Commutation and Rearrangements

An electronic reedition of the monograph

Problèmes combinatoires de
commutation et réarrangements

by P. Cartier, D. Foata

with three new appendices by

D. Foata, B. Lass
and Ch. Krattenthaler

2006

Foreword

The monograph “Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements” was originally published as no. 85 in the Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics Series, back in 1969. The algebraic and combinatorial techniques developed there have since been used in various branches of mathematics and also computer science. The notion of partially commutative monoid, that was first introduced for extending the MacMahon Master Theorem to the noncommutative case, has been used in other contexts. In particular, it has provided an appropriate mathematical model for the study of computer parallelism. The fundamental result deals with an inversion formula, that has been expressed in different algebraic structures, originally the algebra of a partially commutative monoid.

It was then appropriate, with this electronic reedition of the monograph, to have three appendices which could illustrate how that fundamental inversion formula was implemented in other environments, explicitly and also implicitly.

In the first appendix (“Inversions de Möbius”) it is shown how to go from the Möbius inversion formula for a partially commutative monoid to the Möbius formula for a locally finite partially ordered set, and conversely.

In the second appendix Bodo Lass shows that by means of a simple specialization of the variables the fundamental inversion formula provides a noncommutative version of the celebrated chromatic polynomial identity for graphs : $(-1)^{|V|}\chi_G(-1) = a(G)$.

The third appendix, written by Christian Krattenthaler, presents Viennot’s theory of heaps of pieces, a theory that has been very fruitful in the combinatorial theory of orthogonal polynomials and in the calculation of multivariable generating functions for polyominoes. The equivalence of the theory of heaps and the theory of partially commutative monoids is explicitly established.

COMMUTATION AND REARRANGEMENTS

Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

Series : Institut de Mathématique, Université de Strasbourg
Adviser : P. A. Meyer

85

P. Cartier . D. Foata
Université de Strasbourg

Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements

Springer-Verlag
Berlin . Heidelberg . New York 1969

The present volume is a 2005 TEX-reproduction of the original text that was originally published in the Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics Series in 1969.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Dans sa thèse [1], l'un d'entre nous a étudié les problèmes combinatoires liés aux réarrangements de suites finies et à la décomposition en cycles de «permutations avec répétitions». Nous reprenons ici ces questions par des méthodes nouvelles : la nouveauté principale est l'introduction du monoïde des circuits sur un un graphe et, comme cas particulier, celle des monoïdes de réarrangements. Nous pouvons ainsi donner des démonstrations assez intuitives de plusieurs théorèmes de factorisation ; on obtient deux bijections distinctes de l'ensemble des mots sur l'ensemble des réarrangements, dont la composition redonne un théorème de réarrangement, sans recourir aux constructions élaborées dans [1]. Nous examinerons maintenant les principaux thèmes de ce travail.

A. Fonction de Möbius

Le but des chapitres I et II est d'établir l'identité générale

$$\Big(\sum_{i_1,\ldots,i_r}(-1)^r\,T_{i_1}\cdots T_{i_r}\Big)^{-1}=\sum_{j_1,\ldots,j_s}T_{j_1}\cdots T_{j_s},\tag{1}$$

dont la signification est la suivante : on considère des séries formelles à coefficients entiers en des indéterminées T_i auxquelles on impose *certaines* relations de commutation $T_iT_j = T_jT_i$ (éventuellement aucune ou toutes). Le membre de gauche comporte une sommation sur tous les monômes distincts formés de lettres distinctes commutant deux à deux et celui de droite comporte une sommation sur tous les monômes distincts (si plusieurs monômes se trouvent être égaux en vertu des relations de commutation imposées, on ne prend que l'un d'entre eux dans la sommation). En spécialisant au cas où les indéterminées ne commutent jamais ou au contraire commutent toujours, on retrouve les identités connues

$$\Big(1-\sum_{i=1}^{n}T_i\Big)^{-1}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{i_1,\ldots,i_r}T_{i_1}\cdots T_{i_r};\tag{2}$$

$$\Big((1-T_1)\cdots(1-T_n)\Big)^{-1}=\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}T_1^{\alpha_1}\cdots T_n^{\alpha_n}.\tag{3}$$

L'établissement de (1) se fait en deux étapes. Considérons un monoïde M dans lequel tout élément n'a qu'un nombre fini de décompositions en produit (d'un nombre quelconque de facteurs). On peut alors former des séries formelles $\sum_{x\in M} a_x \cdot x$ à coefficients entiers par exemple. Nous montrons qu'il existe une fonction μ_M (fonction de Möbius de M) telle que

$$\Big(\sum_{x\in M} \mu_M(x)\cdot x\Big)^{-1} = \sum_{x\in M} x; \tag{4}$$

cette relation équivaut à $\sum\limits_{yz=x} \mu_M(y) = 0$ pour $x \neq 1$ et $\mu_M(1) = 1$. Lorsque M est l'ensemble des entiers strictement positifs, avec la multiplication pour opération, la fonction μ_M est la fonction de Möbius usuelle ([2], p. 234) et la relation (4) équivaut à l'identité connue

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\cdot n^{-s}\Big)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \tag{5}$$

Il reste à expliciter la fonction μ_M pour certains monoïdes. Pour cela, nous étudions au chapitre I les monoïdes engendrés par des générateurs T_i soumis à certaines relations de commutation. Le résultat principal est le théorème 1.2 qui résout le problème des mots pour de tels monoïdes, en indiquant une famille réduite et un algorithme pour la réduction à la forme réduite.

B. Flots et cycles sur un graphe

Le chapitre 3 est consacré à une généralisation non commutative de l'homologie. Nous considérons un graphe orienté G (variété combinatoire orientée de dimension 1) ; les simplexes de dimension 0 sont appelés sommets et ceux de dimension 1 arêtes. On suppose pour simplifier qu'il n'y a qu'un nombre fini de sommets et d'arêtes. Pour $i = 0, 1$, on note C_i le groupe commutatif libre engendré par les simplexes de dimension i, appelé classiquement groupe des i-chaînes ; l'opérateur bord $\partial : C_1 \to C_0$ est caractérisé par $\partial(a) = t - s$ pour toute arête a joignant le sommet s au sommet t. Le premier groupe d'homologie H_1 du graphe G est le noyau de ∂.

Pour tout sommet s, soit $\widehat{C}(s)$ le groupe libre engendré par les arêtes d'origine s ; notons aussi $\widehat{C}_1$ le produit de tous ces groupes $\widehat{C}(s)$. Il existe un homomorphisme canonique surjectif $\pi : \widehat{C}_1 \to C_1$, dont le noyau est le groupe des commutateurs de $\widehat{C}_1$. Le groupe $\widehat{H}_1 = \pi^{-1}(H_1)$ mérite le nom de premier groupe d'homologie non commutatif de G.

En fait, nous ne nous intéressons qu'au sous-monoïde F de $\widehat{C}_1$ engendré par les arêtes, dont les éléments sont appelés flots. Les éléments de $F \cap \widehat{H}_1$ sont appelés circuits. Les résultats essentiels sont deux théorèmes de décomposition d'un circuit. Le théorème 3.5 affirme que le monoïde des circuits est du type envisagé au chapitre I : les générateurs sont des cycles « géométriques » et deux cycles commutent si et seulement s'ils n'ont aucun sommet en commun. Ce résultat précise et généralise les théorèmes usuels de décomposition d'un « cycle algébrique » en « cycles géométriques ». La proposition 3.10 fournit une décomposition d'un circuit en lacets. La méthode de démonstration s'explique facilement dans le langage imagé des labyrinthes. On dispose d'un labyrinthe, dont tous les couloirs sont à sens unique ; de plus, pour chaque carrefour, on a établi un ordre de préséance entre les couloirs partant de ce carrefour (par exemple de la gauche vers la droite à partir d'un d'entre eux) ; enfin, on suppose remplie la condition bien connue d'Euler : il y a autant de couloirs aboutissant à un carrefour que de couloirs qui en partent. Partant d'un carrefour déterminé, on voyage selon la règle dite de Tarry : à chaque carrefour, choisir pour en ressortir le premier des couloirs non encore parcourus. On retourne certainement au point de départ par cette règle, après avoir exploré tout ou partie du labyrinthe ; si tout n'est pas exploré, on peut visiter le reste en recommençant par une méthode analogue.

C. Applications

Au chapitre IV, nous appliquons les résultats précédents au cas d'un graphe G ayant la propriété suivante : quels que soient les sommets s et t, il existe une arête et une seule joignant s à t. On suppose l'ensemble X des sommets totalement ordonné.

Un mot formé de n lettres distinctes dans X est spécifié par la donnée de l'ensemble de ces lettres et de la permutation qui amène ces lettres de l'ordre croissant à l'ordre dans le mot. La décomposition d'une permutation en cycles fournit donc une décomposition d'un mot formé de lettres distinctes en mots cycliques. Nous généralisons ceci à tous les mots grâce à la décomposition en cycles des réarrangements (qui sont des circuits dans G). En interprétant convenablement le produit des circuits, nous retrouvons le monoïde d'intercalement déjà introduit dans [1] ; nous obtenons très facilement les résultats le concernant.

MacMahon a fait grand usage du résultat suivant qu'il a baptisé « Master Theorem » [3, page 97] :

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des indéterminées commutatives, b_{ij} des nombres réels et

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j.$$

Pour toute suite de n entiers positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, le coefficient du monôme $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ dans le polynôme $Y_1^{\alpha_1} \cdots Y_n^{\alpha_n}$ est égal au coefficient du même monôme dans le développement en série formelle de l'inverse du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 - b_{1,1}X_1 & -b_{1,2}X_2 & \ldots & -b_{1,n}X_n \\ -b_{2,1}X_1 & 1 - b_{2,2}X_2 & \ldots & -b_{2,n}X_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{n,1}X_1 & -b_{n,2}X_2 & \ldots & 1 - b_{n,n}X_n \end{vmatrix}.$$

La démonstration de MacMahon est valable dans tout anneau commutatif. Nous montrons au chapitre V que le résultat reste valable dans un anneau quelconque, pourvu que b_{ij} commute à $b_{i'j'}$, pour $i \neq i'$ (théorème 5.1). En fait, sous cette forme, le théorème de MacMahon équivaut à la détermination de la fonction de Möbius du monoïde des circuits sur le graphe G. Par les mêmes méthodes, nous obtenons dans la proposition 5.2 une autre généralisation du «Master Theorem», déjà établie par d'autres moyens dans [1].

Un autre résultat de MacMahon est le suivant [3, page 186] : *pour toute permutation* σ *de* $\{1, 2, \ldots, n\}$*, soit* $\nu(\sigma)$ *le nombre des entiers* i *tels que* $1 \leq i \leq n-1$ *et* $\sigma(i) > i$ *et soit* $\xi(\sigma)$ *le nombre des entiers* i *tels que* $1 \leq i \leq n-1$ *et* $\sigma(i+1) > \sigma(i)$*. Pour tout entier* $m \geq 0$*, il y a autant de permutations* σ *avec* $\nu(\sigma) = m$ *que de permutations* σ *avec* $\xi(\sigma) = m$*.* En fait, on peut exhiber une bijection Φ de l'ensemble des permutations sur lui-même telle que $\xi = \nu \circ \Phi$. Nous construisons au chapitre IV une telle bijection dans le cas des «permutations avec répétitions» (ou réarrangements) ; cette bijection a déjà été introduite dans [1], mais nous obtenons ici très facilement ses propriétés.

Le chapitre VI est consacré à certaines identités entre coefficients binomiaux. Nous employons une méthode uniforme qui consiste à compter de deux manières différentes certains circuits dans un graphe à trois sommets. Dans le cas des circuits de longueur paire, nous retrouvons les identités de Dixon, Fjeldstad ou Foata [1, chapitre 10]. Dans le cas des circuits de longueur impaire, nous obtenons toute une série de nouvelles identités.

Au chapitre VII, nous appliquons enfin les résultats combinatoires précédents à la détermination des fonctions caractéristiques de certaines variables aléatoires. Nous obtenons une identité tout à fait analogue à celle de Spitzer [5] ; ces résultats généralisent ceux du chapitre 9 de [1].

C'est un fait connu que l'on explique facilement à un ami une méthode combinatoire sur un exemple explicite et qu'une rédaction suivant les canons mathématiques usuels est souvent lourde et obscure. Nous n'espérons pas que ce travail échappe à la règle commune, mais nous souhaitons l'avoir rendu un peu plus attrayant par la discussion d'exemples. La fonction de Möbius a été généralisée dans une autre direction par Rota [4] ; ses résultats ne recoupent pratiquement pas les nôtres. D. E. Knuth, du California Institute of Technology, nous a appris par lettre qu'il a obtenu les mêmes identités entre coefficients binomiaux que nous, par une méthode à peu près identique. Enfin, nous remercions Schützenberger et Verdier pour les nombreuses suggestions qu'ils nous ont faites et qui sont à l'origine de plusieurs des questions étudiées ici.

Strasbourg, le 15 juin 1968

P. CARTIER, D. FOATA

CHAPITRE PREMIER

MONOÏDES DÉFINIS PAR DES RELATIONS DE COMMUTATION

1. Rappels sur les monoïdes libres

Soit Z un ensemble non vide, dont les éléments seront appelés *lettres*. Un *mot* est une suite finie $w = z_1 \cdots z_m$ de lettres ; l'entier $m \geq 1$ est appelé la *longueur* du mot w. On convient qu'il existe aussi un mot vide, noté 1, de longueur 0 et qui n'a aucune lettre. Si $w = z_1 \cdots z_m$ et $w' = z'_1 \cdots z'_n$ sont deux mots non vides, leur *produit* $w'' = ww' = w \cdot w'$ est obtenu par juxtaposition de w et w', c'est-à-dire que l'on a $w'' = z''_1 \cdots z''_{m+n}$ avec $z''_i = z_i$ pour $1 \leq i \leq m$ et $z''_i = z'_{i-m}$ pour $m+1 \leq i \leq m+n$. On convient que $w \cdot 1 = 1 \cdot w = w$ pour tout mot w. Pour cette opération, l'ensemble des mots est un monoïde,([1]) noté $\mathrm{Mo}(Z)$ et appelé *monoïde libre* construit sur Z.

On note $\mathrm{Ab}(Z)$ l'ensemble des fonctions à valeurs entières positives f sur Z, telles que l'ensemble $\{z \in Z \mid f(z) \neq 0\}$ soit fini. La somme $f + g$ de deux éléments f et g de $\mathrm{Ab}(Z)$ est la fonction définie par $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$ pour tout $z \in Z$. Pour cette addition, $\mathrm{Ab}(Z)$ est un monoïde commutatif appelé le *monoïde commutatif libre construit sur* Z.

Pour tout $z \in Z$, on définit un élément ϵ_z de $\mathrm{Ab}(Z)$ par $\epsilon_z(z) = 1$ et $\epsilon_z(z') = 0$ pour z' distinct de z. Pour tout mot $w = z_1 \cdots z_m$, on note $\epsilon(w)$ l'élément $\epsilon_{z_1} + \cdots + \epsilon_{z_m}$ de $\mathrm{Ab}(Z)$. L'application ϵ est homomorphisme ([2]) de $\mathrm{Mo}(Z)$ sur $\mathrm{Ab}(Z)$. On dit qu'un mot $w' = z'_1 \cdots z'_n$ est un réarrangement de $w = z_1 \cdots z_m$ si l'on a $\epsilon(w) = \epsilon(w')$; il revient au même de dire que toute lettre z intervient un même nombre de fois dans w et dans w', ou encore qu'on a $m = n$ et qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \cdots, m\}$ avec $z'_i = z_{\sigma(i)}$ pour $1 \leq i \leq m$.

