscr{V}(a) \cap L_2(\Pi)$,*

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, a)\, dt, \quad \frac{\partial}{\partial a} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, a)\, dt \in \mathscr{V}(a) \cap H^1(\Pi)$$

имеют место соотношения

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial a} \right\|_{L_2(\Pi)} = \left\| \frac{\partial Y}{\partial a} \right\|_{L_2(\Pi)} = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{ctg} a |\ln \cos a|^{1/2}}{\sqrt{2}},$$
$$\left\| \xi_2 \frac{\partial X}{\partial a} \right\|_{L_2(\Pi)} = \left\| \xi_2 \frac{\partial Y}{\partial a} \right\|_{L_2(\Pi)} \le \pi \left\| \frac{\partial X}{\partial a} \right\|_{L_2(\Pi)},$$
$$\left\| \frac{\partial}{\partial a} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, a)\, dt \right\|_{L_2(\Pi)} = \left\| \frac{\partial}{\partial a} \int_{\xi_2}^{+\infty} Y(\xi_1, t, a)\, dt \right\|_{L_2(\Pi)} \le \pi \left\| \frac{\partial X}{\partial a} \right\|_{L_2(\Pi)}.$$

Доказательство. Всюду в доказательстве, не оговаривая особо, при различных интегрированиях по частям мы будем пользоваться граничными условиями для X и Y из леммы 3.1.

Утверждение п. (1) легко получить, проинтегрировав по частям в равенствах ($t > 0$):

$$\int_{\Pi \cap \{\xi : \xi_2 > t\}} \Delta_\xi X\, d\xi = 0, \qquad \int_{\Pi \cap \{\xi : \xi_2 > t\}} \xi_2 \Delta_\xi X\, d\xi = 0.$$

Переходим к доказательству пп. (2), (3). Принадлежности

$$\frac{\partial X}{\partial a}, \; \frac{\partial Y}{\partial a}, \; \frac{\partial}{\partial a} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, a)\, dt, \; \frac{\partial}{\partial a} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, a)\, dt \in \mathscr{V}(a) \cap L_2(\Pi)$$

устанавливаются непосредственно с использованием явного вида X и Y. Производные по ξ_1, ξ_2 последних двух функций равны в силу условий Коши — Римана (3.14) функциям $\frac{\partial X}{\partial a}$, $\frac{\partial Y}{\partial a}$, что доказывает принадлежность функций

$\frac{\partial}{\partial a}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t,a)\,dt$, $\frac{\partial}{\partial a}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t,a)\,dt$ пространству $\mathscr{V}(a)\cap H^1(\Pi)$. Существование остальных норм из пп. (2), (3) нетрудно доказать на основе явного вида функций X и Y. Докажем теперь равенство соответствующих норм X и Y из пп. (2), (3). Используя условия Коши — Римана (3.14) и интегрируя по частям, для $\xi_2>0$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial\xi_2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi/2} Y^2\,d\xi_1 = 2\int\limits_{\pi/2}^{\pi/2} Y\frac{\partial Y}{\partial\xi_2}\,d\xi_1 = 2\int\limits_{\pi/2}^{\pi/2} Y\frac{\partial X}{\partial\xi_1}\,d\xi_1$$
$$= -2\int\limits_{\pi/2}^{\pi/2}\frac{\partial Y}{\partial\xi_1}X\,d\xi_1 = 2\int\limits_{\pi/2}^{\pi/2}\frac{\partial X}{\partial\xi_2}X\,d\xi_1 = \frac{\partial}{\partial\xi_2}\int\limits_{\pi/2}^{\pi/2} X^2\,d\xi_1,$$

откуда

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi/2} Y^2\,d\xi_1 = \int\limits_{\pi/2}^{\pi/2} X^2\,d\xi_1, \quad \xi_2>0.$$

Полученное равенство доказывает формулы $\|X\|_{L_2(\Pi)}=\|Y\|_{L_2(\Pi)}$, $\|\xi_2X\|_{L_2(\Pi)}=\|\xi_2Y\|_{L_2(\Pi)}$. Равенства остальных норм для X и Y устанавливаются аналогично.

Переходим к доказательству оценок и остальных равенств из пп. (2), (3). В [13, § 3] показано, что $\|X\|_{L_2(\Pi)}$ — непрерывная по $a\in[0,\pi/2]$ функция, откуда и следует необходимая оценка для этой функции. В [11] доказано, что

$$\int\limits_{\gamma(a)\cap\overline{\Pi}}\frac{\partial X}{\partial\xi_2}\,d\xi_1=\pi-2a, \qquad \int\limits_{\Gamma(a)\cap\overline{\Pi}} X\,d\xi_1 = -2a\ln\sin a. \tag{3.16}$$

Интегрируя по частям в равенстве $\int\limits_{\Pi} X\Delta_\xi X\,d\xi=0$, получаем

$$\int\limits_{\Pi}|\nabla_\xi X|^2\,d\xi = -\ln\sin a\int\limits_{\gamma(a)\cap\overline{\Pi}}\frac{\partial X}{\partial\xi_2}\,d\xi_1+\int\limits_{\Gamma(a)\cap\overline{\Pi}} X\,d\xi_1,$$

