Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2001. Том 42, № 1

УДК 517.91

О L^2_w–РЕШЕНИЯХ ОБЩИХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Собхи Эль-Сайед, Н. Фариед, Г. М. Аттиа

Аннотация: Рассматриваются $L^2_w(a,b)$-решения несимметричных дифференциальных уравнений второго порядка $M[y]=\lambda wy$ и их формально сопряженных $M^+[g]=\bar{\lambda}wg$ ($\lambda\in\mathbb{C}$) при достаточных условиях на комплекснозначные коэффициенты в $M[\cdot]$. Библиогр. 11.

1. Введение. В [1] Амос доказал, что все решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $M[y]=\lambda wy$ ($\lambda\in\mathbb{C}$) лежат в $L^2_w(a,\infty)$, когда M — симметричное обыкновенное дифференциальное выражение второго порядка вида $M[f]=-(pf')'+qf$ на $[a,\infty)$ ($'\equiv\frac{d}{dx}$) при достаточных условиях на коэффициенты p, q. Случай, когда не все решения расположены в $L^2_w(a,\infty)$, рассмотрен Аткинсоном и Эвансом в [2, теорема 1]. Здесь мы рассмотрим $L^2_w(a,\infty)$-решения общих несимметричных дифференциальных уравнений второго порядка $M[f]=\lambda wf$ и $M^+[g]=\bar{\lambda}wg$, где $M[\cdot]$ для подходящей комплекснозначной функции f определяется равенством

$$M[f]=-(p(f'-rf))'+up(f'-rf)+qf \quad \text{на } [a,b) \tag{1.1}$$

и его формально сопряженным является

$$M^+[g]=-(p(g'+uf))'+rp(g'+uf)+qg \quad \text{на } [a,b). \tag{1.2}$$

Коэффициенты p, r, u, q суть комплекснозначные функции, измеримые по Лебегу на промежутке $[a,b)$, $-\infty<a<b\le\infty$, числовой прямой и удовлетворяющие следующим условиям:

$$p(x)\neq 0 \text{ для п. в. } x\in[a,b), \quad \frac{1}{p}, r, u, q\in L_{\text{loc}}(a,b), \tag{1.3}$$

где $L_{\text{loc}}(a,b)$ — пространство всех комплекснозначных функций, интегрируемых на каждом компактном подынтервале в $[a,b)$.

В данной работе мы распространяем результаты из [1, 2] на случай общего несимметричного дифференциального выражения второго порядка M при достаточных условиях на комплекснозначные коэффициенты выражения M.

2. Предварительные сведения. Символы L_{loc} и AC_{loc} соответствуют интегрируемости по Лебегу и абсолютной непрерывности, знак loc показывает «локальность» и сужает свойства на компактные подынтервалы в $\mathbb{R}$, $\bar{z}$ обозначает комплексно сопряженное к $z\in\mathbb{C}$.

Пусть w — весовая функция такая, что

$$w : [a,b) \to \mathbb{R}, \quad w(x) > 0 \quad (\text{для п. в. } x \in [a,b)). \tag{2.1}$$

Уравнение

$$M[y] = \lambda w y \quad \text{на } [a,b) \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{2.2}$$

называется *регулярным* в левом конце a, если

$$a > -\infty, \quad r, u, q, w \in L_{\mathrm{loc}}[a,b), \tag{2.3}$$

иначе оно называется *сингулярным* в a. Аналогичные определения даются для точки b. Если $M[\cdot]$ регулярно в a и b, будем говорить, что $M[\cdot]$ регулярно *на промежутке* $[a,b]$, см. [3–6].