([1]) Un monoïde est un ensemble muni d'une multiplication associative, avec élément unité. Si M est un monoïde, un sous-monoïde est une partie de M stable par multiplication et contenant l'élément unité de M.

([2]) Soient M et M' deux monoïdes, dont on note 1 les éléments unités. Un homomorphisme de M sur M' est une application f de M dans M' telle que $f(xy) = f(x)f(y)$ et $f(1) = 1$.

2. Construction de $L(Z;C)$

Soient Z un ensemble et C une partie de $Z\times Z$; on suppose que, pour (z,z') dans C, on a $z \neq z'$ et $(z',z) \in C$. On dit que deux mots w et w' sont *C-adjacents* s'il existe deux mots u et v et un couple (z,z') dans C avec $w = uzz'v$ et $w' = uz'zv$; on dit que les mots w et w' sont *C-équivalents* s'ils sont égaux ou s'il existe une suite de mots $w_0, w_1, \ldots, w_p$ telle que $w_0 = w$, $w_p = w'$ et w_{i-1} et w_i soient C-adjacents pour $1 \leq i \leq p$. On définit ainsi une relation d'équivalence R_C dans $\mathrm{Mo}(Z)$, compatible avec la multiplication ; le monoïde quotient $\mathrm{Mo}(Z)/R_C$ sera noté $L(Z;C)$, son élément neutre sera noté 1 et la classe de C-équivalence d'une lettre z sera notée $[z]$. L'application $z \mapsto [z]$ est injective et $L(Z;C)$ est engendré par l'ensemble des éléments de la forme $[z]$. On dira que deux lettres z et z' *commutent* si l'on a $[z]\cdot[z'] = [z']\cdot[z]$ dans $L(Z;C)$; l'ensemble C se compose alors des couples de lettres distinctes qui commutent.

Soient M un monoïde, $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de M et C une partie de $I \times I$ telle que $(i,j) \in C$ entraîne $i \neq j$ et $(j,i) \in C$. On dit que M est *engendré par l'ensemble des x_i $(i \in I)$ soumis aux relations de commutation $x_ix_j = x_jx_i$ pour $(i,j) \in C$* s'il existe un isomorphisme $\varphi : L(I;C) \to M$ tel que $\varphi[i] = x_i$ pour tout $i \in I$.

LEMME 1.1. — *Soient M un monoïde et f une application de Z dans M ; on suppose que pour (z,z') dans C, les éléments $f(z)$ et $f(z')$ de M commutent. Il existe alors un homomorphisme $\overline{f}$ de $L(Z;C)$ dans M et un seul, tel que $f(z) = \overline{f}([z])$ pour toute lettre z.*

Si $w = z_1\cdots z_m$ et $w' = z'_1\cdots z'_m$ sont deux mots C-équivalents, on a $f(z_1)\cdots f(z_m) = f(z'_1)\cdots f(z'_m)$: cela résulte de l'hypothèse sur f lorsque w et w' sont C-adjacents et le cas général se déduit de là de proche en proche. Il existe donc une application $\overline{f}$ de $L(Z;C)$ dans M définie par $\overline{f}([z_1]\cdots[z_m]) = f(z_1)\cdots f(z_m)$ et $\overline{f}$ répond à la question posée. $\square$

Comme $\mathrm{Ab}(Z)$ est commutatif, le lemme 1.1 assure l'existence d'un homomorphisme π de $L(Z;C)$ dans $\mathrm{Ab}(Z)$ tel que $\pi([z]) = \epsilon_z$ pour toute lettre z ; si l'on note λ l'homomorphisme de $\mathrm{Mo}(Z)$ dans $L(Z;C)$ défini par $\lambda(z_1\cdots z_m) = [z_1]\cdots[z_m]$, on a $\epsilon = \pi\circ\lambda$, d'où le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mo}(Z) \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathrm{Ab}(Z) \\ L(Z;C) \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Le lemme 1.1 démontre aussi l'existence d'une application ι de $L(Z;C)$ dans lui-même caractérisée par les formules

$$\iota(1) = 1, \quad \iota([z]) = [z], \quad \iota(uv) = \iota(v)\iota(u) \tag{1}$$

pour toute lettre z et u, v dans $L(Z;C)$. On a $\iota([z_1]\cdots[z_m]) = [z_m]\cdots[z_1]$, d'où

$$\iota(\iota(u)) = u \quad \text{pour tout } u \text{ dans } L(Z;C). \tag{2}$$

On dit que ι est l'*involution* dans $L(Z;C)$.

3. Structure de $L(Z;C)$

On dit qu'une partie F de Z est *commutative* si elle est finie, non vide et si deux de ses éléments commutent toujours; on pose dans ce cas $[F] = \prod_{z\in F} [z]$. On pose aussi $[\emptyset] = 1$. On dit qu'une lettre z est *liée* à une partie F de Z si l'on a $z \in F$ ou s'il existe une lettre dans F qui ne commute pas à z. Si F et F' sont deux parties de Z, on dit que F est *contiguë* à F' si toute lettre de F' est liée à F ; on appelle V-*suite* toute suite $(F_1,\ldots,F_r)$ de parties commutatives de Z, telle que F_i soit contiguë à F_{i+1} pour $1 \le i \le r-1$ et l'on convient d'une V-suite vide notée o.

Théorème 1.2. — *Tout élément u de $L(Z;C)$ admet une V-décomposition, c'est-à-dire une V-suite $(F_1,\ldots,F_r)$ telle que $u = [F_1]\cdots[F_r]$; celle-ci est unique.*

(A) *Existence d'une V-décomposition :*

Pour toute V-suite $s = (F_1,\ldots,F_r)$, on pose $p(s) = [F_1]\cdots[F_r]$ avec la convention $p(o) = 1$. De plus, pour toute V-suite $s = (F_1,\ldots,F_r)$ et toute lettre z, nous définirons une suite $s\cdot z$ de parties de Z par les règles suivantes :

(1) Si z est liée à F_r, on pose $s\cdot z = (F_1,\ldots,F_r,\{z\})$ (cas particulier $o\cdot z = \{z\}$).

(2) Si z n'est pas liée à F_r, notons j le plus petit des entiers compris entre 1 et r et tels que z ne soit liée à aucune des parties F_k pour $j \le k \le r$. On pose alors $s\cdot z = (F'_1,\ldots,F'_r)$ avec $F'_i = F_i$ pour $i \ne j$ et $F'_j = F_j \cup \{z\}$.

Si une lettre z est liée à une partie F de Z, elle est liée à toute partie de Z contenant F; si, au contraire, z n'est pas liée à une partie commutative F, alors $F\cdot\{z\}$ est commutative. Ces remarques prouvent que $s\cdot z$ est une V-suite pour toute V-suite s. De plus, on a la relation

$$p(s\cdot z) = p(s)\cdot[z]; \tag{3}$$

cette relation est évidente dans le cas (1). Dans le cas (2), la lettre z n'est pas liée à F_j, F_{j+1}, … , F_r, donc $[z]$ commute à $[F_{j+1}]\cdots[F_r]$ et l'on a $[F_j]\cdot[z] = [F_j\cup\{z\}]$ car $z \notin F_j$; on en déduit $[F_j]\cdot[F_{j+1}]\cdots[F_r]\cdot[z] = [F_j\cup\{z\}]\cdot[F_{j+1}]\cdots[F_r]$, d'où encore (3).

Soit alors $u = [z_1]\cdots[z_m]$ un élément de $L(Z;C)$; on pose

$$s = (\cdots((o\cdot z_1)\cdot z_2)\cdot\ \ldots\ \cdot z_m).$$

De $p(o) = 1$ et de la formule (3), on déduit par récurrence sur m la relation $p(s) = u$, c'est-à-dire que s est une V-décomposition de u.

(B) *Unicité d'une V-décomposition :*

Soient $s = (F_1, \dots, F_r)$ une V-suite non vide et z_1, z_2 deux lettres distinctes qui commutent. Soit $n \in \{1, 2\}$; lorsque z_n n'est pas liée à F_r, on notera j_n le plus petit des entiers compris entre 1 et r et tels que z_n ne soit liée à aucune des parties F_k pour $j_n \leq k \leq r$. Par application des règles (1) et (2) qui définissent $s \cdot z$, on obient facilement le tableau suivant.

z_1 liée à F_r	z_2 liée à F_r	$(s \cdot z_1) \cdot z_2$
oui	oui	$(F_1, \dots, F_r, \{z_1, z_2\})$
oui	non	$(F_1, \dots, F_{j_2} \cup \{z_2\}, \dots, F_r, \{z_1\})$
non	oui	$(F_1, \dots, F_{j_1} \cup \{z_1\}, \dots, F_r, \{z_2\})$
non	non	$\begin{cases} j_1 = j_2 & (F_1, \dots, F_{j_1} \cup \{z_1, z_2\}, \dots, F_r) \\ j_1 \neq j_2 & (F'_1, \dots, F'_r) \text{ avec } F'_i = F_i \end{cases}$ pour $i \notin \{j_1, j_2\}$ $F'_{j_n} = F_{j_n} \cup \{z_n\}$ pour $z \in \{1, 2\}$.

Comme z_2 n'est pas liée à $\{z_1\}$, on a par ailleurs $(o \cdot z_1) \cdot z_2 = \{z_1, z_2\}$. Il résulte alors du tableau précédent que l'on a dans tous les cas précédents la relation

$$(s \cdot z_1) \cdot z_2 = (s \cdot z_2) \cdot z_1 \quad \text{pour toute } V\text{-suite } s. \tag{4}$$

Soient $w = z_1 \cdots z_m$ et $w' = z'_1 \cdots z'_m$ deux mots. Si w et w' sont C-adjacents, la formule (4) entraîne $(\cdots (o \cdot z_1) \cdot \dots \cdot z_m) = (\cdots (o \cdot z'_1) \cdot \dots \cdot z'_m)$ et la même conclusion subsiste évidemment si w et w' sont seulement supposés C-équivalents. Il existe donc une application q de $L(Z; C)$ dans l'ensemble des V-suites définie par

$$q([z_1] \cdots [z_m]) = (\cdots ((o \cdot z_1) \cdot z_2) \cdot \ \dots \ \cdot z_m). \tag{5}$$

Soit u un élément de $L(Z; C)$. Nous allons montrer que toute V-décomposition $s = (F_1, \dots, F_r)$ de u est égale à $q(u)$. Nous raisonnerons par récurrence sur r, le cas $r = 0$ étant trivial (il correspond à $u = 1$ et $q(u) = s = o$). Si l'on pose $v = [F_1] \cdots [F_{r-1}]$ et $F_r = \{z_1, \dots, z_m\}$, on a $q(v) = (F_1, \dots, F_{r-1})$ par hypothèse de récurrence et $u = v \cdot [z_1] \cdots [z_m]$, d'où $q(u) = (F_1, \dots, F_{r-1}) \cdot z_1 \cdot \dots \cdot z_m$; comme z_1 est liée à F_{r-1} et que z_{j+1} n'est pas liée à $\{z_1, \dots, z_j\}$ pour $1 \leq j \leq m-1$, une application répétée des règles (1) et (2) donne $q(u) = (F_1, \dots, F_r)$. $\square$

Corollaire 1.3. — *La multiplication dans le monoïde $L(Z; C)$ est simplifiable.*

Soient z une lettre, t un élément de $L(Z; C)$ et $(H_1, \dots, H_s)$ la V-décomposition de t. Supposons qu'il existe un élément u de $L(Z; C)$, de V-décomposition $(F_1, \dots, F_r)$, tel que $t = u \cdot [z]$; nous dirons qu'on est dans le cas (1) ou dans le cas (2) selon que z est liée à F_r ou non. Dans le cas (1), on a $r = s-1$ et $H_s = \{z\}$. Dans le cas (2), soit j le plus petit des entiers compris entre 1 et r tels que z ne soit pas liée à F_k pour $j \leq k \leq r$; on a alors $s = r$ et si $j < r$, on a $H_s = F_r$ et comme z n'est pas liée à F_r, on a $z \notin H_s$; si, au contraire, on a $j = r$, on a $z \notin F_r$ et $H_s = F_r \cup \{z\}$; quel que soit j, on a donc $H_s \neq \{z\}$.

On peut donc conclure que l'on est dans le cas (1) ou (2) selon que H_s est égal à $\{z\}$ ou non. Dans le cas (1), on a $u = [H_1] \cdots [H_{s-1}]$; dans le cas (2), j est le plus grand des entiers ℓ compris entre 1 et r tels que $z \in H_\ell$ et l'on a $u = [H_1] \cdots [H_{j-1}][H_j \setminus \{z\}][H_{j+1}] \cdots [H_r]$. Il existe donc au plus un élément u de $L(Z;C)$ tel que $t = u \cdot [z]$.

Soient alors u, u' et v des éléments de $L(Z;C)$. Comme $u \cdot [z] = u' \cdot [z]$ entraîne $u = u'$ pour toute lettre z, une récurrence sur la longueur de v montre que $uv = u'v$ entraîne $u = u'$. Par ailleurs, de $vu = vu'$, on déduit $\iota(u)\iota(v) = \iota(vu) = \iota(vu') = \iota(u')\iota(v)$, d'où $\iota(u) = \iota(u')$ en simplifiant par $\iota(v)$; finalement, on a $u = u'$ d'après la formule (2) du n^o 2. ∎

Corollaire 1.4. — *Soient u un élément de $L(Z;C)$ distinct de 1, $(F_1, \ldots, F_r)$ sa V-décomposition et F une partie commutative de Z. Pour qu'il existe v dans $L(Z;C)$ avec $u = [F] \cdot v$, il faut et il suffit que l'on ait $F \subset F_1$.*

Lorsque F est contenue dans F_1, on a $u = [F] \cdot v$ avec $v = [F_1 \setminus F] \cdot [F_2]. \cdots .[F_r]$. Posons $\Phi(1) = \emptyset$; pour tout élément $v \neq 1$ de $L(Z;C)$, notons $\Phi(v)$ le premier élément de sa V-décomposition. D'après la partie (A) de la démonstration du théorème 1.2, on a $\Phi(v \cdot [z]) \supset \Phi(v)$ pour tout v dans $L(Z;C)$ et toute lettre z ; par récurrence sur la longueur de v', on en déduit $\Phi(vv') \supset \Phi(v)$ pour v, v' dans $L(Z;C)$. Enfin, on a $\Phi([F]) = F$ pour toute partie commutative F. S'il existe v dans $L(Z;C)$ avec $u = [F] \cdot v$, on a donc $F = \Phi([F]) \subset \Phi(u) = F_1$. ∎

4. Un exemple

Pour simplifier l'écriture, on écrira une suite $(w_1, \ldots, w_p)$ de mots sous la forme $w_1 \mid w_2 \mid \cdots \mid w_p$. Par exemple, l'écriture $a\,b\,c \mid d\,d\,c\,a \mid b\,b \mid c$ désigne la suite des mots $w_1 = abc$, $w_2 = ddca$, $w_3 = bb$, $w_4 = c$; on dit que la suite précédente est une décomposition du mot $w_1w_2w_3w_4 = abcddcabbc$.

Supposons l'ensemble Z totalement ordonné. A toute partie commutative F on associera le mot formé en rangeant les éléments de F par ordre croissant. Si $(F_1, \ldots, F_r)$ est la V-décomposition d'un élément de $L(Z;C)$, on l'écrira sous la forme $w_1 \mid w_2 \mid \cdots \mid w_r$ où w_j est le mot associé à F_j.