откуда и из (3.16) вытекает утверждаемая формула для $\|\nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi)}$. Равенства

$$0=\int\limits_{\Pi}\xi_2^2X\Delta_\xi X\,d\xi = -\int\limits_{\Pi}\xi_2^2|\nabla_\xi X|^2\,d\xi-2\int\limits_{\Pi}\xi_2X\frac{\partial X}{\partial\xi_2}\,d\xi$$
$$= -\|\xi_2\nabla_\xi X\|^2_{L_2(\Pi)}+\|X\|^2_{L_2(\Pi)} \tag{3.17}$$

дают требуемое выражение для $\|\xi_2\nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi)}$. Из леммы 3.2 и п. (1) выводим соотношения

$$\|\xi_2X\|_{L_2(\Pi)}\le\pi\left\|\xi_2\frac{\partial X}{\partial\xi_1}\right\|_{L_2(\Pi)}\le\pi\|\xi_2\nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi)}=\pi\|X\|_{L_2(\Pi)}.$$

На основе уже доказанных равенств и оценок из пп. (2), (1), леммы 3.2 и (3.14), устанавливаем, что

$$\left\|\int\limits_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1,t,a)\,dt\right\|_{L_2(\Pi)}\le\pi\left\|\int\limits_{\xi_2}^{+\infty}\frac{\partial X}{\partial\xi_1}(\xi_1,t,a)\,dt\right\|_{L_2(\Pi)}=\pi\|Y\|_{L_2(\Pi)}=\pi\|X\|_{L_2(\Pi)}.$$

П. (2) доказан. Прямыми вычислениями несложно проверить, что

$$X_1(\xi,a)=-\frac{1}{2}\xi_2\int\limits_{\xi_2}^{+\infty}\frac{\partial X}{\partial a}(\xi_1,t,a)\,dt\in H^1(\Pi)\cap\mathscr{V}(a)$$

— четное по ξ_1 решение задачи

$$\begin{gathered}\Delta_\xi X_1(\xi)=\frac{\partial X}{\partial a},\quad \xi_2>0,\\ X_1=0,\quad \frac{\partial X_1}{\partial\xi_2}=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial X}{\partial a}(\xi_1,t,a)\,dt,\quad \xi_2=0.\end{gathered}\tag{3.18}$$

Так как при $\xi_1\in(a,\pi/2]$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial X}{\partial a}(\xi_1,t,a)\,dt=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial^3}{\partial t^2\partial a}X(\xi_1,t,a)\,dt=0,$$

ввиду четности и π-периодичности X по ξ_1 получаем ($\xi_1\in(a,\pi/2]$)

$$\frac{\partial}{\partial a}\int\limits_0^{+\infty}X(\xi_1,t)\,dt=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\partial X}{\partial a}(\pi/2,t,a)\,dt=\operatorname{ctg}a\ln\cos a.$$

Опираясь теперь на утверждение п. (1) и интегрируя по частям, с учетом последнего равенства и (3.18) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_\Pi\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^2d\xi&=\int\limits_\Pi\left(\frac{\partial X}{\partial a}-\operatorname{ctg}a\right)\frac{\partial X}{\partial a}\,d\xi=\int\limits_\Pi\left(\frac{\partial X}{\partial a}-\operatorname{ctg}a\right)\Delta_\xi\frac{\partial X_1}{\partial a}\,d\xi\\ &=\int\limits_a^{\pi/2}\left(\frac{\partial}{\partial a}X(\xi_1,0,a)-\operatorname{ctg}a\right)\frac{\partial}{\partial a}\int\limits_0^{+\infty}X(\xi_1,\xi_2,a)\,d\xi_2d\xi_1\\ &=\operatorname{ctg}a\ln\cos a\int\limits_a^{\pi/2}\left(\frac{\partial}{\partial a}X(\xi_1,0,a)-\operatorname{ctg}a\right)\,d\xi_1=-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}^2a\ln\cos a.\end{aligned}$$

Аналогично (3.17) доказывается равенство

$$\left\|\xi_2\nabla_\xi\frac{\partial X}{\partial a}\right\|_{L_2(\Pi)}=\left\|\frac{\partial X}{\partial a}\right\|_{L_2(\Pi)},$$

что вместе с вытекающей из (1) и леммы 3.2 оценкой

$$\left\|\frac{\partial X}{\partial a}\right\|_{L_2(\Pi)}\leq\pi\left\|\frac{\partial^2X}{\partial\xi_1\partial a}\right\|_{L_2(\Pi)}\leq\pi\left\|\xi_2\nabla_\xi\frac{\partial X}{\partial a}\right\|_{L_2(\Pi)}$$

приводит ко второй оценке п. (3). Третья оценка этого пункта доказывается на основе (1), леммы 3.2 и условий Коши — Римана (3.14):

$$\left\|\frac{\partial}{\partial a}\int\limits_{\xi_2}^{+\infty}X(\xi_1,t,a)\,dt\right\|_{L_2(\Pi)}\leq\pi\left\|\frac{\partial Y}{\partial a}\right\|_{L_2(\Pi)}=\pi\left\|\frac{\partial X}{\partial a}\right\|_{L_2(\Pi)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть существует $\beta > 0$ такое, что норма Гёльдера $\|g_\varepsilon\|_{C^{2+\beta}(\partial\omega)}$ ограничена по ε. Тогда имеет место равномерная по ε и η оценка*

$$\|\phi_1\|_{C^2(\overline{\omega})} \leq C(|\ln \eta| + 1).$$

Доказательство. Из (1.8) и нормированности ϕ_0 очевидным образом вытекает равномерная по ε и η оценка

$$|\lambda_1| \leq C(|\ln \eta| + 1). \tag{3.19}$$

Следовательно, согласно общей теории эллиптических краевых задач и вложению $H^2(\omega) \subset C(\overline{\omega})$ ввиду ортогональности ϕ_1 и ϕ_0 имеет место неравенство

$$\|\phi_1\|_{C(\overline{\omega})} \leq C\|\phi_0\|_{H^2(\omega)} \leq C\big(|\lambda_1|\|\phi_1\|_{L_2(\omega)} + \big\|\phi_0^\nu \ln \sin \eta g_\varepsilon\big\|_{C^2(\partial\omega)}\big) \leq C(|\ln \eta| + 1).$$