Мы будем рассматривать случай, когда точка a регулярна для уравнения (2.2), а точка b сингулярна. Точка a регулярна для (2.2) тогда и только тогда, когда она регулярна для уравнения

$$M^+[g] = \bar{\lambda} w g \quad \text{на } [a,b) \quad (\lambda \in \mathbb{C}). \tag{2.4}$$

Пусть $H = L^2_w[a,b)$ — гильбертово пространство классов эквивалентности измеримых по Лебегу функций с нормой $\|f\|_w := \int\limits_a^b w|f|^2 < \infty$ и скалярным произведением, определяемым формулой

$$(f,g)_w := \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx. \tag{2.5}$$

Области определения и значений линейного оператора T, действующего в гильбертовом пространстве H, и его ядро будут обозначаться через $D(T)$, $R(T)$ и $N(T)$ соответственно. Размерность ядра оператора T будем обозначать через $\mathrm{nul}(T)$, его дефект, т. е. коразмерность $R(T)$, — через $\mathrm{def}(T)$. Таким образом, если T плотно определен и $R(T)$ замкнуто, то $\mathrm{def}(T) = \mathrm{nul}(T^*)$. Область Фредгольма оператора T является (в обозначениях из [3]) открытым подмножеством $\triangle_3(T)$ таким, что $\lambda \in \triangle_3(T)$, тогда и только тогда, когда $(T - \lambda I)$ имеет замкнутый образ и конечные размерность ядра и дефект. Индекс $(T - \lambda I)$ — это число $\mathrm{ind}(T - \lambda I) = \mathrm{nul}(T - \lambda I) - \mathrm{def}(T - \lambda I)$, определенное для $\lambda \in \triangle_3(T)$.

Область регулярности $\Pi(A)$ оператора A есть множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых существует положительная константа $K(\lambda)$ такая, что $\|(A - \lambda I)x\| \geq K(\lambda)\|x\|$ для каждого $x \in D(A)$. Согласно теореме о замкнутом графике это равносильно тому, что $\mathrm{nul}(T - \lambda I) = 0$ и $R(T - \lambda I)$ замкнуто.

Совместная область регулярности $\Pi(A,B)$ операторов A и B — это множество $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что $\lambda \in \Pi(A)$, $\bar{\lambda} \in \Pi(B)$ и одновременно $\mathrm{def}(A - \lambda I)$ и $\mathrm{def}(B - \bar{\lambda} I)$ конечны. Сопряженная пара A и B называется *совместной*, если $\Pi(A,B) \neq \varnothing$.

Для общего дифференциального выражения M, рассматриваемого здесь, минимальный оператор уже не является симметричным. Однако минимальные операторы $T_0(M)$ и $T_0(M^+)$, порожденные M и M^+ соответственно, принимают вид сопряженной пары в том смысле, что $T_0(M) \subset [T_0(M^+)]^*$ и $T_0(M^+) \subset [T_0(M)]^*$ или, что равносильно, $(T_0(M)f, g) = (f, T_0(M^+)g)$ для $f \in D_0(M)$ и $g \in D_0(M^+)$, где $(\cdot,\cdot)_{L^2_w(a,b)}$ — скалярное произведение в $L^2_w\{a,b)$, определенное в (2.5), и $D_0(M)$, $D_0(M^+)$ — области определения $T_0(M)$ и $T_0(M^+)$ соответственно, см. ниже (2.6). Положим

$$D(M) := \bigl\{f \in L^2_w(a,b), f^{[s-1]} \in AC_{\mathrm{loc}}[a,b),\ s=1,2,\ \text{и } w^{-1}M[f] \in L^2_w(a,b)\bigr\},$$

$$D(M^+) := \bigl\{g \in L^2_w(a,b), g^{[s-1]} \in AC_{\mathrm{loc}}[a,b),\ s=1,2,\ \text{и } w^{-1}M^+[g] \in L^2_w(a,b)\bigr\},$$

где $f^{[s-1]}$, $g^{[s-1]}$ — квазипроизводные, определенные равенствами $f^{[0]} := f$, $f^{[1]} := p(f' - rf)$; $g^{[0]} := g$, $g^{[1]}_+ := p(g' + ug)$, и $AC_{\mathrm{loc}}[a,b)$ — множество функций, абсолютно непрерывных на каждом компактном подынтервале в $[a,b)$.