On est donc amené à considérer des mots coupés en compartiments par des barres |. Une lettre a le droit de se déplacer vers la gauche de deux manières différentes :

(a) à l'intérieur de son compartiment, elle peut sauter toutes les lettres qui lui sont strictement supérieures dans l'ordre de Z ;

(b) elle peut sauter dans le compartiment immédiatement à sa gauche si elle est distincte des lettres dudit compartiment et commute avec elles.

Une V-suite correspond ainsi à un mot compartimenté dans lequel aucune lettre n'a le droit de se déplacer. Pour déterminer la V-décomposition d'un élément $u = [z_1] \cdots [z_m]$, on détermine successivement les V-décompositions des éléments $u_j = [z_1] \cdots [z_j]$ pour $1 \leq j \leq m$. Ayant la V-décomposition de u_j, on ajoute z_{j+1} à droite ; si z_{j+1} est égale à une lettre du dernier compartiment, ou ne commute pas avec toutes les lettres dudit compartiment, on crée un nouveau compartiment à droite pour elle. Sinon, on la déplace le plus loin possible vers la gauche.

Pour un exemple, considérons un ensemble Z à cinq éléments a, b, c, d, e, ordonné par $a < b < c < d < e$; l'ensemble $C \subset Z \times Z$ se compose des cases non barrées dans le tableau suivant.

	a	b	c	d	e
a	☒	☒		☒	
b	☒	☒		☒	
c			☒		☒
d	☒	☒		☒	
e			☒		☒

On considère l'élément $u = \lambda(a\,b\,c\,c\,d\,a\,b\,c\,b\,c\,e\,d)$ de $L(Z; C)$; on a alors $u_1 = \lambda(a)$, $u_2 = \lambda(ab)$, $\ldots$ et si v_j est la V-décomposition de u_j, on a le tableau suivant :

$$\begin{array}{ll}
v_1 = a & v_7 = a\,c \mid b\,c \mid d \mid a \mid b \\
v_2 = a \mid b & v_8 = a\,c \mid b\,c \mid c\,d \mid a \mid b \\
v_3 = a\,c \mid b & v_9 = a\,c \mid b\,c \mid c\,d \mid a \mid b \mid b \\
v_4 = a\,c \mid b\,c & v_{10} = a\,c \mid b\,c \mid c\,d \mid a\,c \mid b \mid b \\
v_5 = a\,c \mid b\,c \mid d & v_{11} = a\,c \mid b\,c \mid c\,d \mid a\,c \mid b\,e \mid b \\
v_6 = a\,c \mid b\,c \mid d \mid a & v_{12} = a\,c \mid b\,c \mid c\,d \mid a\,c \mid b\,e \mid b \mid d.
\end{array}$$

Finalement, la V-décomposition de u est $a\,c \mid b\,c \mid c\,d \mid a\,c \mid b\,e \mid b \mid d$.

CHAPITRE II

FONCTION DE MÖBIUS D'UN MONOÏDE

1. Décompositions

On note M un monoïde, 1 son élément unité et M^* l'ensemble des éléments distincts de 1 dans M. On appelle *décomposition* d'un élément x de M toute suite finie $s = (x_1, \ldots, x_q)$ d'éléments de M^* telle que $x = x_1 \cdots x_q$; l'entier $q \geq 1$ s'appelle le *degré* de la décomposition s. On admet par convention une décomposition vide de 1, de degré 0. *Dans ce n*° *et le suivant, on suppose que tout élément de M n'admet qu'un nombre fini de décompositions.* ([3])

Lemme 2.1. — *L'élément* 1 *n'admet que la décomposition vide.*

Il n'existe aucune décomposition de degré 1 de 1. Supposons qu'il existe un entier $q \geq 2$ et des éléments $x_1, \ldots, x_q$ de M^* tels que $1 = x_1 \cdots x_q$; si l'on pose $a = x_1$ et $b = x_2 \cdots x_q$, on a $a \neq 1$ et $ab = 1$, d'où $b \neq 1$. Pour tout entier $m \geq 1$, on a alors $1 = (ab)^m$ d'où une décomposition de degré $2m$ de 1. Il existe donc une infinité de décompositions de 1, contrairement aux hypothèses faites. ∎

Pour tout élément x de M, on note $d(x)$ le nombre des décompositions de x, puis $d_+(x)$ celui des décompositions de degré pair et $d_-(x)$ celui des décompositions de degré impair. On a évidemment les relations

$$d(x) = d_+(x) + d_-(x), \quad d(1) = d_+(1) = 1, \quad d_-(1) = 0. \tag{1}$$

La *fonction de Möbius* du monoïde M est définie par $\mu_M(x) = d_+(x) - d_-(x)$; en particulier, on a $\mu_M(1) = 1$.

([3]) Cette hypothèse équivaut à la conjonction des ceux conditions :

(a) Pour tout $x \in M$, il n'existe qu'un nombre fini de couples (y, z) avec $x = yz$.

(b) Pour tout $x \in M$, il existe un entier $q \geq 1$ tel qu'il n'y ait aucune décomposition de longueur strictement supérieure à q de x.

L'exemple d'un groupe à deux éléments montre que la seconde condition n'est pas conséquence de la première.

2. Formule d'inversion de Möbius

On note A l'ensemble des fonctions à valeurs entières sur M. ([4]) Nous munirons A de la structure d'anneau dont les opérations sont données par les règles

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \tag{2}$$

$$(fg)(x) = \sum_{x_1 x_2 = x} f(x_1) \cdot g(x_2). \tag{3}$$

L'élément unité de l'anneau A est la fonction ϵ définie par $\epsilon(1) = 1$ et $\epsilon(x) = 0$ pour $x \neq 1$. Dans (3), la somme est étendue à tous les couples (x_1, x_2) tels que $x_1 x_2 = x$, à savoir les couples $(x, 1)$, $(1, x)$ et les décompositions de degré 2 de x. D'après le lemme 2.1, on a donc

$$(fg)(1) = f(1)g(1) \quad \text{pour } f, g \text{ dans } A. \tag{4}$$

Lemme 2.2. — *Soit ζ la fonction constante égale à 1 sur M. On a les relations*

$$\zeta\, d_+ = d_+\, \zeta = d, \qquad \zeta\, d_- = d_-\, \zeta = d - \epsilon, \tag{5}$$

$$\zeta\, \mu_M = \mu_M\, \zeta = \epsilon. \tag{6}$$

Comme on a $\zeta(1) = d(1) = d_+(1) = \epsilon(1) = 1$ et $d_-(1) = 0$, la formule (4) montre que les fonctions ζd_+, $d_+\zeta$ et d prennent la valeur 1 en 1 et que ζd_-, $d_-\zeta$ et $d - \epsilon$ s'annulent en 1. Soit x dans M^* ; on a

$$(d_+\, \zeta)(x) = \sum_{yz = x} d_+(y) = d_+(x) + \sum_{z \neq 1,\, yz = x} d_+(y). \tag{7}$$

La première somme dans (7) représente le nombre des suites $(y_1, \ldots, y_q, y, z)$ avec q pair, $y_1, \ldots, y_q$, z dans M^*, $y = y_1 \cdots y_q$ et $x = yz$; c'est aussi le nombre des décompositions $(y_1, \ldots, y_q, z)$ de degré impair de x, d'où $(d_+\,\zeta)(x) = d_+(x) + d_-(x) = d(x)$. On établit de manière analogue les relations $(\zeta\, d_+)(x) = (\zeta\, d_-)(x) = (d_-\, \zeta)(x) = d(x)$ pour $x \in M^*$. On a donc prouvé les formules (5) et l'on en déduit immédiatement (6) par différence. $\square$

Lemme 2.3 (Formule d'inversion de Möbius). — *Soient f et g deux fonctions à valeurs entières* ([5]) *sur M. Les relations suivantes sont équivalentes :*

$$\sum_{x_1 x_2 = x} g(x_2) = f(x) \quad \textit{pour tout } x \in M; \tag{8}$$

$$\sum_{x_1 x_2 = x} \mu_M(x_1) f(x_2) = g(x) \quad \textit{pour tout } x \in M. \tag{9}$$

La relation (8) s'écrit $\zeta g = f$ et (9) s'écrit $\mu_M f = g$; elles sont donc équivalentes puisque $\zeta\mu_M = \mu_M\zeta = \epsilon$ et $\epsilon f = f$, $\epsilon g = g$. $\square$

([4]) On pourrait plus généralement considérer des fonctions sur M à valeurs dans un anneau commutatif K avec élément unité. On obtient ainsi l'algèbre large du monoïde M à coefficients dans l'anneau K (*cf.* Bourbaki, Alg. II, 2ième édition, § 7, n° 10).

([5]) La même conclusion reste valable pour des fonctions f et g sur M à valeurs dans un groupe commutatif.

3. Fonction de Möbius du monoïde $L(Z;C)$

Nous allons d'abord montrer que, dans le monoïde $L(Z;C)$ défini au chapitre 1.2, tout élément n'a qu'un nombre fini de décompositions; nous utiliserons pour cela l'homomorphisme π de $L(Z;C)$ dans $\mathrm{Ab}(Z)$. Soient f dans $\mathrm{Ab}(Z)$ et $z_1, \ldots, z_p$ les éléments z de Z tels que $f(z) \neq 0$; on pose $m_i = f(z_i)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $m = m_1 + \cdots + m_p$. Les éléments u de $L(Z;C)$ tels que $\pi(u) = f$ sont de la forme $[t_1] \cdots [t_m]$ avec $t_1, \ldots, t_m$ dans Z, la lettre z_i apparaissant m_i fois dans le mot $t_1 \cdots t_m$ pour $1 \leq i \leq p$; par suite $\pi^{-1}(f)$ est fini pour tout $f \in L(Z;C)$. Soient alors u dans $L(Z;C)$ et $f = \pi(u)$; pour toute décomposition $(u_1, \ldots, u_q)$ de u dans $L(Z;C)$, la suite $(\pi(u_1), \ldots, \pi(u_q))$ est une décomposition de f dans $\mathrm{Ab}(Z)$; comme f n'a qu'un nombre fini de décompositions dans $\mathrm{Ab}(Z)$ et que pour $f_1, \ldots, f_q$ données, il n'y a qu'un nombre fini de solutions du système $\pi(u_1) = f_1, \ldots, \pi(u_q) = f_q$, l'élément u n'a qu'un nombre fini de décompositions dans $L(Z;C)$.

Dans toute la suite, nous notons $|F|$ le nombre d'éléments d'un ensemble fini F.

THÉORÈME 2.4. — *La fonction de Möbius du monoïde $L(Z;C)$ est la fonction μ donnée par $\mu([F]) = (-1)^{|F|}$ pour toute partie commutative F de Z et $\mu(u) = 0$ dans les autres cas.*

Soit μ la fonction sur $L(Z;C)$ définie dans l'énoncé et soit ζ la fonction constante égale à 1 sur $L(Z;C)$. Soient u un élément de $L(Z;C)$ et $(F_1, \ldots, F_r)$ sa V-décomposition; d'après les corollaires 1.3 et 1.4, les couples (F, v) où la partie commutative F de Z et v dans $L(Z;C)$ satisfont à $[F] \cdot v = u$ sont les couples $(F, [F_1 \setminus F] \cdot [F_2] \cdots [F_r])$ avec $F \subset F_1$. On a donc $(\mu\zeta)(u) = \sum\limits_{F \subset F_1} (-1)^{|F|}$; si $u = 1$, on a $F_1 = \emptyset$ et la somme précédente vaut 1; sinon, notons n le cardinal de F_1, d'où $(\mu\zeta)(u) = \sum\limits_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} = (1-1)^n = 0$. On a donc prouvé $\mu\zeta = \epsilon$; si μ' est la fonction de Möbius de $L(Z;C)$, on a alors $\mu' = \epsilon\mu' = (\mu\zeta)\mu' = \mu(\zeta\mu') = \mu\epsilon = \mu$. □

4. Cas particuliers

(a) Lorsque C est vide, le monoïde $L(Z;C)$ se réduit à $\mathrm{Mo}(Z)$, les parties commmutatives ont un élément et l'on a $\mu(z) = -1$ pour tout lettre z, puis $\mu(1) = 1$ et $\mu(w) = 0$ pour tout mot de longueur supérieure ou égale à 2. Supposons en particulier que z soit un ensemble fini à n éléments $T_1, \ldots, T_n$; l'application $f \mapsto \sum\limits_{w \in \mathrm{Mo}(Z)} f(w) \cdot w$ est un isomorphisme de l'anneau A défini au n$^{\mathrm{o}}$ 2 (pour $M = \mathrm{Mo}(Z)$) sur l'anneau des séries formelles non commutatives à coefficients entiers en $T_1, \ldots, T_n$. A la fonction ζ correspond la série $\sum\limits_{w} w = \sum\limits_{r=0}^{\infty} \sum\limits_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} T_{i_1} \cdots T_{i_r}$; à la fonction μ correspond la série $1 - \sum\limits_{i=1}^{n} T_i$, d'où l'identité $\sum\limits_{w} w = (1 - T_1 - \cdots - T_n)^{-1}$.

(b) Supposons maintenant que C se compose de tous les couples d'éléments distincts de Z. L'application π est un isomorphisme de $L(Z;C)$ sur $\mathrm{Ab}(Z)$, qui nous permettra d'identifier ces deux monoïdes. Toute partie finie non vide F de Z est commutative et $[F]$ est la fonction égale à 1 sur F et à 0 sur $Z \setminus F$. Le théorème 2.4 détermine donc la fonction de Möbius sur $\mathrm{Ab}(Z)$; lorsque Z est l'ensemble des nombres premiers, l'application $f \mapsto \prod_{p\in Z} p^{f(p)}$ est un isomorphisme de $\mathrm{Ab}(Z)$ sur le monoïde multiplicatif des entiers $n \geq 1$ et l'on retrouve les résultats connus sur la fonction de Möbius proprement dite.

Particularisons encore en supposant que Z a n éléments $T_1, \ldots, T_n$. L'anneau A défini au n$^\text{o}$ 2 pour $M = \mathrm{Ab}(Z)$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}[[T_1, \ldots, T_n]]$ des séries formelles commutatives à coefficients entiers en $T_1, \ldots, T_n$, la fonction f correspondant à la série

$$\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \geq 0} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) T_1^{\alpha_1} \cdots T_n^{\alpha_n}.$$

La fonction ζ correspond à

$$\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \geq 0} T_1^{\alpha_1} \cdots T_n^{\alpha_n}$$

et μ à

$$\sum_{F \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|F|} \prod_{j\in F} T_j = \prod_{i=1}^{n} (1 - T_i).$$

Supposant toujours Z fini, on peut appliquer la formule d'inversion de Möbius à deux fonctions f et g nulles sur les éléments de $\mathrm{Ab}(Z)$ qui ne sont pas de la forme $[F]$ avec $F \subset Z$. On retrouve le résultat connu : si f et g sont deux fonctions définies sur l'ensemble des parties d'un ensemble fini Z, les relations $\sum_{F' \subset F} f(F') = g(F)$ et $\sum_{F' \subset F} (-1)^{-|F'|} g(F \setminus F') = f(F)$ sont équivalentes (*principe d'inclusion et d'exclusion*).

CHAPITRE 3

CIRCUITS DANS UN GRAPHE

1. Définitions

Un *graphe orienté* G est un quadruplet (S, A, σ, β) où S et A sont deux ensembles et σ, β deux applications de A dans S. Les éléments de S sont appelés les *sommets* et ceux de A les *arêtes* du graphe G ; si a est une arête, le sommet $\sigma(a)$ est appelé sa *source* et le sommet $\beta(a)$ son *but*; on dit aussi que l'arête a joint le sommet s au sommet t si l'on a $\sigma(a) = s$ et $\beta(a) = t$.