Используя полученную оценку $C(\overline{\omega})$-нормы ϕ_1 и неравенства Шаудера [24, гл. III, § 1, формула (1.11)], выводим, что

$$\|\phi_1\|_{C^{2+\beta}(\overline{\omega})} \leq C\big(|\lambda_1|\|\phi_0\|_{C^\beta(\overline{\omega})} + \|\phi_1\|_{C(\overline{\omega})} + \big\|\phi_0^\nu \ln \sin \eta g_\varepsilon\big\|_{C^{2+\beta}(\overline{\omega})}\big),$$

откуда и из (3.19) вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Пусть $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < 1/4$ и нулю при $t > 3/4$, c_0 — достаточно малое фиксированное положительное число такое, что в области $\{x' : |\tau| < c_0\}$ переменные (s, τ) определены однозначно. Обозначим

$$\tilde{\psi}_\varepsilon^{bl}(x, \eta) = \varepsilon^2\big(v_2^+(\xi, s, \eta, \varepsilon) \cos Mx_3 + v_2^-(\xi, s, \eta, \varepsilon) \sin(Mx_3)\big)\chi(\tau/c_0).$$

Из определения функций $v_2^\pm$ и лемм 3.1, 3.3, 3.4 вытекает

Лемма 3.5. *Функция $\tilde{\psi}_\varepsilon^{bl} \in H^1(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega} \setminus (\bar{\gamma}_\varepsilon \cap \overline{\Gamma}_\varepsilon))$ удовлетворяет граничным условиям*

$$\tilde{\psi}_\varepsilon^{bl} = 0,\ x \in \omega_1, \quad \frac{\partial}{\partial\nu}\tilde{\psi}_\varepsilon^{bl} = 0,\ x \in \omega_2, \quad \frac{\partial}{\partial\nu}\tilde{\psi}_\varepsilon^{bl} = 0,\ x \in \gamma_\varepsilon.$$

В условиях леммы 3.4 справедливы равномерные по ε и η оценки

$$\big\|\tilde{\psi}_\varepsilon^{bl}\big\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{3/2}(|\ln \eta|^{1/2} + 1), \quad \big\|\psi_\varepsilon^{bl}\big\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{1/2}(|\ln \eta|^{1/2} + 1),$$
$$\left\|\chi(\tau/c_0)\frac{\partial\psi_\varepsilon^{bl}}{\partial s}\right\|_{L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{3/2}.$$

Лемма 3.6. *Пусть выполнены условия леммы 3.4. Тогда существует решение $\psi_2 \in H^1(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega} \setminus (\bar{\gamma}_\varepsilon \cap \overline{\Gamma}_\varepsilon))$ краевой задачи*

$$\begin{gathered}(\Delta - 1)\psi_2 = -\varepsilon^2\lambda_1\psi_1 - \frac{\chi(\tau/c_0)}{\mathscr{H}}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\mathscr{H}}\frac{\partial\psi_\varepsilon^{bl}}{\partial s}\right), \quad x \in \Omega,\\ \psi_2 = 0,\ x \in \omega_1, \quad \psi_2 = -\tilde{\psi}_\varepsilon^{bl},\ x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial\nu} = 0,\ x \in \omega_2 \cup \Gamma_\varepsilon.\end{gathered} \tag{3.20}$$

Для этого решения справедлива равномерная по ε и η оценка

$$\|\psi_2\|_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^{3/2}(\varepsilon^{1/2}|\ln \eta|^2 + |\ln \eta|^{1/2} + 1).$$

Доказательство. Решение задачи (3.20), следуя [24], понимаем как решение интегрального уравнения:

$$-(\psi_2, v)_{H^1(\Omega)} = -\varepsilon^2\lambda_1(\psi_1, v)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\chi(\tau/c_0)}{\mathscr{H}}\frac{\partial\psi_\varepsilon^{bl}}{\partial s}, \frac{1}{\mathscr{H}}\frac{\partial v}{\partial s}\right)_{L_2(\Omega)},$$

имеющее на ω_1 след, равный 0, и на γ_ε — след, равный $\tilde{\psi}_\varepsilon^{bl}$, где $v \in H^1(\Omega; \gamma_\varepsilon \cup \omega_1) \equiv \{v : v \in H^1(\Omega), v = 0$ на $\gamma_\varepsilon \cup \omega_1\}$. Правая часть этого интегрального уравнения, очевидно, оценивается сверху величиной

$$C\left(\varepsilon^2|\lambda_1|\|\phi_1\|_{L_2(\omega)} + \left\|\chi(\tau/c_0)\frac{\partial\psi_\varepsilon^{bl}}{\partial s}\right\|_{L_2(\Omega)}\right)\|v\|_{H^1(\Omega)},$$