Подпространства $D(M)$ и $D(M^+)$ в $L^2_w(a,b)$ суть области определения так называемых максимальных операторов $T(M)$ и $T(M^+)$ соответственно, определенных соотношениями $T(M)f := w^{-1}M[f]$ $(f \in D(M))$ и $T(M^+)g := w^{-1}M^+[g]$ $(g \in D(M^+))$.

Для регулярной задачи минимальные операторы $T_0(M)$ и $T_0(M^+)$ — сужения $w^{-1}M[f]$ и $w^{-1}M^+[g]$ на подпространства

$$\begin{gathered} D_0(M) := \{f : f \in D(M),\ f^{[s-1]}(a) = f^{[s-1]}(b) = 0 \quad \text{для } s = 1,2\}, \\ D_0(M^+) := \bigl\{g : g \in D(M^+),\ g^{[s-1]}_+(a) = g^{[s-1]}_+(b) = 0 \quad \text{для } s = 1,2\bigr\} \end{gathered} \tag{2.6}$$

соответственно. Подпространства $D_0(M)$ и $D_0(M^+)$ плотны в $L^2_w(a,b)$, и $T_0(M)$ и $T_0(M^+)$ — замкнутые операторы (см. [3, теорема 3.10.5; 4, теорема 10]).

В сингулярной задаче введем сначала операторы $T'_0(M)$ и $T'_0(M^+)$; оператор $T'_0(M)$ является сужением $w^{-1}M[\cdot]$ на подпространство $D'_0(M) := \{f : f \in D(M), \operatorname{supp} f \subset (a,b)\}$, и аналогично определяется $T'_0(M^+_p)$. Эти операторы плотно определены и замыкаемы в $L^2_w(a,b)$, и мы определим минимальные операторы $T_0(M)$, $T_0(M^+)$ как их соответствующие замыкания (ср. [7, разд. 5]). Обозначим области определения $T_0(M)$ и $T_0(M^+)$ через $D_0(M)$ и $D_0(M^+)$ соответственно. Можно показать, что

$$f \in D_0(M) \Rightarrow f^{[s-1]}(a) = 0\ (s = 1,2), \quad g \in D_0(M^+) \Rightarrow g^{[s-1]}_+(a) = 0\ (s=1,2), \tag{2.7}$$

ибо мы предполагаем, что a — регулярная точка. Кроме того, как в регулярной, так и в сингулярной задачах имеем

$$T^*_0(M) = T(M^+), \quad T^*(M) = T_0(M^+) \tag{2.8}$$

(см. [7, разд. 5] в случае, когда $M = M^+$, и ср. с [3, разд. III.10.3] в общем случае).

3. Технические леммы. Согласно (2.3) $T_0(M) \subset T(M) = [T_0(M^+)]^*$ и тем самым $T_0(M)$, $T_0(M^+)$ образуют сопряженную пару замкнутых плотно определенных операторов в $L^2_w(a,b)$. Ввиду [3, следствие III.3.2] $\operatorname{def}[T_0(M) - \lambda I] + \operatorname{def}[T_0(M^+) - \bar{\lambda} I]$ постоянно на совместной области регулярности $\Pi[T_0(M), T_0(M^+)]$. В формально симметрическом случае ($M = M^+$) отсюда следует известный результат о том, что для симметричного оператора $T_0(M)$ имеет постоянные индексы дефекта $m_\pm = \operatorname{def}[T_0(M) - \lambda I] (\lambda \in \mathbb{C}_\pm)$, см. [3, разд. III.4]. Эти индексы дефекта (m_+, m_-) удовлетворяют соотношениям

$$1 \le m_+, m_- \le 2, \tag{3.1}$$

см. [8, теорема 8.2].

Лемма 3.1 (ср. [3, теорема 3.10.7]). *Для* $\lambda \in \Pi[T_0(M),\, T_0(M^+)]$ *величина* $\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I]+\operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I]$ *постоянна и*

$$2 \le \operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I]+\operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I] \le 4. \tag{3.2}$$

В регулярной задаче $\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I]+\operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I]=4$ *для всех* $\lambda \in \Pi[T_0(M), T_0(M^+)]$.