Un *flot* dans G est une famille $(f_{s,i})_{s\in S,\, 1\leq i\leq h(s)}$ ayant les propriétés suivantes :

(a) h est une fonction sur S à valeurs entières positives ;

(b) l'ensemble Φ des sommets s tels que $h(s) \neq 0$ est fini ;

(c) pour tout $s \in \Phi$ et tout entier i avec $1 \leq i \leq h(s)$, l'élément $f_{s,i}$ est une arête de source s.

Soient $f = (f_{s,i})_{s\in S,\, 1\leq i\leq h(s)}$ et $f' = (f'_{s,i})_{s\in S,\, 1\leq i\leq h'(s)}$ deux flots ; leur produit ff' est le flot $f'' = (f''_{s,i})_{s\in S,\, 1\leq i\leq h"(s)}$ défini par

$$h''(s) = h(s) + h'(s); \tag{1}$$

$$f''_{s,i} = \begin{cases} f_{s,i} & \text{pour } 1 \leq i \leq h(s)\,; \\ f'_{s,i-h(s)} & \text{pour } h(s)+1 \leq i \leq h(s)+h'(s). \end{cases} \tag{2}$$

L'ensemble des flots est un monoïde, ayant pour unité le flot correspondant à $h = 0$.

Soit $f = (f_{s,i})_{s\in S,\, 1\leq i\leq h(s)}$ un flot. L'entier $\sum\limits_{s\in S} h(s)$ s'appelle la *longueur* du flot. De plus, la *matrice d'incidence* $N(f) = (n_{s,t})_{s,t\in S}$ est définie ainsi : si s et t sont deux sommets, l'entier $n_{s,t}$ est le nombre d'entiers i tels que $1 \leq i \leq h(s)$ et $\beta(f_{s,i}) = t$ (autrement dit, le nombre d'arêtes du flot joignant s à t). On a évidemment

$$\sum_{t\in S} n_{s,t} = h(s); \tag{3}$$

si l'on a aussi

$$\sum_{s\in S} n_{s,t} = h(t) \quad \text{(pour tout } t \in S), \tag{4}$$

on dit que f est un *circuit*. La formule $N(ff') = N(f) + N(f')$ montre que si f et f' sont des flots et si deux des trois flots f, f', ff' sont des circuits, le troisième est aussi un circuit. En particulier, les circuits forment un sous-monoïde du monoïde des flots.

Remarque 3.1. — Pour tout sommet s, soit T_s le monoïde libre construit sur l'ensemble des arêtes de source s. Soit le monoïde produit $\prod_{s\in S} T_s$. Le monoïde des flots est par définition le sous-monoïde de T formé des familles $(t_s)_{s\in S}$ telles que l'ensemble $\{s \mid t_s \neq 1\}$ soit fini. Comme la multiplication est simplifiable dans un monoïde libre, elle l'est dans le monoïde des flots et *a fortiori* dans le sous-monoïde des circuits. Ce dernier cas est aussi une conséquence du théorème 3.3 et du corollaire 1.3.

2. Structure des flots

Soient a une arête et $\overline{s}$ sa source; le flot $b(a)$ est par définition le flot $(f_{s,i})_{s\in S,\, 1\leq i\leq h(s)}$ tel que $h(\overline{s}) = 1$, $h(s) = 0$ pour $s \neq \overline{s}$ et $f_{\overline{s},i} = a$. Il est immédiat que $b(a)$ et $b(a')$ commutent si les arêtes a et a' ont des sources distinctes. De plus, un flot quelconque $f = (f_{s,i})_{s\in S,\, 1\leq i\leq h(s)}$ peut se mettre sous forme de produit [6]

$$f = \prod_{s\in S} \prod_{i=1}^{h(s)} b(f_{s,i}). \tag{5}$$

On dit qu'un flot $f = (f_{s,i})_{s\in S,\, 1\leq i\leq h(s)}$ est *simple* si h ne prend que les valeurs 0 et 1; il revient au même de dire que f est de la forme $\prod_{s\in\Phi} b(a_s)$ où Φ est un ensemble fini de sommets et où l'arête a_s est de source s pour tout $s \in \Phi$; l'ensemble Φ s'appelle le *support* du flot simple f.

Lemme 3.2. — *Soit f un flot. Il existe une suite $(f_1, \dots, f_m)$ de flots simples et une seule, telle que $f = f_1 \cdots f_m$ et que le support de f_i contienne celui de f_{i+1} pour $1 \leq i \leq m-1$.*

Représentons f sous la forme (5) et notons m le plus grand des entiers $h(s)$. Pour $1 \leq i \leq m$, soit Φ_i l'ensemble des sommets s tels que $h(s) \geq i$ et soit f_i le flot simple $\prod_{s\in\Phi_i} b(f_{s,i})$. Il est immédiat que $(f_1, \dots, f_m)$ est la suite cherchée. □

Théorème 3.3. *Le monoïde des flots sur le graphe G est engendré par l'ensemble des flots $b(a)$ (pour $a \in A$), soumis aux relations de commutation $b(a)\cdot b(a') = b(a')\cdot b(a)$ pour tous les couples d'arêtes a et a' ayant des sources distinctes.*

---

[6] Pour tout sommet s, posons $u(s) = \prod_{i=1}^{h(s)} b(f_{s,i})$. Les flots $u(s)$ commutent deux à deux et il existe une partie *finie* S' de S telle que $u(s) = 1$ pour tout $s \in S \setminus S'$. Le produit $\prod_{s\in S} u(s)$ est donc défini sans ambiguïté.

Soit C l'ensemble des couples d'arêtes (a, a') telles que $\sigma(a) \neq \sigma(a')$. Lorsque (a, a') appartient à C, on a $b(a) \cdot b(a') = b(a') \cdot b(a)$, donc l'application b se prolonge en un homomorphisme b' de $L(A; C)$ dans le monoïde des flots. Avec les notations de 1.3, les parties commutatives de A sont de la forme $F = \{a_s \mid s \in \Phi\}$ où Φ est un ensemble fini de sommets et a_s une arête de source s pour tout $s \in \Phi$; de plus, on a $b'[F] = \prod_{s\in\Phi} b(a_s)$. Enfin, si F et F' sont deux parties commutatives de A, la partie F est contiguë à F' si et seulement si le support de $b'[F]$ contient celui de $b'[F']$. Par suite, l'homomorphisme b' transforme la V-décomposition d'un élément u de $L(A; C)$ en la décomposition du lemme 3.2 du flot $b'(u)$. Le théorème 1.2 sur les V-décompositions entraîne donc que b' est bijectif. $\square$

3. Structure des circuits

Soient Φ un ensemble fini non vide de sommets, u une permutation de Φ et pour tout $s \in \Phi$, soit a_s une arête joignant s à $u(s)$; notons $\mathbf{a}$ la famille $(a_s)_{s\in\Phi}$; on posera $c(\Phi, u, \mathbf{a}) = \prod_{s\in\Phi} b(a_s)$. Par abus de notation, nous écrirons parfois $c(\Phi, u, a_s)$ au lieu de $c(\Phi, u, \mathbf{a})$. Du fait que u est une permutation de Φ, on obtient là un *circuit* simple ; de plus, tout circuit simple s'obtient ainsi d'une manière et d'une seule. On dira que le circuit simple $c(\Phi, u, \mathbf{a})$ est *contigu* au circuit simple $c(\Phi', u', \mathbf{a}')$ si, pour tout sommet $s' \in \Phi'$, il existe un entier $m \geq 1$ avec $u'^m(s') \in \Phi$.

PROPOSITION 3.4. — *Soit f un circuit. Il existe une suite $(f_1, \ldots, f_m)$ de circuits simples et une seule, telle que $f = f_1 \cdots f_m$ et que f_i soit contigu à f_{i+1} pour $1 \leq i \leq m-1$.*

(A) *Existence de la décomposition :*

Nous raisonnerons par récurrence sur la longueur ℓ de f, le cas $\ell = 0$ étant trivial. Supposons donc $\ell \geq 1$ et l'existence d'une décomposition prouvée pour les circuits de longueur inférieure à ℓ.

Posons $f = (f_{s,i})_{s\in S,\, 1\leq i\leq h(s)}$ et notons Σ l'ensemble des sommets s tels que $h(s) \neq 0$. Si une arête $f_{s,i}$ joint s à t, on a $n_{s,t} \geq 1$; comme f est un circuit, on a $h(t) = \sum_{s'} n_{s',t}$ d'où $h(t) \geq 1$ et finalement $t \in \Sigma$. Il existe donc une application v de Σ dans lui-même telle que l'arête $f_{s,1}$ joigne s à $v(s)$.

La suite des ensembles finis $\Sigma, v(\Sigma), v^2(\Sigma), \ldots$ est décroissante ; il existe donc un entier $m_0 \geq 0$ et une partie non vide Φ de Σ tels que $v^m(\Sigma) = \Phi$ pour $m \geq m_0$. De plus, v induit une permutation u de Φ et par suite $f_1 = \prod_{s\in\Phi} b(f_{s,1})$ est un circuit simple. Il existe un circuit f' tel que $f = f_1 f'$ et comme f' est de longueur strictement inférieure à ℓ, il existe par l'hypothèse de récurrence des circuits simples $f_2, \ldots, f_m$ tels que $f' = f_2 \cdots f_m$ et que f_i soit contigu à f_{i+1} pour $2 \leq i \leq m-1$. Il reste donc à prouver que f_1 est contigu à f_2.

Posons $f_2 = c(\Phi', u', \mathbf{a}')$; comme $f = f_1 f_2 \cdots f_m$, il est clair que l'on a $a'_s = f_{s,1}$, d'où $u'(s) = v(s)$ pour $s \in \Phi' \cap \Phi^c$. (7) Pour tout s dans

(7) Si U est une partie de S, on note U^c son complémentaire dans S.

$\Phi' \cap \Phi^c$, il existe un entier $m \geq 1$ tel que les sommets $s, v(s), \ldots, v^{m-1}(s)$ appartiennent à $\Phi' \cap \Phi^c$ et que $v^m(s)$ appartienne à Φ : cela résulte aussitôt de la construction de Φ. On a alors $v^{i+1}(s) = u'(v^i(s))$ pour $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, d'où $u'^m(s) = v^m(s) \in \Phi$. On a donc prouvé que f_1 est contigu à f_2.

(B) *Unicité de la décomposition* :

En raisonnant par récurrence sur la longueur de f, on se ramène à prouver l'assertion suivante : *soient* $g_1, \ldots, g_n$ *des circuits simples tels que* $f = g_1 \cdots g_n$ *et que* g_j *soit contigu à* g_{j+1} *pour* $1 \leq j \leq n-1$. *On a alors* $g_1 = f_1$ (noter que la multiplication est simplifiable dans le monoïde des circuits d'après la remarque 3.1).

Sous les hypothèses précédentes, posons $g_j = c(\Phi_j, u_j, a_{s,j})$ et $\Psi_j = \Phi_j \cap (\Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_{j-1})^c$ pour $1 \leq j \leq n$. La relation $f = g_1 \cdots g_n$ entraîne $\Sigma = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_n = \Psi_1 \cup \cdots \cup \Psi_n$ et $f_{s,1} = a_{s,j}$, d'où $v(s) = u_j(s)$, pour $1 \leq j \leq n$ et $s \in \Psi_j$. Soit $s \in \Phi_j$ (avec $2 \leq j \leq n$) ; comme g_{j-1} est contigu à g_j, il existe un entier $m \geq 0$ tel que $(u_j)^m(s) \in \Phi_{j-1}$; si l'on note μ le plus petit des entiers positifs m tels que $(u_j)^m(s)$ appartienne à $\Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_{j-1}$, on a $(u_j)^\mu(s) = v^\mu(s)$, d'où $v^\mu(s) \in \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_{j-1}$, on a $(u_j)^\mu(s) = v^\mu(s)$, d'où $v^\mu(s) \in \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_{j-1}$. Ce résultat entraîne que, pour tout $s \in \Sigma$, il existe un entier $m(s) \geq 0$ avec $v^{m(s)}(s) \in \Phi_1$. Or, on a $v(\Phi_1) = \Phi_1$ car v coïncide sur Φ_1 avec la permutation u_1 de Φ_1 ; pour tout entier $m \geq 0$, on a donc $\Phi_1 = v^m(\Phi_1) \subset v^m(\Sigma)$, d'où $\Phi_1 \subset \Phi = \bigcap\limits_{m \geq 0} v^m(\Sigma)$. Par ailleurs Σ est fini et pour $m \geq \sup m(s)$, on a $v^m(s) \in \Phi_1$ pour tout $s \in \Sigma$, d'où $\Phi \subset \Phi_1$.

On a donc prouvé $\Phi = \Phi_1$; comme on a aussi $f_{s,1} = a_{s,1}$ pour tout $s \in \Phi_1$, on a $g_1 = f_1$. $\square$

4. Cycles

On dit qu'un flot est un *cycle* s'il existe des sommets distincts $s_1, \ldots, s_m$ et des arêtes $a_1, \ldots, a_m$ tels que $z = b(a_1) \cdots b(a_m)$ et que a_1 joigne s_1 à s_2, a_2 joigne s_2 à s_3, ... , a_{m-1} joigne s_{m-1} à s_m et a_m joigne s_m à s_1. Lorsqu'il y a au plus une arête de source et de but donnés, on pourra représenter sans ambiguïté le cycle précédent par la notation $[s_1 \cdots s_m]$ où n'interviennent que les sommets des cycles.

On notera Z l'ensemble des cycles et D l'ensemble des couples de cycles n'ayant aucun sommet en commun ; il est immédiat que l'on a

$$zz' = z'z \quad \text{pour} \quad (z, z') \in D. \tag{6}$$

De plus, les cycles ne sont autres que les circuits simples de la forme $c(\Phi, u, \mathbf{a})$ où u est une permutation circulaire de Φ. La décomposition usuelle d'une permutation en cycles montre alors que tout circuit simple s'écrit de manière unique sous la forme $[T] = \prod_{z \in T} z$, où T est une partie finie non vide de Z telle que $(z, z') \in D$ pour z, z' distincts dans T. Si $[T']$ est un autre circuit simple, il est immédiat que $[T]$ est contigu à $[T']$ si et seulement si, pour tout $z' \in T'$, il existe $z \in T$ avec $(z, z') \notin D$.

D'après la relation (6), il existe un homomorphisme φ de $L(Z;D)$ dans le monoïde des circuits qui applique tout cycle sur lui-même. Les remarques précédentes montrent que φ transforme la V-décomposition d'un élément u de $L(Z;D)$ en la décomposition du circuit $\varphi(u)$ décrite dans la proposition 3.4. Le théorème 1.2 sur les V-décompositions et la proposition 3.4 entraînent alors le théorème suivant.

THÉORÈME 3.5. — *Le monoïde des circuits sur le graphe G est engendré par l'ensemble des cycles soumis aux relations de commutation $zz' = z'z$ pour tous les couples de cycles z et z' n'ayant aucun sommet en commun.*

Remarque 3.6. — Le théorème précédent permet de déterminer facilement la fonction de Möbius μ du monoïde des circuits. En effet, utilisant le théorème 2.4, on voit d'abord que l'on a $\mu(z_1 \cdots z_r) = (-1)^r$ si $z_1, \ldots, z_r$ sont des cycles n'ayant deux à deux aucun sommet en commun et que l'on a $\mu(f) = 0$ si le circuit f n'est pas de la forme précédente. Or la signature d'une permutation circulaire portant sur n éléments est égale à $(-1)^{n+1}$. Utilisant la décompositon d'un circuit simple en cycles, on obtient le résultat définitif suivant.