где константа C не зависит от ε, η, λ_1, ϕ_1, и v. Из данной оценки, следуя методике [24], легко выводятся существование решения (3.20) из $H^1(\Omega)$ и неравенство

$$\|\psi_2\|_{H^1(\Omega)} \le C\left(\varepsilon^2|\lambda_1|\|\phi_1\|_{L_2(\omega)} + \left\|\chi(\tau/c_0)\frac{\partial\psi_\varepsilon^{bl}}{\partial s}\right\|_{L_2(\Omega)}\right).$$

Полученное неравенство с помощью (3.19) и лемм 3.4, 3.5 дает утверждаемую оценку $\|\psi_2\|_{H^1(\Omega)}$. Принадлежность $\psi_2 \in C^\infty(\overline{\Omega}\backslash(\bar{\gamma}_\varepsilon \cap \overline{\Gamma}_\varepsilon))$ устанавливается на основе теорем о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач. Лемма доказана.

Обозначим

$$\hat{\lambda}_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1(\varepsilon,\eta), \quad \hat{\psi}_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon^{ex}(x,\eta) + \chi(\tau/c_0)\psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, x_3, \eta) + \psi_2(x, \eta, \varepsilon).$$

Следующая лемма утверждает, что формально построенные асимптотики собственных элементов — формальное асимптотическое решение возмущенной задачи.

Лемма 3.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.2. *Тогда функции* $\hat{\lambda}_\varepsilon$ *и* $\hat{\psi}_\varepsilon \in H^1(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega}\backslash(\bar{\gamma}_\varepsilon \cap \overline{\Gamma}_\varepsilon))$ *удовлетворяют краевой задаче* (2.1) *с* $u_\varepsilon = \hat{\psi}_\varepsilon$, $\lambda = \hat{\lambda}_\varepsilon$, $f = f_\varepsilon$, *где для* f_ε *верна равномерная по* ε *и* η *оценка*

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \le C\varepsilon^{3/2}(|\ln\eta|^{3/2} + 1).$$

При $\varepsilon \to 0$ *справедливы равенства* $\hat{\lambda}_\varepsilon = \lambda_0 + o(1)$, $\|\hat{\psi}_\varepsilon - \psi_0\|_{H^1(\Omega)} = o(1)$.

Доказательство. Сходимость $\hat{\lambda}_\varepsilon$ к λ_0 вытекает из оценки (3.19), а равенство $\|\hat{\psi}_\varepsilon - \psi_0\|_{H^1(\Omega)} = o(1)$ — из лемм 3.4–3.6. Граничные условия для $\hat{\psi}_\varepsilon$ следуют из (3.5), (3.8), (3.10), (3.11), (3.13) и лемм 3.1, 3.6. В силу (1.5), (3.4), (3.6) и (3.20) функция $f_\varepsilon = -(\Delta + \hat{\lambda}_\varepsilon)\hat{\psi}_\varepsilon$ имеет следующий вид:

$$f_\varepsilon = -\sum_{i=1}^{3} f_\varepsilon^{(i)}, \quad f_\varepsilon^{(1)} = (\hat{\lambda}_\varepsilon + 1)\hat{\psi}_\varepsilon,$$
$$f_\varepsilon^{(2)} = \chi(\tau/c_0)\left(\frac{1}{\mathscr{H}}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\mathscr{H}\frac{\partial}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \hat{\lambda}_\varepsilon\right)\psi_\varepsilon^{bl},$$
$$f_\varepsilon^{(3)} = 2\big(\nabla\chi(\tau/c_0), \nabla\psi_\varepsilon^{bl}\big)_{\mathbb{R}^3} + \psi_\varepsilon^{bl}\Delta\chi(\tau/c_0).$$

Из леммы 3.6 и (1.3), (3.19) выводим, что

$$\big\|f_\varepsilon^{(1)}\big\|_{L_2(\Omega)} \le C\varepsilon^{3/2}(|\ln\eta|^{3/2} + 1),$$

где C не зависит от ε и η. Используя леммы 3.3, 3.4, равенство (1.3), уравнения (3.7), (3.12), формулы (3.9), (3.15), условия Коши — Римана (3.14) и оценку $\varepsilon\xi_2 < c_0$ на области $\{x' : \tau < c_0\}$, получаем, что

$$\big\|f_\varepsilon^{(2)}\big\|_{L_2(\Omega)} \le C\varepsilon^{3/2}(|\ln\eta|^{1/2}+1),$$

где C не зависит от ε и η. Из принадлежностей $X, Y \in \mathscr{V}(a)$, определения χ и явного вида X и Y вытекает, что

$$\big\|f_\varepsilon^{(3)}\big\|_{L_2(\Omega)} \le C\mathrm{e}^{-1/\varepsilon^b},$$

где $b > 0$ — некоторое фиксированное число, C не зависит от ε и η. Собирая вместе полученные неравенства для $f_\varepsilon^{(i)}$, приходим к утверждаемой оценке для f_ε. Лемма доказана.