Лемма 3.2 (ср. [3, гл. 3; 4, теорема 10]). *Имеет место равенство*

$$\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I]+\operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I]=2$$

для всех $\lambda \in \Pi[T_0(M), T_0(M^+)]$ *в том и только в том случае, если*

$$[\phi,\theta](b)=\lim_{x\longrightarrow b}[\phi,\theta](x)=0, \quad \phi\in D(M),\ \theta\in D(M^+), \tag{3.3}$$

где $[\phi,\theta](x)$ *— билинейная форма Лагранжа, определенная равенством*

$$[\phi,\theta](x)=p(x)\{\phi(x)\overline{\theta'}(x)-\phi'(x)\bar\theta(x)+(r(x)+u(x))\phi(x)\bar\theta(x)\}. \tag{3.4}$$

В этом случае

$$D_0(M)=D[T_0(M)]=\{\phi\in D(M), \phi(a)=\phi^{[1]}(a)=0\}. \tag{3.5}$$

Лемма 3.3. *Пусть* M *— регулярное дифференциальное выражение второго порядка. Тогда* $\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I]+\operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I]=4$ *для всех* $\lambda\in\Pi[T_0(M),T_0(M^+)]$ *тогда и только тогда, когда каждое из уравнений* $M[f\}-\lambda wf=0$ *и* $M^+[g]-\bar\lambda wg=0$ *имеет два линейно независимых решения в* $L^2_w(a,b)$ *для любого* $\lambda\in\mathbb{C}$, *см.* [5, *теорема* 19.4.4; 9, *следствие* 3.36].

Для доказательства леммы 4.1 нам понадобится следующая

Лемма 3.4 (ср. [10, теорема 1.5.7]). *Пусть* $f(t)$ *и* $h(t)$ *— неотрицательные непрерывные функции на некотором интервале* $t_0\le t\le t_0+a$. *Пусть функция* $\zeta(t)$ *положительная, непрерывная и монотонно неубывающая на* $[t_0,t_0+a]$. *Предположим, что*

$$f(t)\le\zeta(t)+\int\limits_{t_0}^{t}h(s)f(s)\,ds, \quad t\in[t_0,t_0+a]. \tag{3.6}$$

Тогда

$$f(t)\le\zeta(t)\exp\left[\int\limits_{t_0}^{t}h(s)f(s)\right]ds, \quad t\in[t_0,t_0+a]. \tag{3.7}$$

4. Случай $\operatorname{def}[T_0(M)-\lambda I]+\operatorname{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I]=2$**.** В этом пункте дадим условия на комплекснозначные коэффициенты дифференциального выражения M, достаточные для того, чтобы все решения уравнений $M[f]-\lambda wf=0$ и $M^+[g]-\bar\lambda wg=0$ лежали в $L^2_w(a,b)$.

Лемма 4.1. *Пусть* $-\infty<a<b\le+\infty$ *и дифференциальное уравнение* $M[f]-\lambda wf=0(M^+[g]-\bar\lambda wg=0)$ *регулярно в каждой точке промежутка* $[a,b]$. *Пусть* $f(t)$ *— комплекснозначная функция на* $[a,b)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\begin{gathered} f, f^{[1]}\in AC_{\mathrm{loc}}[a,b), \quad w^{-1}M[f]\in L^2_w(a,b)\\ \big(g, g^{[1]}\in AC_{\mathrm{loc}}[a,b), \quad w^{-1}M^+[g]\in L^2_w(a,b)\big). \end{gathered} \tag{4.1}$$

Тогда $f, f^{[1]} \in AC[a,b]$ *и* $g, g^{[1]} \in AC[a,b]$.