(a) *Si le circuit f est simple, de la forme $f = c(\Phi, u, \mathbf{a})$, on a $\mu(f) = \epsilon \cdot (-1)^{|\Phi|}$ où ϵ est la signature de la permutation u.*

(b) *Si le circuit f n'est pas simple, on a $\mu(f) = 0$.*

5. Relation avec les chemins

Nous allons d'abord rappeler les définitions usuelles. A tout sommet s on fait par convention correspondre un chemin e_s de longueur 0 et l'on pose $\sigma(e_s) = \beta(e_s) = s$. Pour tout entier $m \geq 1$, un *chemin* de longueur m est une suite $c = (a_1, \ldots, a_m)$ d'arêtes telles que $\beta(a_i) = \sigma(a_{i+1})$ pour $1 \leq i \leq m-1$; il existe alors des sommets $s_0, s_1, \ldots, s_m$ tels que a_i joigne s_{i-1} à s_i pour $1 \leq i \leq m$; on dit que $s_0, s_1, \ldots, s_m$ sont les sommets de c et que s_0 est la source $\sigma(c)$ et s_m le but $\beta(c)$ de c. On dit aussi que c joint s_0 à s_m.

Le *produit des chemins* est défini de la manière suivante : soient s, t et u des sommets, c un chemin joignant s à t et c' un chemin joignant t à u. Si c est de longueur 0, on pose $cc' = c'$; si c' est de longueur 0, on pose $cc' = c$; si $c = (a_1, \ldots, a_m)$ et $c' = (a'_1, \ldots, a'_n)$ sont de longueur non nulle, la suite $(a_1, \ldots, a_m, a'_1, \ldots, a'_n)$ est un chemin noté cc'. Dans tous les cas, cc' joint s à u et sa longueur est la somme des longueurs de c et c'. Les chemins de longueur 1 sont des arêtes et un chemin $c = (a_1, \ldots, a_m)$ n'est autre que le produit $a_1 \cdots a_m$.

Soit s un sommet. Un *lacet* de source s est un chemin joignant s à s. Pour la multiplication précédemment définie, les lacets de source s forment un monoïde, d'élément unité e_s. Soit c un lacet de source s, de sommets $s_0, s_1, \ldots, s_m$ (avec $s_0 = s_m = s$) ; on dit que c est *irréductible* si l'on a $m \geq 1$ et $s_i \neq s$ pour $1 \leq i \leq m-1$. Tout lacet de source s s'écrit de manière unique sous la forme $c_1 \cdots c_p$, où $c_1, \ldots, c_p$ sont des lacets irréductibles : il suffit pour le voir de couper un lacet aux endroits où il repasse en s.

A tout chemin $c = a_1 \cdots a_m$, nous ferons correspondre le flot $b(c) = b(a_1) \cdots b(a_m)$. On voit immédiatement que $b(c)$ est un circuit si c est un lacet et que l'on a $b(cc') = b(c) \cdot b(c')$ lorsque le produit des chemins c et c' est défini. De plus $b(e_t)$ est le flot nul pour tout sommet t.

PROPOSITION 3.7. — *Soit $f = (f_{s,i})_{s \in S, 1 \leq i \leq h(s)}$ un flot et t un sommet. On note $\mathcal{C}_t$ l'ensemble des chemins c de source t pour lesquels le flot $b(c)$ divise f à gauche.* [8] *Il existe un chemin $\gamma = \alpha_1 \cdots \alpha_\mu$ et un seul tel que $\mathcal{C}_t$ se compose des chemins $\gamma_m = \alpha_1 \cdots \alpha_m$ pour $m \in \{0, 1, \ldots, \mu\}$.*

Notons ℓ la longueur de f. Pour tout chemin c, le flot $b(c)$ a même longueur que c; il en résulte que tout chemin c tel que $b(c)$ divise f à gauche est de longueur au plus égale à ℓ. De plus, on a $e_t \in \mathcal{C}_t$ donc $\mathcal{C}_t$ n'est pas vide. Il existe donc dans $\mathcal{C}_t$ un chemin de longueur maximale. Si $\gamma = \alpha_1 \cdots \alpha_\mu$ est un tel chemin, nous poserons $\gamma_m = \alpha_1 \cdots \alpha_m$ pour $m \in \{0, 1, \ldots, \mu\}$. Il est clair que chacun des chemins $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_\mu$ appartient à $\mathcal{C}_t$ et la proposition 3.7 résulte alors du lemme suivant.

LEMME 3.8. — *Pour tout entier $m \geq 0$ il existe au plus un chemin de longueur m dans $\mathcal{C}_t$.*

Soient c un chemin de longueur m, $a_1, \ldots, a_m$ ses arêtes et $s_0, s_1, \ldots, s_m$ ses sommets. Pour tout sommet s, on note $k(s)$ le nombre de fois que s apparaît dans la suite $s_0, s_1, \ldots, s_{m-1}$ et l'on range sous forme d'une suite strictement croissante $(u(s,1), \ldots, u(s,k(s)))$ les entiers i tels que $1 \leq i \leq m$ et $s_{i-1} = s$. Soit i un entier compris entre 0 et $m-1$; il existe un entier k_i et un seul tel que $1 \leq k_i \leq k(s_i)$ et $u(s_i, k_i) = i+1$ et k_i représente le nombre de fois que le sommet s_i apparaît dans la suite $s_0, s_1, \ldots, s_i$. On a

$$f = \prod_{s \in S} \prod_{i=1}^{h(s)} b(f_{s,i}) \tag{7}$$

$$b(c) = \prod_{s \in S} \prod_{j=1}^{k(s)} b(a_{u(s,j)}) \tag{8}$$

et par suite, le flot $b(c)$ divise à gauche le flot f si et seulement si l'on a $k(s) \leq h(s)$ et $a_{u(s,j)} = f_{s,j}$ pour $j \in \{1, \ldots, k(s)\}$, quel que soit le sommet s. Ces conditions équivalent à

$$a_{i+1} = f_{s_i,k_i} \qquad \text{pour } 0 \leq i \leq m-1 \tag{9}$$

et entraînent

$$s_{i+1} = \beta(f_{s_i,k_i}) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq m-1. \tag{10}$$

[8] Nous disons que f' divise f à gauche s'il existe f' avec $f = f'f''$.

Comme on a $s_0 = t$ et $k_0 = 1$ et que k_i ne dépend que des sommets s_0, s_1, ... , s_i, les formules récurrentes (9) et (10) montrent qu'il existe au plus un chemin c de longueur m dans $\mathcal{C}_t$. ∎

PROPOSITON 3.9. — *On conserve les notations de* 3.7 *et l'on suppose que f est un circuit et que $h(t)$ est non nul. Le chemin γ est alors un lacet et il existe dans $\mathcal{C}_t$ un lacet irréductible et un seul.*

Pour montrer que γ est un lacet, nous raisonnerons par l'absurde en montrant que, si un chemin c de longueur m appartient à $\mathcal{C}_t$ et n'est pas un lacet, il existe dans $\mathcal{C}_t$ un chemin de longueur $m+1$.

Soient donc $a_1, \ldots, a_m$ les arêtes et $s_0, s_1, \ldots, s_m$ les sommets de c. Pour tout sommet $s \neq s_m$, notons $k(s)$ le nombre de fois que s apparaît dans la suite $s_0, s_1, \ldots, s_{m-1}$ et posons $u(s) = \prod\limits_{i=1}^{k(s)} b(f_{s,i})$. Par ailleurs, notons k le nombre de fois que s_m apparaît dans la suite $s_0, s_1, \ldots, s_{m-1}$ et rangeons sous forme d'une suite strictement croissante $i_1, \ldots, i_k$ les entiers i tels que $1 \leq i \leq m-1$ et $s_i = s_m$. On a alors

$$b(c) = \prod_{s \neq s_m} u(s) \cdot \prod_{r=1}^{k} b(f_{s_m,r}) \tag{11}$$

(le second terme disparaît si $k = 0$ et l'on a $s_0 \neq s_m$).

Par ailleurs, notons $(n'_{s,s'})$ la matrice d'incidence de $b(c)$ et $(n_{s,s'})$ celle de f. Comme $b(c)$ divise f, on a $n'_{s,s'} \leq n_{s,s'}$ et comme f est un circuit, on a $\sum_{s \in S} n_{s,s'} = h(s')$. Or les arêtes $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}, a_m$ ont pour but le sommet s_m, d'où $k+1 \leq \sum_{s \in S} n'_{s,s_m} \leq \sum_{s \in S} n_{s,s_m} = h(s_m)$. L'arête $a_{m+1} = f_{s_m,k+1}$ est donc définie et la formule (11) prouve que le flot $b(c \cdot a_{m+1}) = b(c) \cdot b(a_{m+1})$ divise à gauche f. Par conséquent, le chemin $a_1 \cdots a_m a_{m+1}$ de longueur $m+1$ appartient à $\mathcal{C}_t$.

On a donc prouvé que γ est un lacet. Comme on a $h(t) \geq 1$, l'arête $f_{t,1}$ appartient à $\mathcal{C}_t$, d'où $\mu \geq 1$. Le lacet γ se décompose de manière unique en un produit de lacets irréductibles $c_1 \cdots c_p$ (avec $p \geq 1$). Soit c un lacet irréductible de source t. Pour que c appartienne à $\mathcal{C}_t$, il faut et il suffit qu'il eixste un lacet c' de source t avec $cc' = \gamma = c_1 \cdots c_p$, ce qui équivaut à $c = c_1$. ∎

6. Décomposition descendante d'un circuit

On suppose dans ce n° *que l'ensemble S des sommets du graphe G est totalement ordonné.* On appelle *décomposition descendante* d'un circuit f toute suite $(c_1, \ldots, c_p)$ de lacets irréductibles qui possède les propriétés suivantes :

(a) on a $f = b(c_1) \cdots b(c_p)$;
(b) on a $\sigma(c_1) \geq \cdots \geq \sigma(c_p)$;
(c) pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, la source $\sigma(c_i)$ est le plus grand sommet du lacet c_i.

Posons $f = (f_{s,i})_{s \in S,\, 1 \leq i \leq h(s)}$; la formule $f = b(c_1) \cdots b(c_p)$ montre que l'on a $h(s) \neq 0$ si et seulement si s est un sommet de l'un des lacets $c_1, \ldots, c_p$; il résulte alors de (b) et (c) que l'on a $s \leq \sigma(c_1)$ pour tout sommet s tel que $h(s) \neq 0$.

PROPOSITION 3.10. — *Tout circuit f possède une décomposition descendante et une seule.*

Nous noterons ℓ la longueur de f et nous supposerons $\ell \neq 0$, le cas $\ell = 0$ étant trivial. Nous noterons N l'ensemble des sommets s tels que $h(s) \neq 0$; il est fini, donc possède un plus grand éléments s_1.

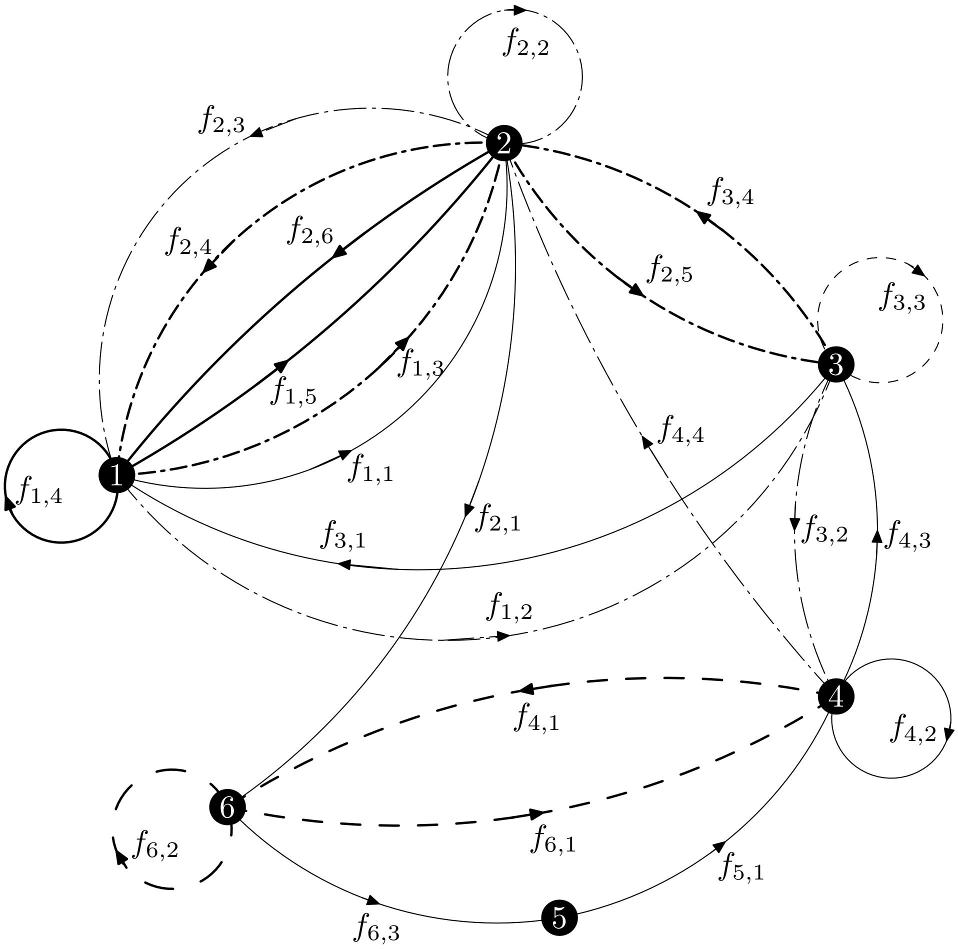
(A) *Unicité de la décomposition descendante :*

Raisonnant par récurrence sur ℓ, il suffit d'établir l'assertion suivante : *si $(c_1, \ldots, c_p)$ et $(c'_1, \ldots, c'_{p'})$ sont des décompositions descendantes de f, on a $c_1 = c'_1$.* Sous l'hypothèse faite, les lacets irréductibles c_1 et c'_1 sont tels que $b(c_1)$ et $b(c'_1)$ divisent à gauche f ; la remarque précédant la proposition 3.10 montre que c_1 et c'_1 ont tous deux pour source le sommet s_1 ; on a donc $c_1 = c'_1$ d'après la proposition 3.9.

(B) *Existence de la décomposition descendante :*

Comme on a $h(s_1) \neq 0$, il existe un lacet irréductible c_1 de source s_1 et un circuit f' tels que $f = b(c_1) \cdot f'$. Comme f' est de longueur strictement inférieure à ℓ, on peut admettre par hypothèse de récurrence que f' possède une décomposition descendante $(c_2, \ldots, c_p)$. On a $f' = b(c_2) \cdots b(c_p)$, d'où $f = b(c_1)b(c_2) \cdots b(c_p)$. Les sommets de c_1 appartenant à N, la source $s_1 = \sigma(c_1)$ de c_1 est le plus grand des sommets de c_1 ; comme $\sigma(c_2) \in N$, on a $\sigma(c_1) = s_1 \geq \sigma(c_2)$ et par suite $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ est une décomposition descendante de f. $\square$

Exemple 3.11. — Nous considérons le graphe G de sommets $1, 2, 3, 4, 5, 6$ avec l'ordre naturel sur les sommets et dont les arêtes sont figurées sur le dessin ci-après ; on considère sur G le flot f représenté aussi sur le même dessin. La décomposition descendante de f est égale à $(c_1, \ldots, c_7)$ avec le tableau suivant donnant les arêtes et les sommets de ces lacets et le code de la figure.