В случае кратного собственного значения $\varkappa$ формальное построение практически ничем не отличается от приведенного выше. Здесь одновременно строятся асимптотики нескольких собственных значений и собственных функций возмущенной задачи. Условие дополнительной ортогональности в $L_2(\partial\omega)$ собственных функций задачи (1.5), соответствующих кратному собственному значению, описанное в § 1, является условием разрешимости задачи (3.4), (3.10). Все остальные рассуждения приведенного выше построения не требуют никаких изменений и не зависят от кратности $\varkappa$. Таким образом, в случае p-кратного собственного значения $\varkappa = \varkappa_q = \dots = \varkappa_{q+p-1}$ в результате построения имеем $2p$ функций $\hat\lambda_\varepsilon^k$ и $\hat\psi_\varepsilon^k$, соответствующих $\varkappa_k$, ϕ_0^k и определяемых так же, как и $\hat\lambda_\varepsilon$ и $\hat\psi_\varepsilon$. Функции $\hat\lambda_\varepsilon^k$ и $\hat\psi_\varepsilon^k$ удовлетворяют лемме 3.7, соответствующую им функцию f_ε из этой леммы обозначим через f_ε^k.

Переходим к обоснованию асимптотик. Пусть $\lambda_0 = \lambda_0^q = \dots = \lambda_0^{q+p-1}$ — p-кратное предельное собственное значение, $p \ge 1$. В силу лемм 2.2 и 3.7 для функций $\hat\psi_\varepsilon^k$ верны представления ($k = q, \dots, q+p-1$)

$$\hat\psi_\varepsilon^k = \sum_{i=q}^{q+p-1} b_{ki}^\varepsilon \psi_\varepsilon^i + \tilde u_\varepsilon^k, \tag{3.21}$$

$$b_{ki}^\varepsilon = \frac{1}{\lambda_\varepsilon^i - \hat\lambda_\varepsilon^k}\int\limits_\Omega \psi_\varepsilon^i f_\varepsilon^k\,dx, \tag{3.22}$$

где функция $\tilde u_\varepsilon^k$ ортогональна в $L_2(\Omega)$ собственным функциям ψ_ε^i, $i = q, \dots, q+p-1$, и удовлетворяет равномерной по ε и η оценке:

$$\big\|\tilde u_\varepsilon^k\big\|_{H^1(\Omega)} \le C\varepsilon^{3/2}(|\ln\eta|^{3/2}+1). \tag{3.23}$$

Умножим теперь представление (3.21) на ψ_ε^i скалярно в $L_2(\Omega)$ и учтем ортонормированность ψ_ε^k и ортогональность ψ_ε^i и $\tilde u_\varepsilon^k$, тогда получим

$$b_{ki}^\varepsilon = \big(\hat\psi_\varepsilon^k, \psi_\varepsilon^i\big)_{L_2(\Omega)}. \tag{3.24}$$

Докажем теперь справедливость асимптотик (1.7), доказательство проведем от противного. Допустим, что на какой-то последовательности $\varepsilon_j \to 0$ некоторые из собственных значений λ_ε^k, $k = q, \dots, q+p-1$, не удовлетворяют асимптотикам (1.7), т. е. выполнены равенства

$$\big|\lambda_\varepsilon^i - \hat\lambda_\varepsilon^k\big| \ge j\big(\varepsilon_j^{3/2}(|\ln\eta(\varepsilon_j)|^{3/2}+1)\big), \quad i \in I_0,\ k = q, \dots, q+p-1,$$

где $I_0 \subseteq \{q,\dots,q+p-1\}$ — подмножество индексов собственных значений возмущенной задачи, не удовлетворяющих утверждаемым асимптотикам. Из данных оценок, (3.22) и оценки для f^k_ε из леммы 3.7 выводим

$$\left|b^{\varepsilon_j}_{ki}\right| \le C/j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad i \in I_0,\ k = q,\dots,q+p-1.$$

Из (3.24) и леммы 3.7 следует ограниченность величин b^ε_{ki}, поэтому, выделяя при необходимости из ε_j подпоследовательность, считаем, что $b^{\varepsilon_j}_{ki} \to b^0_{ki}$ при $j\to\infty$, $k,i = q,\dots,q+p-1$, причем, как уже установлено, $b^0_{ki}=0$, $k=q,\dots,q+p-1$, $i\in I_0$. Из чисел b^ε_{ki} составим p векторов b^ε_k по следующему правилу: вектор b^ε_k состоит из чисел b^ε_{ki}, где индекс i последовательно принимает значения из множества $\{q,\dots,q+p-1\}\backslash I_0$. Аналогичным образом составим векторы b^0_k. Ясно, что размерности этих векторов равны $(p-|I_0|)<p$ и имеет место сходимость $b^{\varepsilon_j}_k \to b^0_k$. Принимая во внимание эту сходимость, умножим скалярно в $L_2(\Omega)$ представления (3.21) друг на друга и учтем ортонормированность ψ^k_ε и ψ^k_0, а также лемму 3.7 и оценку (3.23). Тогда

$$\left(b^0_k, b^0_i\right)_{\mathbb{R}^{p-|I_0|}} = \lim_{j\to\infty}\left(b^{\varepsilon_j}_k, b^{\varepsilon_j}_i\right)_{\mathbb{R}^{p-|I_0|}} = \delta_{ki},$$

где δ_{ki} — символ Кронекера — Капелли. Следовательно, p векторов b^0_k размерности $(p-|I_0|)<p$ образуют ортонормированную систему, что невозможно. Теорема 1.2 полностью доказана.