Доказательство. Пусть f — комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию (4.1). Тогда для любого $c \in (a,b)$

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f' = f(c) + \int_c^x p^{-1} f^{[1]} + \int_c^x rf$$

и тем самым

$$|f(x)| = |f(c)| + \sup_{t\in[c,x]} |f(t)| \int_c^b |p^{-1}| + \int_c^x |r||f|.$$

Применяя лемму 3.4, получаем

$$|f(x)| \le \left\{ |f(c)| + \sup_{t\in[c,x]} |f^{[1]}(t)| \int_c^b |p^{-1}| \right\} \exp\left[\int_c^b |r| \right], \quad x \in (c,b), \tag{4.2}$$

так что

$$\sup_{t\in[c,x]} |f(t)| \le \left\{ |f(c)| + \sup_{t\in[c,x]} |f^{[1]}(t)| \int_c^b |p^{-1}| \right\} \exp\left[\int_c^b |r| \right], \quad x \in (c,b). \tag{4.3}$$

Кроме того,

$$f^{[1]}(x) = f^{[1]}(c) + \int_c^x (f^{[1]})' = f^{[1]}(c) + \int_c^x (qf - M[f] + uf^{[1]}), \quad x \in (c,b),$$

поэтому

$$\begin{aligned} |f^{[1]}(x)| \le |f^{[1]}(c)| &+ \sup_{t\in[c,x]} |f(t)| \int_c^b |q| \\ &+ \|w^{-1}M[f]\|_w \left(\int_c^b w \right)^{\frac{1}{2}} + \int_c^x |u||f^{[1]}|, \quad x \in (c,b). \end{aligned}$$

Учитывая лемму 3.4, имеем

$$\begin{aligned} |f^{[1]}(x)| \le \Bigg\{ |f^{[1]}(c)| &+ \sup_{t\in[c,x]} |f(t)| \int_c^b |q| \\ &+ \|w^{-1}M[f]\|_w \left(\int_c^b w \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg\} \exp\left[\int_c^x |u| \right], \quad x \in (c,b), \end{aligned} \tag{4.4}$$

и из (4.3), (4.4) выводим, что

$$\begin{aligned} |f^{[1]}(x)| \le \Bigg\{ &|f^{[1]}(c)| + \|w^{-1}M[f]\|_w \left(\int_c^b w \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\left\{ |f(c)| + \sup_{t\in[c,x]} |f^{[1]}(t)| \int_c^b |p^{-1}| \right\} \exp\left[\int_c^b |r| \right] \right) \int_c^b |q| \Bigg\} \exp\left[\int_c^x |u| \right], \quad x \in (c,b). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Так как c — произвольное число из интервала (a,b), оно может быть взято таким, что

$$\left[\int\limits_c^b |q| \int\limits_c^b |p^{-1}| \exp\left(\int\limits_c^b |r| + |u|\right)\right] < \frac{1}{2}. \tag{4.6}$$

Это возможно, поскольку $p^{-1}, r, u, q \in L(a,b)$. Тогда $f^{[1]}$ ограничена на $[a,b]$ и ввиду (4.5) $|f(x)|$ ограничена на $[a,b]$. Так как $p^{-1}, r, u, q, w \in L(a,b)$, имеем $f' = p^{-1}f^{[1]} + rf \in L(a,b)$. Следовательно, $f \in AC[a,b]$ и $(f^{[1]})' = uf^{[1]} + (q - \lambda w)f \in L(a,b)$. Тем самым $f^{[1]} \in AC[a,b]$. Аналогично для $g, g^{[1]} \in AC[a,b]$, $w^{-1}M^+[g] \in L^2_w(a,b)$ имеем $g, g^{[1]} \in AC[a,b]$. Это завершает доказательство. Детали можно найти в [1].