Arêtes	Sommets	Code
$c_1 = f_{6,1}f_{4,1}$	6 4 6	
$c_2 = f_{6,2}$	6 6	
$c_3 = f_{6,3}f_{5,1}f_{4,2}f_{4,3}f_{3,1}f_{1,1}f_{2,1}$	6 5 4 4 3 1 2 6	
$c_4 = f_{4,4}f_{2,2}f_{2,3}f_{1,2}f_{3,2}$	4 2 2 1 3 4	
$c_5 = f_{3,3}$	3 3	
$c_6 = f_{3,4}f_{2,4}f_{1,3}f_{2,5}$	3 2 1 2 3	
$c_7 = f_{2,6}f_{1,4}f_{1,5}$	2 1 1 2	

CHAPITRE IV

RÉARRANGEMENTS DE SUITES

Dans tout ce chapitre, on note X un ensemble ; à partir du n° 3, on suppose que X est totalement ordonné. Dans les exemples, X est l'ensemble des entiers, avec l'ordre naturel.

1. Monoïde des réarrangements

Les constructions de ce n° s'obtiennent en appliquant les constructions générales du chapitre III au graphe $G = (S, A, \sigma, \beta)$ associé de la manière suivante à X : on a $S = X$, $A = X \times X$, $\sigma(x, y) = x$ et $\beta(x, y) = y$ pour x, y dans X. De manière plus imagée, X est l'ensemble des sommets du graphe G ; quels que soient les sommets x et y, il existe une arête unique $a_{x,y}$ joignant x à y.

Un *flot* est une application f de X dans $\mathrm{Mo}(X)$ telle que l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) \neq 1\}$ soit fini. Le produit de deux flots f et f' est défini par $(ff')(x) = f(x) \cdot f'(x)$ pour tout x dans X. L'ensemble des flots, avec cette multiplication, est un monoïde noté $F(X)$. Si f est un flot et x, y des éléments de X, on note $\theta_x(f)$ la longueur du mot $f(x)$ et $n_{x,y}(f)$ le nombre de fois que la lettre y intervient dans le mot $f(x)$. On a alors les relations

$$\theta_x(f) = \sum_{y \in X} n_{x,y}(f) \tag{1}$$

$$\theta_x(ff') = \theta_x(f) + \theta_x(f') \tag{2}$$

$$n_{x,y}(ff') = n_{x,y}(f) + n_{x,y}(f'), \tag{3}$$

où f et f' sont deux flots et x, y deux éléments de X. Pour tout flot f, l'application $x \mapsto \theta_x(f)$ est un élément de $\mathrm{Ab}(X)$ et θ est un homomorphisme de $F(X)$ dans $\mathrm{Ab}(X)$.

Les circuits, que nous préférons appeler ici *réarrangements*, sont les flots f satisfaisant à la relation

$$\theta_y(f) = \sum_{x \in X} n_{x,y}(f) \quad \text{(pour tout } y \in X\text{)}; \tag{4}$$

cette relation équivaut à la suivante

$$\theta(f) = \sum_{x \in X} \epsilon(f(x)). \tag{5}$$

Les réarrangements forment un sous-monoïde $Q(X)$ de $F(X)$; on l'appelle *monoïde des rérrangements.*

Soient $w = x_1 \cdots x_m$ et $w' = x'_1 \cdots x'_m$ deux mots de même longueur ; on note $\binom{w}{w'}$ le flot $\prod_{i=1}^{m} b(a_{x'_i, x_i})$ où $b(a)$ est le flot associé à une arête a. C'est un flot f ainsi défini : pour tout $x \in X$, soient $i_1, \ldots, i_p$ les entiers i tels que $1 \leq i \leq m$ et $x'_i = x$, rangés par ordre croissant ; on a alors $f(x) = x_{i_1} \cdots x_{i_p}$. Cette définition entraîne les propriétés suivantes :

(a) Tout flot est de la forme $\binom{w}{w'}$ et l'on a $\binom{w_1}{w'_1}\binom{w_2}{w'_2} = \binom{w_1 w_2}{w'_1 w'_2}$.

(b) On a $\binom{x_1 \cdots x_m}{x'_1 \cdots x'_m} = \binom{y_1 \cdots y_n}{y'_1 \cdots y'_n}$ si et seulement si l'on a $m = n$ et s'il existe une permutation de $\{1, 2, \ldots, m\}$ telle que $y_i = x_{\sigma(i)}$, $y'_i = x'_{\sigma(i)}$ et tel que $i < j$, $x'_i = x'_j$ entraînent $\sigma(i) < \sigma(j)$.

(c) Soit $f = \binom{x_1 \cdots x_m}{x'_1 \cdots x'_m}$; pour x, y dans X, l'entier $n_{x,y}(f)$ est le nombre des entiers i tels que $1 \leq i \leq m$ et $x'_i = x$, $x_i = y$. D'après (1), $\theta_x(f)$ est donc le nombre de fois que la lettre x intervient dans le mot $x'_1 \cdots x'_m$; autrement dit, on a la relation

$$\theta\binom{w}{w'} = \epsilon(w'). \tag{6}$$

(d) Le monoïde des flots $F(X)$ est engendré par les éléments $\binom{x}{x'}$ (pour x, x' dans X) soumis aux relations de commutation $\binom{x}{x'}\binom{y}{y'} = \binom{y}{y'}\binom{x}{x'}$ pour $x' \neq y'$ (voir le théorème 3.3).

(e) Le flot $\binom{w}{w'}$ est un réarrangement si et seulement si le mot w' est un réarrangement du mot w (ce qui justifie la terminologie adoptée).

Soient Ω un monoïde commutatif, noté additivement et c une application de $X \times X$ dans Ω. Pour tout flot f, l'ensemble des couples (x, y) tels que $n_{x,y}(f) \neq 0$ est fini ; on peut donc poser

$$n_c(f) = \sum_{x,y} n_{x,y}(f) \cdot c(x, y). \tag{7}$$

Il est immédiat que n_c est un homomorphisme de $F(X)$ dans Ω ; de plus, on a

$$n_c\binom{x_1 \cdots x_m}{x'_1 \cdots x'_m} = \sum_{i=1}^{m} c(x'_i, x_i). \tag{8}$$

2. Décomposition d'un réarrangement en cycles

La donnée d'un circuit simple f équivaut à celle d'une partie finie F de X et d'une permutation σ de F ; on a $f = \prod_{x \in F} b(a_{x,\sigma(x)})$. Si $x_1, \ldots, x_m$ sont les éléments de F, on peut encore écrire $f = \binom{\sigma(x_1) \cdots \sigma(x_m)}{x_1 \ \cdots \ x_m}$ et la notation des réarrangements est donc en accord avec la notation usuelle des permutations.

Pour tout mot $w = x_1 \cdots x_m$, on pose

$$\gamma\, w = x_2 x_3 \cdots x_m x_1 ; \tag{9}$$

les cycles sont alors les réarrangements de la forme $[w] = \binom{\gamma\, w}{w}$ où w est un mot formé de lettres distinctes et l'on a $[w] = [w']$ si et seulement s'il existe un entier positif i avec $w' = \gamma^i w$.

En traduisant le théorème 3.5, on obtient le résultat suivant qui généralise la décomposition bien connue d'une permutation en produit de cycles.

Proposition 4.1.
(a) *Tout réarrangement est produit d'une suite finie de cycles.*
(b) *Étant données deux décompositions d'un même réarrangement en produit de suites finies de cycles, on passe de la première à la seconde par une suite finie de transformations élémentaires consistant à permuter dans un produit deux cycles consécutifs qui n'ont aucune lettre en commun.*

La démonstration de la proposition 3.4 fournit un algorithme effectif pour la décomposition en cycles d'un réarrangement $f = \binom{w}{w'}$. On pose $f_1 = f$ et l'on forme une suite de lettres $y_1, \ldots, y_q$ de la manière suivante :
(a) y_1 est la première lettre de w' ;
(b) lorsque y_i est déjà définie, on choisit pour y_{i+1} la lettre la plus à gauche de w parmi celles qui se trouvent au-dessus d'une lettre de w' égale à y_i ; on entoure la colonne correspondante ;
(c) on arrête la procédure la première fois qu'on obtient une lettre y_q égale à l'une des lettres précédentes, par exemple $y_q = y_p$ avec $1 \leq p < q$.

On pose alors $z_1 = [y_p y_{p+1} \cdots y_{q-1}]$ et l'on supprime dans f_1 les colonnes entourées dont la lettre inférieure est $y_p, y_{p+1}, \ldots$, ou y_{q-1}. On obtient ainsi un réarrangement f_2 tel que $f_1 = z_1 f_2$ et l'on recommence avec f_2 la procédure précédente.

Exemple 4.2. — On part du réarrangement $f = \begin{pmatrix} 3\,5\,4\,2\,4\,1\,2\,2\,1\,3 \\ 1\,1\,2\,2\,2\,3\,3\,4\,4\,5 \end{pmatrix}$. On a, en indiquant dans la deuxième colonne la suite $y_1 \cdots \overline{y_p \cdots y_q}$

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} && \longrightarrow \quad \overline{1\ 3\ 1} && z_1 = [1\ 3] \\
f_2 &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 4 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} && \longrightarrow \quad 1\ 5\ 3\ \overline{2\ 4\ 2} && z_2 = [2\ 4] \\
f_3 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} && \longrightarrow \quad 1\ 5\ 3\ \overline{2\ 2} && z_3 = [2] \\
f_4 &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} && \longrightarrow \quad \overline{1\ 5\ 3\ 2\ 4\ 1} && z_4 = [1\ 5\ 3\ 2\ 4],
\end{aligned}
$$

d'où la décomposition en cycles

$$f = [1\ 3] \cdot [2\ 4] \cdot [2] \cdot [1\ 5\ 3\ 2\ 4].$$

3. Monoïde d'intercalement

On rappelle que l'ensemble X est désormais supposé totalement ordonné. On dit qu'un mot $x_1 \cdots x_m$ est *croissant* si l'on a $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m$. Soit w un mot ; parmi les réarrangements de x, il en est un seul qui soit croissant et qu'on notera $\overline{w}$. De manière plus explicite, soient $s_1, \ldots, s_p$ les lettres intervenant dans w, rangées par ordre croissant et soit $\alpha(i)$ la multiplicité de s_i dans w ; on a alors $\overline{w} = \prod_{i=1}^{p} s_i^{\alpha(i)}$. On posera aussi $\Gamma(w) = \binom{w}{\overline{w}}$; comme le mot w est de longueur $\alpha(1) + \cdots + \alpha(p)$, on peut le décomposer de manière unique sous la forme $w = w_1 \cdots w_p$ où le mot w_i est de longueur $\alpha(i)$; dans ces conditions, le flot $h = \Gamma(w)$ est défini par $h(s_i) = w_i$ pour $1 \leq i \leq p$ et $h(x) = 1$ pour $x \notin \{s_1, \ldots, s_p\}$.

Par ailleurs, pour tout réarrangement f, on pose $\Pi(f) = \prod_{x \in X} f(x)$; ce produit se calcule ainsi : si F est une partie finie de X telle que $f(x) = 1$ pour $x \in X \setminus F$, rangée sous forme d'une suite croissante $x_1, \ldots, x_q$, on a $\Pi(f) = f(x_1) \cdots f(x_q)$.

On a donc défini deux applications

$$\Gamma : \mathrm{Mo}(X) \to Q(X) \quad \text{et} \quad \Pi : Q(X) \to \mathrm{Mo}(X).$$

Proposition 4.3. — *Les applications Γ et Π sont des bijections réciproques.*

Les remarques précédentes montrent que l'on a $\Pi(\Gamma(w)) = w$ pour tout mot w. Montrons par ailleurs qu'on a $\Gamma(\Pi(f)) = f$ pour tout réarrangement f. Rangeons sous forme d'une suite croissante $x_1, \ldots, x_q$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 1$ et notons $\alpha(i)$ la longueur du mot $w_i = f(x_i)$; enfin posons $w = w_1 \cdots w_q$ et $w' = x_1^{\alpha(1)} \cdots x_q^{\alpha(q)}$. Il est immédiat que l'on a $w = \Pi(f)$ et $f = \binom{w}{w'}$; comme f est un réarrangement, le mot croissant w' est un réarrangement du mot w, d'où $w' = \overline{w}$ et $f = \binom{w}{\overline{w}} = \Gamma(\Pi(f))$. □

Comme Γ et Π sont des bijections réciproques, la formule $w \ \tau \ w' = \Pi(\Gamma(w) \cdot \Gamma(w'))$ définit un nouveau produit dans $\mathrm{Mo}(X)$, distinct en général du produit de juxtaposition et appelé produit d'intercalement. Pour ce produit, l'ensemble des mots est un nouveau monoïde, qu'on appellera *monoïde d'intercalement* et qu'on notera $Q'(X)$. Par construction, Π est un isomorphisme de monoïde de $Q(X)$ sur $Q'(X)$ et Γ est l'isomorphisme réciproque.

Proposition 4.4. — *Soient w et w' deux mots, $s_1, \ldots, s_p$ les lettres intervenant dans w ou w' rangées par ordre croissant, $\alpha(i)$ (resp. $\alpha'(i)$) la multiplicité de s_i dans w (resp. w'). Décomposons w en $w_1 \cdots w_p$ et w' en $w'_1 \cdots w'_p$ de sorte que w_i soit de longueur $\alpha(i)$ et w'_i de longueur $\alpha'(i)$ pour $1 \leq i \leq p$. On a alors $w \ \tau \ w' = w_1 w'_1 w_2 w'_2 \cdots w_p w'_p$.*

Le réarrangement croissant de w est $s_1^{\alpha(1)} \cdots s_p^{\alpha(p)}$ et celui de w' est $s_1^{\alpha'(1)} \cdots s_p^{\alpha'(p)}$. Le mot $f = \Gamma(w)$ est donc défini par $f(s_i) = w_i$ pour $1 \leq i \leq p$ et $f(x) = 1$ pour $x \notin \{s_1, \ldots, s_p\}$; de même, $f' = \Gamma(w')$ est défini par $f'(s_i) = w'_i$ pour $1 \leq i \leq p$ et $f'(x) = 1$ lorsque $x \notin \{s_1, \ldots, s_p\}$. On a alors $w \ \tau \ w' = \Pi(ff') = \prod_{i=1}^{p} (ff')(s_i) = \prod_{i=1}^{p} w_i w'_i$. □

Exemple 4.5. — Pour $w = 1\,3\,5\,2\,1\,4\,3\,1\,2\,1\,1\,3$ et $w' = 1\,2\,3\,5\,4\,3\,2\,1\,1\,1$ on a les valeurs suivantes de $\alpha(i)$ et $\alpha'(i)$:

i	1 2 3 4 5
$\alpha(i)$	5 2 3 1 1
$\alpha'(i)$	4 2 2 1 1

d'où les partages
$$w = 1\,3\,5\,2\,1 \mid 4\,3 \mid 1\,2\,1 \mid 1 \mid 3 \quad \text{et} \quad w' = 1\,2\,3\,5 \mid 4\,3 \mid 2\,1 \mid 1 \mid 1$$
et le produit d'intercalement
$$w \,\tau\, w' = 1\,3\,5\,2\,1\,1\,2\,3\,5 \mid 4\,3\,4\,3 \mid 1\,2\,1\,2\,1 \mid 1\,1 \mid 3\,1.$$

Exemple 4.6. — Soit à calculer le produit $w = w_1 \,\tau\, w_2 \,\tau\, w_3$ avec $w_1 = 1\,3\,5\,1\,2\,4$, $w_2 = 1\,1\,1\,2$, $w_3 = 5\,4\,3\,2\,1$, ce qui donne les réarrangements croissants $\overline{w}_1 = 1\,1\,2\,3\,4\,5$, $\overline{w}_2 = 1\,1\,1\,2$, $\overline{w}_3 = 1\,2\,3\,4\,5$. On a alors
$$\Gamma(w) = \Gamma(w_1)\Gamma(w_2)\Gamma(w_3) = \begin{pmatrix} 1\,3\,5\,1\,2\,4\,1\,1\,1\,2\,5\,4\,3\,2\,1 \\ 1\,1\,2\,3\,4\,5\,1\,1\,1\,2\,1\,2\,3\,4\,5 \end{pmatrix}$$
et après permutation des colonnes, on a
$$\Gamma(w) = \begin{pmatrix} 1\,3\,1\,1\,1\,5\,5\,2\,4\,1\,3\,2\,2\,4\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1\,1\,2\,2\,2\,3\,3\,4\,4\,5\,5 \end{pmatrix}$$
et finalement $w = 1\,3\,1\,1\,1\,5\,5\,2\,4\,1\,3\,2\,2\,4\,1$.