Выясним теперь асимптотическое поведение собственных функций возмущенной задачи в условиях теоремы 1.2. Пусть $\lambda_0 = \lambda^k_0$ — простое предельное собственное значение. Из (3.24) и лемм 3.5, 3.6 следует, что

$$b^\varepsilon_{kk} = \left(\psi^k_0 + \varepsilon\phi^k_1 \cos Mx_3, \psi^k_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)} + O(\varepsilon^{3/2}(|\ln\eta|^{3/2}+1)).$$

Значит, в силу (3.21), (3.23) и лемм 3.5, 3.6 собственная функция возмущенной задачи

$$\tilde\psi^k_\varepsilon = \left(\psi^k_0 + \varepsilon\phi^k_1\cos Mx_3, \psi^k_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)}\psi^k_\varepsilon, \tag{3.25}$$

соответствующая λ^k_ε, имеет асимптотику в $H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\tilde\psi^k_\varepsilon(x) = \psi^k_0(x) &+ \varepsilon\phi^k_1(x',\eta,\varepsilon)\cos Mx_3\\ &+ \varepsilon\chi(\tau/c_0)\psi^{k,\nu}_0(s)X(\xi,\eta g_\varepsilon(s)) + O(\varepsilon^{3/2}(|\ln\eta|^{3/2}+1)),\end{aligned} \tag{3.26}$$

где $\phi^{k,\nu}_0$ — значение нормальной производной функции ϕ^k_0 на границе $\partial\omega$. Из полученной асимптотики и лемм 3.4–3.6 вытекает, что $\|\tilde\psi^k_\varepsilon - \psi^k_0\|_{H^1(\Omega)} = o(1)$.

Пусть теперь $\lambda_0 = \lambda^q_0 = \dots = \lambda^{q+p-1}_0$ — p-кратное предельное собственное значение. Ввиду (3.24) и лемм 3.5, 3.6, как и ранее, выводим, что

$$b^\varepsilon_{ki} = \left(\psi^k_0 + \varepsilon\phi^k_1\cos Mx_3, \psi^i_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)} + O(\varepsilon^{3/2}(|\ln\eta|^{3/2}+1)).$$

Отсюда и из (3.21), (3.23) и лемм 3.5, 3.6 следует, что линейная комбинация собственных функций возмущенной задачи

$$\tilde\psi^k_\varepsilon = \sum_{i=q}^{q+p-1}\left(\psi^k_0 + \varepsilon\phi^k_1\cos Mx_3, \psi^i_\varepsilon\right)_{L_2(\Omega)}\psi^i_\varepsilon \tag{3.27}$$

имеет в $H^1(\Omega)$ асимптотику (3.26), где под $\tilde\psi^k_\varepsilon$ понимается функция из (3.27). Отсюда, в частности, следует, что функция $\tilde\psi^k_\varepsilon$ из (3.27) удовлетворяет равенству $\left\|\tilde\psi^k_\varepsilon - \psi^k_0\right\|_{H^1(\Omega)} = o(1)$. Таким образом, доказана

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.2. *Тогда для каждой собственной функции* ψ_0^k *предельной задачи существуют собственная функция возмущенной задачи* $\tilde{\psi}_\varepsilon^k$ *из* (3.25) *в случае простого собственного значения* λ_0^k *и линейная комбинация собственных функций* ψ_ε^i, $i = q, \ldots, q+p-1$, *возмущенной задачи* $\tilde{\psi}_\varepsilon^k$ *из* (3.27) *в случае кратного* p*-предельного собственного значения* $\lambda_0 = \lambda_0^q = \cdots = \lambda_0^{q+p-1}$, *удовлетворяющая равенству* $\left\|\tilde{\psi}_\varepsilon^k - \psi_0^k\right\|_{H^1(\Omega)} = o(1)$ *и имеющая в норме* $H^1(\Omega)$ *асимптотику* (3.26).

§ 4. Доказательства теорем 1.3, 1.4

Доказательство теоремы 1.3. Всюду в доказательстве, если не оговорено особо, придерживаемся обозначений предыдущего параграфа. Так как λ_0^k — двукратное собственное значение, в результате упорядочивания (1.6) в последовательности $\left\{\lambda_0^j\right\}_{j=1}^\infty$ оно встречается два раза; будем считать, что $\lambda_0^k = \lambda_0^{k+1}$. Тогда $\varkappa \equiv \varkappa_k = \varkappa_{k+1}$, $M_k = M_{k+1}$. Соответствующие собственные функции предельной задачи с учетом всех описанных в § 1 нормировок и ортогонализаций имеют вид

$$\phi_0^k(x') = \frac{2}{\pi(\mathscr{J}_m'(\sqrt{\varkappa}))^2}\,\mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}r)\cos(m\theta+\alpha_\varepsilon),$$
$$\phi_0^{k+1}(x') = \frac{2}{\pi(\mathscr{J}_m'(\sqrt{\varkappa}))^2}\,\mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}r)\sin(m\theta+\alpha_\varepsilon),$$
$$\psi_0^k(x) = \phi_0^k(x')\cos Mx_3, \quad \psi_0^{k+1}(x) = \phi_0^{k+1}(x')\cos Mx_3.$$

Уравнение (1.9) на α_ε, как легко проверить, имеет решение и является в точности условием ортогональности нормальных производных функций ϕ_0^k и ϕ_0^{k+1} в $L_2(\partial\omega)$ с весом $(-\ln\sin\eta g_\varepsilon)$. Первые члены асимптотик собственных значений λ_ε^k и $\lambda_\varepsilon^{k+1}$ согласно теореме 1.2 выглядят так:

$$\lambda_1^k(\eta,\varepsilon) = \frac{2\varkappa}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2(m\theta+\alpha_\varepsilon)\ln\sin\eta g_\varepsilon(\theta)\,d\theta,$$
$$\lambda_1^{k+1}(\eta,\varepsilon) = \frac{2\varkappa}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2(m\theta+\alpha_\varepsilon)\ln\sin\eta g_\varepsilon(\theta)\,d\theta.$$