Теорема 4.2. *Пусть* $M[\cdot]$ *регулярно в* a *и* $p^{-1}, r, u, q, w \in L(a,\infty)$. *Тогда*

(i) $\operatorname{def}[T_0(M) - \lambda I] = \operatorname{def}[T_0(M^+) - \bar\lambda I] = 2$ *для любого* $\lambda \in \Pi[T_0(M), T_0(M^+)]$,

(ii) $\int\limits_a^\infty |p|^{-1}|f^{[1]}|^2 < \infty$, $\int\limits_a^\infty |q||f|^2 < \infty$ *для любого* $f \in D(M)$,

(iii) $\int\limits_a^\infty |p|^{-1}|g^{[1]}|^2 < \infty$, $\int\limits_a^\infty |q||g|^2 < \infty$ *для любого* $g \in D(M^+)$.

Доказательство. (i) Перейдем от переменной x к переменной s по формуле

$$s(x) := \int\limits_a^x |p|^{-1}\, dt, \quad x \in [a,\infty). \tag{4.7}$$

Функция s дифференцируема на $[a,\infty)$, и

$$S(x) = s'(x) = |p|^{-1} \quad \text{для п. в. } x \in [a,\infty). \tag{4.8}$$

Тогда S строго возрастает на $[a,b]$ и имеет обратную функцию x, определенную на $[0,\beta]$, где

$$\beta = \int\limits_a^\infty |p|^{-1}\, dt < \infty. \tag{4.9}$$

В терминах новой переменной уравнения (2.2) и (2.4) принимают вид

$$\tau[f] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{p}{|p|}\left(\frac{df}{ds} - r|p|f\right)\right] + up\left(\frac{df}{ds} - r|p|f\right) + Qf = \lambda W(s)f(s), \quad s \in [0,\beta], \tag{4.10}$$

$$\tau^+[g] = -\frac{d}{ds}\left[\frac{p}{|p|}\left(\frac{dg}{ds} + r|p|g\right)\right] + rp\left(\frac{dg}{ds} + u|p|g\right) + Qg = \bar\lambda W(s)g(s), \quad s \in [0,\beta], \tag{4.11}$$

где $Q(s) = q(x(s))|p(x(s))|$ и $W(s) = w(x(s))|p(x(s))|$, $s \in [0,\beta]$. Из условий на p, r, u, q, w вытекает, что $(\frac{p}{|p|})^{-1}, r|p|, u|p|, Q, W \in L(0,\beta)$. Отсюда следует, что дифференциальные выражения (4.10), (4.11) регулярны во всех точках промежутка $[0,\beta]$, так что все решения уравнений $W^{-1}\tau[f] = \lambda f$ и $W^{-1}\tau^+[g] = \bar\lambda g$ принадлежат $L^2_w(0,\beta)$. По лемме 3.3

$$\operatorname{def}[T_0(M) - \lambda I] = \operatorname{def}[T_0(M^+) - \bar\lambda I] = 2 \quad \text{на } [0,\beta]. \tag{4.12}$$

Покажем теперь, что все решения уравнений $(M - \lambda w)f = 0$ и $(M^+ - \bar\lambda w) = 0$ лежат в $L^2_w(a,\infty)$. Заметим, что если y — решение уравнения (1.1) и

$$Y(s) = y(x(s)), \quad s \in [0,\beta], \tag{4.13}$$

то Y — решение уравнения (4.10) на $[0,\beta]$. В свою очередь, если Y — решение (4.10) и y определено формулой $y(x) = Y(s(x))$, $x \in [a,\infty)$, то y — решение уравнения (1.1) на $[a,\infty)$. Так как все решения (4.10) принадлежат $L^2_w(0,\beta)$, для любого решения y уравнения (1.1) имеем

$$\int\limits_a^\infty w(x)|y(x)|^2\,dx = \int\limits_a^\beta W(s)|Y(s)|^2\,ds < \infty,$$

где Y определено формулой (4.13) и тем самым $y \in L^2_w(a,\infty)$. Таким образом, любое решение уравнения (1.1) принадлежит $L^2_w(a,\infty)$. Аналогично все решения (1.2) принадлежат $L^2_w(a,\infty)$. В этом случае по лемме 3.3 получаем

$$\operatorname{def}[T_0(M) - \lambda I] = \operatorname{def}[T_0(M^+) - \bar{\lambda} I] = 2$$

для любого $\lambda \in \Pi[T_0(M), T_0(M^+)]$.