La bijection Γ permet de transporter à $Q'(X)$ certaines fonctions définies sur $Q(X)$ au n° 1. Tout d'abord, on a

$$\theta(\Gamma(w)) = \epsilon(w) \quad \text{pour tout mot } w; \tag{10}$$

en effet, on a $\theta(\Gamma(w)) = \theta\binom{w}{\overline{w}}$ d'après (6) et comme $\overline{w}$ est un réarrangement de w, on a $\epsilon(\overline{w}) = \epsilon(w)$. On pose par ailleurs

$$\nu_{x,y}(w) = n_{x,y}(\Gamma(w)) \tag{11}$$

pour tout mot $w = x_1 \cdots x_m$; si $\overline{w} = \overline{x}_1 \cdots \overline{x}_m$ est le réarrangement croissant de w, l'entier $\nu_{x,y}(w)$ est le nombre d'entiers i tels que $1 \leq i \leq m$ et $\overline{x}_i = x$, $x_i = y$. Enfin, si c est une application de $X \times X$ dans un monoïde commutatif Ω, on pose $\nu_c(w) = n_c(\Gamma(w))$ pour tout mot w ; avec les notations précédentes, on a

$$\nu_c(w) = \sum_{i=1}^{m} c(\overline{x}_i, x_i) \tag{12}$$

d'après la formule (8).

Remarque 4.7. — On pourrait définir directement le produit d'intercalement $w \,\tau\, w'$ de deux mots par la proposition 4.4 ; il n'est pas difficile de montrer directement que ce produit est associatif et admet pour élément neutre le mot 1. C'est la voie suivie dans [1] (voir page 103).

4. Décomposition descendante d'un mot

Soit $w = x_1 \cdots x_m$ un mot. On appelle *lettre finale* de w l'élément $Fw = x_m$ de X ; on dit que w est *dominé* si l'on a $w \neq 1$ et $x_i < x_m$ pour $1 \leq i < m$ et l'on dit que l'indice $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ est *saillant* si l'on a $x_i \geq x_j$ pour $i \leq j \leq m$. On appelle *décomposition descendante* de w toute suite $(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ de mots dominés telle que $w = w_1 w_2 \cdots w_p$ et $Fw_1 \geq Fw_2 \geq \cdots \geq Fw_p$.

PROPOSITION 4.8. — *Tout mot admet une décomposition descendante et une seule.*

Si w est un mot et si $n_1, \ldots, n_p$ sont des entiers positifs dont la somme est égale à la longueur de w, il existe une décomposition $w = w_1 \cdots w_p$ de w et une seule telle que w_i soit de longueur n_i pour $1 \leq i \leq p$. Comme le dernier indice d'un mot est saillant, il suffit de prouver le lemme suivant.

LEMME 4.9. — *Soient $w = x_1 \cdots x_m$, $w_1, \ldots, w_p$ des mots de longueur non nulle tels que $w = w_1 \cdots w_p$; on note ℓ_k la longueur de w_k et l'on pose $j_k = \sum_{r=1}^{k} \ell_r$ pour $1 \leq k \leq p$. Pour que $(w_1, \ldots, w_p)$ soit une décomposition descendante de w, il faut et il suffit que les indices saillants de w soient $j_1, \ldots, j_p$.*

Supposons d'abord que $(w_1, \ldots, w_p)$ soit une décomposition descendante de w. Comme w_1 est dominé, aucun indice i tel que $1 \leq i < j_1$ ne peut être saillant ; de plus, il est immédiat que l'indice $j_p = m$ est saillant. Soient alors k et i des entiers tels que $1 \leq k < p$ et $j_k < i \leq m$; il existe un entier k' tel que $k \leq k' < p$ et $j_{k'} < i \leq j_{k'+1}$; comme le mot $w_{k'+1}$ est dominé, on a $x_i \leq x_{j'_k+1} = Fw_{k'+1} \leq Fw_k = x_{j_k}$; ceci prouve que j_k est saillant. En particulier, si l'on a $j_{k'} < i < j_{k'+1}$, alors $x_i < x_{j_{k'+1}}$ et l'indice i n'est donc pas saillant. On a prouvé que les indices saillants sont $j_1, \ldots, j_p$.

Supposons réciproquement que les indices saillants de w soient $j_1, \ldots, j_p$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k < p$, on a $j_k < j_{k+1}$ et comme j_k est saillant, on a $Fw_k = x_{j_k} \geq x_{j_{k+1}} = Fw_{k+1}$. Montrons que chacun des mots w_k est dominé. Puisque l'indice $i' = j_k - 1$ n'est pas saillant lorsque $j_k - j_{k-1} > 1$, on a dans ce cas $x_{i'} < x_{j_k}$. Il nous suffit donc de montrer que l'hypothèse $j_{k-1} < i < j_k$ et $x_{i'} < x_{j_k}$ pour $i < i' < j_k$ entraîne $x_i < x_{j_k}$. Or comme j_k est saillant, on a $x_{j_k} \geq x_r$ pour $j_k \leq r \leq m$ et comme i n'est pas saillant, il existe s avec $i < s \leq m$ et $x_i < x_s$; dans les deux cas $i < s < j_k$ et $j_k \leq s \leq m$, on a $x_s \leq x_{j_k}$, d'où $x_i < x_{j_k}$. (On a posé $j_0 = 0$.) ∎

Soit $w = x_1 \cdots x_m$ un mot. Nous noterons $\Delta(w)$ le flot $\binom{\gamma w_1 \cdots \gamma w_p}{w_1 \cdots w_p}$ où $(w_1, \ldots, w_p)$ est la décomposition descendante de w ; comme γw_j est un réarrangement de w_j, on voit que $\Delta(w)$ est un réarrangement. Par ailleurs, étant donnés x et y dans X, nous noterons $\xi_{x,y}(w)$ le nombre d'entiers i tels que $1 \leq i \leq m - 1$, $x_i = x$ et $x_{i+1} = y$. Enfin, si c est une application de $X \times X$ dans un monoïde commutatif Ω, nous poserons $\xi_c(w) = 0$ si m est égal à 0 ou 1 et

$$\xi_c(w) = c(x_1, x_2) + c(x_2, x_3) + \cdots + c(x_{m-1}, x_m) \tag{13}$$

si $m \geq 2$.

Proposition 4.10. — *L'application Δ est une bijection de* $\mathrm{Mo}(X)$ *sur $Q(X)$. De plus, pour tout mot w, on a les relations*

$$\theta(\Delta(w)) = \epsilon(w), \qquad n_{x,y}(\Delta(w)) = \xi_{x,y}(w)$$

si $x < y$ et $n_c(\Delta(w)) = \xi_c(w)$ si l'applicatioon c de $X \times X$ dans Ω est telle que $c(x, y) = 0$ pour $x \geq y$.

(a) Pour tout mot dominé $w = x_1 \cdots x_m$, notons $c(w)$ le lacet de sommets $x_m x_1 x_2 \cdots x_m$ dans le graphe G associé à X. Il est immédiat que le circuit $b(c(w))$ (voir chapitre III.5) est égal à $\binom{\gamma w}{w}$ et que l'application $w \mapsto c(w)$ induit une bijection de l'ensemble des mots dominés sur l'ensemble des lacets irréductibles dont la source est le plus grand sommet. Avec ces notations, on a $\Delta(w) = b(c(w_1)) \cdots b(c(w_p))$ si $(w_1, \ldots, w_p)$ est la décomposition descendante de w ; comme la source du lacet $c(w_j)$ est la dernière lettre de Fw_j de w_j et que l'on a $Fw_1 \geq \cdots \geq Fw_p$, l'application Δ de $\mathrm{Mo}(X)$ dans $Q(X)$ transforme la décomposition descendante d'un mot en la décompositin descendante du circuit correspondant. La proposition 3.10 montre alors que Δ est bijective.

(b) Soit $w = x_1 \cdots x_m$ un mot ; on note $(w_1, \ldots, w_p)$ la décomposition descendante de w et $j_1, \ldots, j_p$ les indices saillants de w ; enfin, on note $x' = x'_1 \cdots x'_m$ le réarrangement $\gamma w_1 \cdots \gamma w_p$ de w. L'orsque l'indice $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ est distinct de $j_1, \ldots, j_p$, on a $x'_i = x_{i+1}$; par ailleurs, pour $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, on a

$$x'_{j_k} = x_{j_{k-1}+1} \leq x_{j_k}$$

car le mot w_k est dominé (on fait la convention $j_0 = 0$) ; si de plus, on a $k \neq p$, on a $x_{j_k+1} \leq x_{j_k}$ car l'indice j_k est saillant. Soient alors x, y dans X avec $x < y$; les remarques précédentes montrent que l'on a $x_i = x$, $x'_i = y$ si et seulement si l'on a $x_i = x$, $x_{i+1} = y$ (et ceci ne peut avoir lieu pour i dans $\{j_1, \ldots, j_p\}$). Comme on a $\Delta(w) = \binom{w'}{w}$, la propriété (c) du n° 1 montre que l'on a $n_{x,y}(\Delta(w)) = \xi_{x,y}(w)$ lorsque $x < y$.

(c) Enfin, soit c une application de $X \times X$ dans un monoïde commutatif Ω telle que $c(x, y) = 0$ lorsque $x \geq y$. On a alors $n_c(f) = \sum_{x<y} n_{x,y}(f) \cdot c(x, y)$ pour tout réarrangement f et $\xi_c(w) = \sum_{x<y} \xi_{x,y}(w) \cdot c(x, y)$ pour tout mot w. Le résultat de l'alinéa (b) entraîne alors $n_c(\Delta(w)) = \xi_c(w)$ pour tout mot w. La formule $\theta(\Delta(w)) = \epsilon(w)$ résulte de (6). $\square$

5. Une méthode de réarrangement

Dans les numéros précédents, nous avons décrit deux bijections

$$\Gamma : \mathrm{Mo} \to Q(X), \qquad \Delta : \mathrm{Mo}(X) \to Q(x);$$

par composition, on en déduit une permutation $\Phi = \Gamma^{-1} \circ \Delta$ de l'ensemble $\mathrm{Mo}(X)$ des mots. On peut l'expliciter ainsi : soit $w = x_1 \cdots x_m$ un mot ; notons $s_1, \ldots, s_q$ les lettres intervenant dans w, rangées par ordre croissant, $\alpha(i)$ la multiplicité de s_i dans w et $\beta(i) = \alpha(1) + \cdots + \alpha(i)$ (avec la convention $\beta(0) = 0$). Notons $\overline{w} = \overline{x}_1 \cdots \overline{x}_m$ le réarrangement croissant $s_1^{\alpha(1)} \cdots s_q^{\alpha(q)}$ de w et σ la permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, m\}$ qui satisfasse à $\overline{x}_i = x_{\sigma(i)}$ pour $1 \leq i \leq m$ et qui soit croissante sur chacun des intervalles $[\beta(j-1)+1, \beta(j)]$ pour $1 \leq j \leq q$. Par ailleurs, soit $(w_1, \ldots, w_q)$ la décomposition descendante de w ; on pose $\gamma w_1 \cdots \gamma w_p = y_1 \cdots y_m$; on a alors $\Phi(w) = y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(m)}$.

Théorème 4.11. — *Soient $w = x_1 \cdots x_m$ un mot, $\overline{w} = \overline{x}_1 \cdots \overline{x}_m$ son réarrangement croissant et $x' = x'_1 \cdots x'_m$ le mot $\Phi(w)$. Alors*

(a) *Le mot w' est un réarrangement de w.*

(b) *Si x et y sont deux éléments de X tels que $x < y$, le nombre $\nu_{x,y}(w')$ des entiers i tels que $1 \leq i \leq m$ et $\overline{x}_i = x$, $x'_i = y$ est égal au nombre $\xi_{x,y}(w)$ des entiers i tels que $1 \leq i < m$ et $x_i = x$, $x_{i+1} = y$.*

(c) *Soit c une application de $X \times X$ dans un monoïde commutatif Ω, telle que $c(x, y) = 0$ pour $x \geq y$. On a*

$$\sum_{i=1}^{m-1} c(\overline{x}_i, x'_i) = \sum_{i=1}^{m-1} c(x_i, x_{i+1}). \tag{14}$$

On a $\Delta(w) = \Gamma(w')$. D'après les formules (10) et (11) et la proposition 4.10, on a $\epsilon(w) = \theta(\Delta(w)) = \theta(\Gamma(w')) = \epsilon(w')$ et $\xi_{x,y}(w) = n_{x,y}(\Delta(w)) = n_{x,y}(\Gamma(w')) = \nu_{x,y}(w')$ pour $x < y$. Ceci prouve (a) et (b). On a aussi

$$\sum_{i=1}^{m} c(\overline{x}_i, x'_i) = \nu_c(w') = n_c(\Gamma(w')) = n_c(\Delta(w)) = \xi_c(w) = \sum_{i=1}^{m-1} c(x_i, x_{i+1})$$

d'après les formules (12) et (13) et la proposition 4.10 ; comme on a $\overline{x}_m \geq x'_m$, on a aussi $c(\overline{x}_m, x'_m) = 0$, d'où immédiatement la formule (14). ∎

Soient $x = x_1 \cdots x_m$ un mot et $\overline{w} = \overline{x}_1 \cdots \overline{x}_m$ son réarrangement croissant. On note $\nu(w)$ le nombre des entiers i tels que $1 \leq i \leq m$ et $\overline{x}_i < x_i$ et $\xi(w)$ le nombre des entiers i tels que $1 \leq i \leq m-1$ et $x_i < x_{i+1}$. On a

$$\nu(w) = \sum_{x<y} \nu_{x,y}(w), \qquad \xi(w) = \sum_{x<y} \xi_{x,y}(w)$$

et le théorème 4.11 entraîne $\xi(w) = \nu(\Phi(w))$. On en déduit le résultat suivant, dû à MacMahon [3, page 186].