Данные величины равны, что легко проверить, сделав замену $t = \theta - \pi/(2m)$ в одной из этих формул и использовав затем $\pi/(2m)$-периодичность g_ε. Докажем теперь, что $\lambda_\varepsilon^k = \lambda_\varepsilon^{k+1}$. Пусть это неверно, тогда λ_ε^k, $\lambda_\varepsilon^{k+1}$ — простые собственные значения. Согласно теореме 3.1 для функций ψ_0^k, ψ_0^{k+1} существуют линейные комбинации собственных функций ψ_ε^k, ψ_ε^{k+1}, сходящиеся к ψ_0^k, ψ_0^{k+1} в $H^1(\Omega)$:

$$\mathrm{c}_1^\varepsilon\psi_\varepsilon^k + \mathrm{c}_2^\varepsilon\psi_\varepsilon^{k+1} \to \psi_0^k, \quad \mathrm{c}_3^\varepsilon\psi_\varepsilon^k + \mathrm{c}_4^\varepsilon\psi_\varepsilon^{k+1} \to \psi_0^{k+1}. \tag{4.1}$$

Из условий теоремы следует, что $\psi_\varepsilon^k(r,\theta+\pi/(2m),x_3)$ и $\psi_\varepsilon^{k+1}(r,\theta+\pi/(2m),x_3)$ — собственные функции возмущенной задачи, соответствующие λ_ε^k и $\lambda_\varepsilon^{k+1}$, и тем самым

$$\psi_\varepsilon^k(r,\theta+\pi/(2m),x_3) = \mathrm{c}_5^\varepsilon\psi_\varepsilon^k(r,\theta,x_3), \quad \psi_\varepsilon^{k+1}(r,\theta+\pi/(2m),x_3) = \mathrm{c}_6^\varepsilon\psi_\varepsilon^{k+1}(r,\theta,x_3).$$

Из полученных равенств и (4.1) вытекает, что

$$\mathrm{c}_1^\varepsilon\mathrm{c}_5^\varepsilon\psi_\varepsilon^k + \mathrm{c}_2^\varepsilon\mathrm{c}_6^\varepsilon\psi_\varepsilon^{k+1} \to -\psi_0^{k+1}, \quad \mathrm{c}_3^\varepsilon\mathrm{c}_1^\varepsilon\psi_\varepsilon^k + \mathrm{c}_4^\varepsilon\mathrm{c}_6^\varepsilon\psi_\varepsilon^{k+1} \to \psi_0^k. \tag{4.2}$$

Умножим теперь в $L_2(\Omega)$ первую сходимость из (4.1) на вторую из (4.2) и вторую из (4.1) на первую из (4.2). Тогда

$$\mathrm{c}_1^\varepsilon \mathrm{c}_3^\varepsilon \mathrm{c}_5^\varepsilon + \mathrm{c}_2^\varepsilon \mathrm{c}_4^\varepsilon \mathrm{c}_6^\varepsilon \to H/2, \quad \mathrm{c}_1^\varepsilon \mathrm{c}_3^\varepsilon \mathrm{c}_5^\varepsilon + \mathrm{c}_2^\varepsilon \mathrm{c}_4^\varepsilon \mathrm{c}_6^\varepsilon \to -H/2;$$

противоречие, т. е. $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^k = \lambda_\varepsilon^{k+1}$ — двукратное собственное значение. Асимптотики соответствующих собственных функций легко получить из теоремы 3.1, при этом линейные комбинации, сходящиеся к ψ_0^k и ψ_0^{k+1}, в силу двукратности λ_ε будут соответствующими собственными функциями. Асимптотики из теоремы 3.1 в главном члене зависят от ε, что связано с дополнительной ортогонализацией в $L_2(\partial\omega)$. Вместе с тем от этой зависимости легко избавиться, взяв подходящие линейные комбинации функций $\tilde\psi_\varepsilon^k$ и $\tilde\psi_\varepsilon^{k+1}$ из теоремы 3.1 так, чтобы в главном члене появились $\mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}r)\cos m\theta$ и $\mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}r)\sin m\theta$. В результате таких несложных вычислений заключаем, что собственные функции, соответствующие λ_ε, можно выбрать сходящимися к $\mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}r)\cos m\theta\cos Mx_3$ и $\mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}r)\sin m\theta\cos Mx_3$ в $H^1(\Omega)$ и эти собственные функции в $H^1(\Omega)$-норме имеют асимптотики

$$\begin{aligned}\tilde\psi_\varepsilon^k(x) = \cos Mx_3\big(&\mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}r)\cos m\theta + \varepsilon\tilde\psi_1^k(x',\eta,\varepsilon)\\ &+ \varepsilon\chi(\tau/c_0)\sqrt{\varkappa}\mathscr{J}_m'(\sqrt{\varkappa})X(\xi,\eta g_\varepsilon(s))\cos m\theta\big) + O(\varepsilon^{3/2}(|\ln\eta|^{3/2}+1)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde\psi_\varepsilon^{k+1}(x) = \cos Mx_3\big(&\mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}r)\sin m\theta + \varepsilon\tilde\psi_1^{k+1}(x',\eta,\varepsilon)\\ &+ \varepsilon\sqrt{\varkappa}\mathscr{J}_m'(\sqrt{\varkappa})\chi(\tau/c_0)X(\xi,\eta g_\varepsilon(s))\sin m\theta\big) + O(\varepsilon^{3/2}(|\ln\eta|^{3/2}+1)), \quad (4.3)\end{aligned}$$