(ii) Для $f \in D(M)$ определим функцию $F : [0,\beta] \to \mathbb{C}$ равенством

$$F(s) = f(x(s)), \quad s \in [0,\beta]. \tag{4.14}$$

Тогда $F, \frac{\bar{p}}{|p|}(\frac{dF}{ds} - r|p|F) \in AC[0,\beta]$, ибо $f, f^{[1]} \in AC[a,\infty)$; $F \in L^2_w(0,\beta)$, ибо

$$\int\limits_0^\beta W(s)|F(s)|^2\,ds = \int\limits_a^\infty w(x)|f(x)|^2\,dx < \infty,$$

и $W^{-1}\tau[F] \in L^2_w(0,\beta)$, ибо

$$\int\limits_0^\beta W(s)|W^{-1}\tau[F]|^2\,ds = \int\limits_a^\infty w(x)|w^{-1}M[f]|^2\,dx < \infty.$$

Так как дифференциальное уравнение (4.10) регулярно во всех точках промежутка $[0,\beta]$, по лемме 4.1 F и $\frac{\bar{p}}{|p|}(\frac{dF}{ds} - r|p|F)$ лежат в $AC[0,\beta]$. Отсюда и из того, что $Q \in L(0,\beta)$, вытекает, что $Q|F|^2 \in L(0,\beta)$ и $|\frac{dF}{ds} - r|p|F|^2 \in L(0,\beta)$. Таким образом, если f — функция из $D(M)$ и F определена согласно (4.14), то

$$\int\limits_a^\infty \frac{1}{|p|}|f^{[1]}|^2\,dx = \int\limits_0^\beta \left|\frac{dF}{ds} - r\right| p|F|^2\,ds < \infty,$$

$$\int\limits_a^\infty |q||f|^2\,dx = \int\limits_0^\beta |Q||F|^2\,ds < \infty.$$

Аналогично

$$\int\limits_a^\infty \frac{1}{|p|}|g^{[1]}|^2\,dx < \infty, \qquad \int\limits_a^\infty |q||g|^2\,dx < \infty \quad \forall g \in D(M^+).$$

5. Случай $\operatorname{def}[T_0(M) - \lambda I] = \operatorname{def}[T_0(M^+) - \bar{\lambda} I] = 1$. В этом пункте установим условия на комплекснозначные коэффициенты r, u, q, и вещественнозначный коэффициент p, достаточные для того, чтобы $\operatorname{def}[T_0(M) - \lambda I] = \operatorname{def}[T_0(M^+) - \bar{\lambda} I] = 1$ для любого $\lambda \in \Pi[T_0(M), T_0(M^+)]$.

Наше доказательство является доказательством типа Левинсона, которое имеет много версий в случае формально симметричного выражения с вещественными коэффициентами (см., например, [2; 11, теорема III.2.5]).

Теорема 5.1. *Пусть $M[\cdot]$ определено, как в (1.1), и предположим, что существует неотрицательная финитная абсолютно непрерывная функция V_n на $[0,\infty)$ такая, что*

$$\int\limits_0^\infty V_n\sqrt{w/p}\to\infty \quad \text{при } n\to\infty. \tag{5.1}$$

Предположим, кроме того, что $\mathrm{Re}(q)=q_1+q_2$ *и*

$$p\left[V_n'+\mathrm{Re}\left(\frac{u+r}{2}\right)V_n\right]^2\le\left[q_{1-}\left(\frac{1}{p}\right)\left|\left(\frac{p}{2}\right)(\bar u-r)-Q\right|^2-\mathrm{Re}(pur)\right]V_n^2+Kw \tag{5.2}$$

для некоторой Q такой, что $Q'=q_2$, и некоторой константы K. Тогда

$$\mathrm{def}[T_0(M)-\lambda I]=\mathrm{def}[T_0(M^+)-\bar\lambda I]=1 \quad \forall\lambda\in\Pi[T_0(M),T_0(M^+)].$$