где $\tilde\phi_\varepsilon^k$ и $\tilde\phi_\varepsilon^{k+1}$ — решения задачи (3.4), (3.10) с $\lambda_1 = \lambda_1^k = \lambda_1^{k+1}$, $\phi_0(x') = \mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}r)\cos m\theta$ и $\phi_0(x') = \mathscr{J}_m(\sqrt{\varkappa}r)\sin m\theta$ соответственно. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.4. Обозначим

$$\gamma_{\varepsilon,*} = \{x : x' \in \partial\omega,\ |x_3 - \varepsilon\pi(j+1/2)| < \varepsilon c\eta,\ j = 0,\dots,N-1\},$$

$\lambda_{\varepsilon,*}^k$ — собственные значения задачи (1.1), (1.2) с γ_ε и Γ_ε, замененными соответственно на $\gamma_{\varepsilon,*}$ и $\Sigma\backslash\bar\gamma_{\varepsilon,*}$. Для множества $\gamma_{\varepsilon,*}$ выполнены условия теоремы 1.2 с функцией $g_\varepsilon \equiv 1$, а потому для $\lambda_{\varepsilon,*}^k$ верны асимптотики (1.7). Из определения γ_ε следует, что $\gamma_{\varepsilon,*} \subseteq \gamma_\varepsilon$; ясно также, что $\gamma_\varepsilon \subseteq \Sigma$. Используя данные вложения и минимаксное свойство собственных значений эллиптических задач, нетрудно показать, что

$$\lambda_{\varepsilon,*}^k \le \lambda_\varepsilon^k \le \lambda_0^k.$$

Отсюда и из асимптотик (1.7) для $\lambda_{\varepsilon,*}^k$ и неравенств (3.19) вытекают утверждаемые оценки скорости сходимости. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность Гадыльшину Р. Р. за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Damlamian A., Li Ta-Tsien (Li Daqian).* Boundary homogenization for elliptic problems // J. Math. Pure Appl. 1987. V. 66, N 4. P. 351–361.

2. *Чечкин Г. А.* О краевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка с осциллирующими граничными условиями // Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. С. 95–104.

3. *Lobo M., Pèrez E.* Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions // Math. Modelling Numerical Anal. 1988. V. 22, N 4. P. 609–624.

4. *Lobo M., Pérez E.* Boundary homogenization of certain elliptic problems for cylindrical bodies // Bull. Soc. Math. Ser. 2. 1992. V. 116. P. 399–426.
5. *Чечкин Г. А.* Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Мат. сб. 1993. Т. 79, № 6. С. 99–150.
6. *Беляев А. Ю., Чечкин Г. А.* Усреднение операторов с мелкомасштабной структурой // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 4. С. 496–510.
7. *Гадыльшин Р. Р., Чечкин Г. А.* Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 271–287.
8. *Dávila J.* A nonlinear elliptic equation with rapidly oscillating boundary conditions // Asymptotic Anal. 2001. V. 28, N 3–4. P. 279–307.
9. *Олейник О. А., Чечкин Г. А.* О краевых задачах для эллиптических уравнений с быстро меняющимся типом граничных условий // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 6. С. 163–165.
10. *Chechkin G. A., Doronina E. I.* On asymptotics of spectrum of boundary value problem with nonperiodic rapidly alternating boundary conditions // Functional Differential Equations. 2001. V. 8, N 1–2. P. 111–122.
11. *Гадыльшин Р. Р.* Об асимптотике собственных значений для периодически закрепленной мембраны // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10, № 1. С. 3–19.
12. *Гадыльшин Р. Р.* Асимптотики собственных значений краевой задачи с быстро осциллирующими граничными условиями // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 4. С. 540–551.
13. *Борисов Д. И.* О двупараметрической асимптотике в одной краевой задаче для Лапласиана // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 4. С. 520–534.
14. *Борисов Д. И., Гадыльшин Р. Р.* О спектре Лапласиана с часто меняющимся типом граничных условий // Теор. и мат. физика. 1999. Т. 118, № 3. С. 347–353.
15. *Гадыльшин Р. Р.* Осреднение и асимптотики в задаче о часто закрепленной мембране // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 12. С. 1857–1869.
16. *Борисов Д. И.* О лапласиане с часто и непериодически чередующимися граничными условиями // Докл. РАН. 2002. Т. 383, № 4. С. 443–445.
17. *Чечкин Г. А.* Асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1996. Т. 19. С. 323–337.
18. *Борисов Д. И.* О сингулярно возмущенной краевой задаче для лапласиана в цилиндре // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 8. С. 1071–1078.
19. *Борисов Д. И.* О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 7. С. 37–68.
20. *Borisov D.I.* The asymptotics for the eigenelements of the Laplacian in a cylinder with frequently alternating boundary conditions // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér IIb. 2001. V. 329, N 10. P. 717–721.
21. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. Ч. 1.
22. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
23. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
24. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 2 сентября 2002 г.

Борисов Денис Иванович
Башкирский гос. педагогический университет, кафедра математического анализа, ул. Октябрьской рев., 3а, Уфа 450000
BorisovDI@ic.bashedu.ru, BorisovDI@bspu.ru; http://borisovdi.narod.ru