Доказательство. Покажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}[f,g](x)=0$ для любых $f\in D(M)$ и $g\in D(M^+)$. Допустим, что $\lim\limits_{x\to\infty}[f,g]=1$. Будем вместо V_n писать V. Умножая обе части (3.4) на $V\sqrt{w/p}$, имеем

$$\begin{aligned}V\sqrt{w/p}[f,g]&=\{\sqrt{p}\bar g'V+\bar gV(p(u-\bar r)-2Q)/2\sqrt{p}+\sqrt{p}\bar gV'\}f\sqrt{w}\\&-\{\sqrt{p}f'V+fV(p(\bar u-r)-2Q)/2\sqrt{p}+\sqrt{p}fV'\}\bar g\sqrt{w}+\{\sqrt{p}\,\mathrm{Re}(r+u)Vf\}\bar g\sqrt{w}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что каждый член в правой части (5.3) является произведением двух интегрируемых в квадрате функций, L^2-нормы которых не зависят от n. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(w^{-1}M[f],fV^2)&=\mathrm{Re}\left(\int\limits_0^\infty p(f'-rf)\bar f'V^2\right)\\&+2\,\mathrm{Re}\left(\int\limits_0^\infty p(f'-rf)\bar fVV'\right)+\mathrm{Re}\left(\int\limits_0^\infty pu(f'-rf)\bar fV^2\right)\\&+\int\limits_0^\infty q_1|f|^2V^2-\mathrm{Re}\left(\int\limits_0^\infty Qf\bar f'V^2\right)-2\int\limits_0^\infty Q|f|^2VV'\\&=\int\limits_0^\infty\left|\sqrt{p}f'V+(1/\sqrt{p})\left(p\left(\frac{\bar u-r}{2}\right)-Q\right)fV+\sqrt{p}fV'\right|^2-\int\limits_0^\infty p|f'|^2{V'}^2\\&-\int\limits_0^\infty\left|p\left(\frac{\bar u-r}{2}\right)-Q\right|^2(1/p)|f|^2V^2+\int\limits_0^\infty q_1|f|^2V\\&-\mathrm{Re}\left(\int\limits_0^\infty pur|f|^2V^2\right)-\mathrm{Re}\left(\int\limits_0^\infty p(\bar u+r)\right)|f|^2VV'.\end{aligned}$$

Так как $\mathrm{Re}(\bar{u}+r)=\mathrm{Re}(u+r)$, имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(w^{-1}M[f],fV^2)&=\int\limits_0^\infty\left|\sqrt{p}f'V+(1/p)\left(p\left(\frac{\bar{u}-r}{2}\right)-Q\right)+\sqrt{p}fV'\right|^2\\&+\frac{1}{4}\int\limits_0^\infty p[\mathrm{Re}(u+r))]^2|f|^2V^2-\int\limits_0^\infty p[V'+(1/2)\,\mathrm{Re}(u+r)V]^2|f|^2\\&-\int\limits_0^\infty\left[q_1-(1/p)\left|p\left(\frac{\bar{u}-r}{2}\right)-Q\right|^2-p\,\mathrm{Re}(ur)\right]|f|^2V^2.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Согласно (5.2) сумма третьего и четвертого членов в правой части (5.4) ограничена снизу величиной $\left(-k\int\limits_0^\infty w|f|^2\right)$ для каждого $V=V_n$. Следовательно, первый и второй члены в правой части (5.4) ограничены сверху равномерно по n. Таким образом, второй и третий члены в (5.3) являются произведением интегрируемых в квадрате функций. Аналогичное можно показать для первого члена в (5.3) повторением рассуждений с $(w^{-1}M^+[g],gV^2)_w$.

Приведем два примера, в которых выполнены условия предыдущих теорем.

Примеры. (1) Пусть $p=w=V_n=1$ на $[0,\infty)$. Тогда условие (5.1) выполнено. Чтобы у