Corollaire 4.12. — *Soient w un mot et r un entier positif. Parmi les réarrangements w' de w, il y en a autant pour lesquels on a $\nu(w') = r$ que pour lesquels on a $\xi(w') = r$.*

Exemple 4.13. — Pour déterminer les indices saillants d'un mot $w = x_1 \cdots x_m$, le plus simple est de déterminer le mot $\widehat{w} = y_1 \cdots y_m$ défini par $y_i = \max\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m\}$; un indice i est saillant si et seulement si l'on a $x_i = y_i$. Considérons par exemple le mot

$$w = \overline{4\ \underline{6}}\ \underline{6}\ 5\ 4\ 4\ 3\ \overline{1\ 2\ \underline{6}}\ 2\ 2\ \overline{1\ 3\ \underline{4}}\ \underline{3}\ 2\ \overline{1\ 2\ \underline{3}}\ 1\ \overline{1\ \underline{2}}$$

d'où

$$\widehat{w} = 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 2\ 2\ 2,$$

ce qui permet de déterminer les indices saillants (soulignés). La décomposition descendante s'obtient en coupant w après chaque indice saillant, soit

$$w = 4\ 6 \mid 6 \mid 5\ 4\ 4\ 3\ 1\ 2\ 6 \mid 2\ 2\ 1\ 3\ 4 \mid 3 \mid 2\ 1\ 2\ 3 \mid\ 1\ 1\ 2\,;$$

on en déduit

$$\Delta(w) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 6\ 4 & 6 & 4\ 4\ 3\ 1\ 2\ 6\ 5 & 2\ 1\ 3\ 4\ 2 & 3 & 1\ 2\ 3\ 2 & 1\ 2\ 1 \\ 4\ 6 & 6 & 5\ 4\ 4\ 3\ 1\ 2\ 6 & 2\ 2\ 1\ 3\ 4 & 3 & 2\ 1\ 2\ 3 & 1\ 1\ 2 \end{array}\right),$$

d'où après permutation des colonnes

$$\Delta(w) = \begin{pmatrix} 2\ 3\ 2\ 1\ 2\ 6\ 2\ 1\ 1\ 3\ 1\ 1\ 4\ 3\ 2\ 6\ 4\ 3\ 2\ 4\ 4\ 6\ 5 \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 3\ 4\ 4\ 4\ 4\ 5\ 6\ 6\ 6 \end{pmatrix}$$

et finalement

$$\begin{array}{rl} w' = \Phi(w) = & \begin{pmatrix}\overline{2}\\ \underline{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{3}\\ \underline{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{2}\\ \underline{1}\end{pmatrix}\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}\overline{2}\\ \underline{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{6}\\ \underline{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}2\ 1\ 1\\2\ 2\ 1\end{matrix}\begin{pmatrix}\overline{3}\\ \underline{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}1\ 1\\2\ 3\end{matrix}\begin{pmatrix}\overline{4}\\ \underline{3}\end{pmatrix}\begin{matrix}3\ 2\\3\ 3\end{matrix}\begin{pmatrix}\overline{6}\\ \underline{4}\end{pmatrix}\begin{matrix}4\ 3\ 2\ 4\ 4\ 6\ \ 5\\4\ 4\ 4\ 5\ 6\ 6\ \ 6.\end{matrix} \\ \overline{w} = & \end{array}$$

On a entouré les paires montantes $(\overline{x}_i, x'_i)$ avec $\overline{x}_i < x'_i$ et coché sur w les paires montantes (x_i, x_{i+1}) avec $x_i < x_{i+1}$.

Enfin, voici les matrices

$$N(w') = (\nu_{x,y}(w'))_{x,y\in X} \quad \text{et} \quad \Xi(w) = (\xi_{x,y}(w))_{x,y\in X} :$$

$$N(w') = \begin{pmatrix} 1\,3\,1\,0\,0\,0 \\ 3\,1\,1\,0\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1 \end{pmatrix} \qquad \Xi(w) = \begin{pmatrix} 1\,3\,1\,0\,0\,0 \\ 2\,1\,1\,0\,0\,1 \\ 2\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,2\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,1 \end{pmatrix}$$

dont les parties au-dessus de la diagonale principale coïncident. On a

$$\nu(w') = \xi(w) = 8.$$

CHAPITRE V

SUR LE "MASTER THEOREM" DE MACMAHON

1. Une généralisation non commutative du "Master Theorem"

On note A un anneau avec élément unité, non nécessairement commutatif. Bien que l'anneau A ne soit pas commutatif, on peut définir le déterminant d'une matrice carrée $T = (t_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ à coefficients dans A par la formule usuelle

$$\det T = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{i=1}^{n} t_{i,\sigma(i)}. \tag{1}$$

On rappelle que $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ et ε_σ est la signature de la permutation σ. Par ailleurs, on note I_n la matrice unité d'ordre n et A_n l'anneau des séries formelles à coefficicdents dans A en des indéterminées commutatives $X_1, \ldots, X_n$. Le théorème suivant se réduit au « Master Theorem » lorsque l'anneau A est supposé commutatif.

THÉORÈME 5.1. — *Soit* $\mathbf{X}$ *la matrice diagonale d'éléments* $X_1, \ldots, X_n$ *et soit* $B = (b_{ij})$ *une matrice carrée d'ordre* n *à coefficients dans* A*. On suppose que* b_{ij} *commute à* $b_{i'j'}$ *lorsque* i *et* i' *sont distincts. On pose* $Y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} X_j$ *pour* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Quels que soient les entiers positifs $\alpha(1), \ldots, \alpha(n)$*, le coefficient* $t_{\alpha(1),\ldots,\alpha(n)}$ *du monôme* $X_1^{\alpha(1)} \cdots X_n^{\alpha(n)}$ *dans le produit* $Y_1^{\alpha(1)} \cdots Y_n^{\alpha(n)}$ *est égal au coefficient du même monôme dans la série formelle* $\det(I_n - B \cdot \mathbf{X})^{-1}$.

Nous noterons Q le monoïde des réarrangements construit sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ (voir IV.1) et μ la fonction de Möbius de Q. Vu l'hypothèse de commutativité faite sur les éléments de la matrice B, il existe un homomorphisme u de Q dans le monoïde multiplicatif Ω de l'anneau A_n, tel que

$$u\binom{j_1 \cdots j_p}{i_1 \cdots i_p} = \prod_{i=1}^{p} b_{i_k j_k} X_{j_k}. \tag{2}$$

(A) *Calcul de la série* $\quad t = \sum_{\alpha(1),\ldots,\alpha(n)} t_{\alpha(1),\ldots,\alpha(n)} X_1^{\alpha(1)} \cdots X_n^{\alpha(n)}$:

Soient $\alpha(1), \ldots, \alpha(n)$ des entiers positifs. Pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a

$$Y_i^{\alpha(i)} = \sum_{j_1,\ldots,j_{\alpha(i)}} b_{ij_1} \cdots b_{ij_{\alpha(i)}} X_{j_1} \cdots X_{j_{\alpha(i)}}; \tag{3}$$

posons $p = \alpha(1) + \cdots + \alpha(n)$ et notons $i_1, \ldots, i_p$ la suite croissante où 1 apparaît $\alpha(1)$ fois, 2 apparaît $\alpha(2)$ fois, ... , et où n apparaît $\alpha(n)$ fois. Multipliant les égalités (3) membre à membre, on obtient

$$Y_1^{\alpha(1)} \cdots Y_n^{\alpha(n)} = \sum_{j_1,\ldots,j_n} b_{i_1 j_1} \cdots b_{i_p j_p} X_{j_1} \cdots X_{j_p}, \tag{3}$$

où les entiers $j_1, \ldots, j_p$ prennent indépendamment les valeurs $1, 2, \ldots, n$. On obtient le produit $t_{\alpha(1),\ldots,\alpha(n)} X_1^{\alpha(1)} \cdots X_n^{\alpha(n)}$ en ne conservant dans la somme précédente que les termes pour lesquels chacun des entiers $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ apparaît $\alpha(i)$ fois dans la suite $j_1, \ldots, j_p$.

On a donc

$$t_{\alpha(1),\ldots,\alpha(n)} X_1^{\alpha(1)} \cdots X_n^{\alpha(n)} = \sum u\binom{j_1 \ldots j_p}{i_1 \ldots i_p} \tag{4}$$

où la sommation est étendue à tous les systèmes $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_p$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(a) la suite $i_1, \ldots, i_p$ est croissante ;

(b) chacun des entiers $i \in \{1, \ldots, n\}$ apparaît $\alpha(i)$ fois dans chacune des suites $i_1, \ldots, i_p$ et $j_1, \ldots, j_p$.

Si l'on somme sur les suites $(\alpha(1), \ldots, \alpha(n))$ de n entiers positifs, on obtient une fois et une seule tout élément de Q, d'où

$$t = \sum_{f \in Q} u(f). \tag{5}$$

(B) *Calcul de la série* $d = \det(I_n - B \cdot \mathbf{X})$:

Soit $U = (u_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n ; pour toute partie H de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, soit D_H le déterminant de la matrice obtenue en supprimant de U les lignes et les colonnes dont les indices n'appartiennent pas à H ; on a alors

$$\det(I_n - U) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sum_{|H|=r} D_H. \tag{6}$$

Cette formule est bien connue lorsque les éléments de U commutent deux à deux et la démonstration usuelle s'étend immédiatement au cas général. Appliquons ceci au cas de la matrice $U = B \cdot \mathbf{X}$ d'éléments $u_{ij} = b_{ij} X_j$; pour toute partie H avec $|H| = r$, on a

$$D_H = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon_\sigma \prod_{i \in H} u_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon_\sigma \, u\Big(\prod_{i \in H} \binom{\sigma(i)}{i}\Big). \tag{7}$$

Lorsque σ parcourt le groupe symétrique $\mathfrak{S}_r$, l'élément $\prod_{i \in H} \binom{\sigma(i)}{i}$ parcourt l'ensemble des circuits simples de support H ; d'après la remarque 3.6, $\mu(f)$ est égal à $(-1)^r \cdot \varepsilon_\sigma$ lorsque f est de la forme précédente et l'on a $\mu(f) = 0$ si le circuit f n'est pas simple. De (6) et (7), on déduit facilement

$$d = \sum_{f \in Q} \mu(f) \cdot u(f). \tag{8}$$

(C) *Fin de la démonstration* :

Rappelons qu'on a $u(f')\cdot u(f'') = u(f'f'')$ pour f', f'' dans Q. Des formules (5) et (8), on déduit alors

$$d\,t = \sum_{f',f''} \mu(f') \cdot u(f')u(f'') = \sum_{f} u(f) \sum_{f'f''=f} \mu(f').$$

Par définition de la fonction de Möbius μ de Q, on a par ailleurs

$$\sum_{f'f''=f} \mu(f') = \begin{cases} 1, & \text{si } f = 1\,; \\ 0, & \text{si } f \neq 1\,; \end{cases}$$

d'où immédiatement $d\,t = u(1) = 1$. La démonstration de la formule $t\,d = 1$ est analogue. ◻

2. Une autre généralisation du théorème de MacMahon

Dans ce n°, on note A un anneau *commutatif* avec élément unité. On introduit des indéterminées non commutatives $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et des séries formelles à coefficients dans A en ces indéterminées. Rappelons qu'une telle série s'écrit de manière unique sous la forme $h = \sum_w a_w \cdot w$ où w parcourt l'ensemble des mots en $\xi_1, \ldots, \xi_n$; de manière explicite, on a

$$h = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_r}\, \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_r}. \tag{10}$$

On a défini au chapitre IV.3 le produit d'intercalement $w \;\tau\; w'$ pour deux mots w et w' ; on étend cette définition au cas des séries en posant

$$\Big(\sum_w a'_w \cdot w\Big) \;\tau\; \Big(\sum_w a''_w \cdot w\Big) = \sum_{w'w''} a'_{w'} a''_{w''} (w' \;\tau\; w'') = \sum_w \Big(\sum_{w'\tau w''=w} a'_{w'} a''_{w''} \Big).w. \tag{11}$$

Pour cette multiplication, les séries formelles en $\xi_1, \ldots, \xi_n$ forment un anneau A_n^τ.

Soit $B = (b_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à éléments dans A. Nous lui associerons les deux séries

$$t^\tau = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_r} b_{\ell_1 k_1} \cdots b_{\ell_r k_r}\, \xi_{k_1} \cdots \xi_{k_r} \tag{12}$$

(où $\ell_1, \ldots, \ell_r$ désigne le réarrangement croissant de $k_1, \ldots, k_r$) et

$$d^\tau = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \sum_{i_1<\cdots<i_r} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} \varepsilon_\sigma\, b_{i_1,\sigma(i_1)} \cdots b_{i_r,\sigma(i_r)}\, \xi_{\sigma(i_1)} \cdots \xi_{\sigma(i_r)}. \tag{13}$$

PROPOSITION 5.2. — *Les séries t^τ et d^τ sont inverses dans l'anneau A_n^τ.*

On note Q le monoïde des réarrangements et Q' le monoïde d'intercalement construits sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ (voir chap. IV.1 et IV.3). Comme au n° précédent, on construit un homomorphisme v de Q dans le monoïde multiplicatif Ω de l'anneau A par la formule

$$v\binom{j_1 \cdots j_p}{i_1 \cdots i_p} = \prod_{k=1}^{p} b_{i_k, j_k}. \tag{14}$$

En tenant compte de l'isomorphisme Γ de Q' sur Q défini au chapitre IV.3, on obtient un homomorphisme $b = v \circ \Gamma$ de Q' dans Ω ; si $w = k_1 \cdots k_r$ est un mot et si $\ell_1 \cdots \ell_r$ est son réarrangement croissant, on a

$$b(w) = b_{\ell_1 k_1} \cdots b_{\ell_r k_r}. \tag{15}$$

La forme de la fonction de Möbius de Q (voir remarque 3.6) et la formule précédente permettent de mettre les séries t^τ et d^τ sous la forme

$$t^\tau = \sum_{w \in Q'} b(w) \cdot w \tag{16}$$

$$d^\tau = \sum_{w \in Q'} b(w)\mu(w) \cdot w. \tag{17}$$

Comme on a $b(w' \; \tau \; w'') = b(w') \cdot b(w'')$, la formule $t^\tau d^\tau = d^\tau t^\tau = 1$ résulte de (16) et (17) par un raisonnement analogue à celui de la partie (C) de la démonstration du théorème 5.1. $\square$

Soit A_n l'anneau des séries formelles à coefficients dans A en des indéterminées commutatives $X_1, \ldots, X_n$. Pour toute série formelle $h \in A_n^\tau$, soit $\varepsilon_n(h)$ la série obtenue par substitution de X_1 à $\xi_1, \ldots, X_n$ à ξ_n ; alors ε_n est un homomorphisme d'anneaux de A_n^τ dans A_n. Il est immédiat que ε_n transforme les séries t^τ et d^τ en les séries t et d du n° 1. La relation $t^\tau d^\tau = d^\tau t^\tau = 1$ entraîne donc la relation $td = dt = 1$, qui n'est autre que le théorème de MacMahon. C'est en ce sens que la proposition 5.2 généralise le théorème de MacMahon.

CHAPITRE VI

RELATIONS ENTRE COEFFICIENTS BINOMIAUX

1. Description du graphe

Le graphe G a trois sommets numérotés 1, 2, 3 et des arêtes a_{ij} joignant le sommet i au sommet j pour $i \neq j$. On voit immédiatement qu'il y a cinq cycles

$$c_1 = [12], \quad c_2 = [13], \quad c_3 = [23], \quad c_4 = [123], \quad c_5 = [132].$$

Deux cycles distincts ayant toujours un sommet en commun, un circuit f dans G s'écrit de manière unique sous la forme $f = c_{i_1} \cdots c_{i_m}$ avec $1 \leq i_k \leq 5$ pour $1 \leq k \leq m$. On note $\varepsilon_k(f)$ le nombre de fois que le cycle c_k apparaît dans le circuit f ; la parité d'un circuit f est par définition celle de sa longueur, autrement dit celle de l'entier $\varepsilon_4(f) + \varepsilon_5(f)$ car les cycles c_1, c_2 et c_3 sont de longueur paire.

Soit f un circuit ; la matrice d'incidence $N(f)$ de f est égale à $\sum\limits_{k=1}^{5} \varepsilon_k(f) \cdot I_k$, où I_k est la matrice d'incidence de c_k. Les matrices I_k sont données dans la table suivante, où les points représentent des zéros :

$$I_1 = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad I_5 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}.$$

2. Étude des circuits pairs

Les multiplicités $\varepsilon_k = \varepsilon_k(f)$ (pour $1 \leq k \leq 5$) d'un circuit pair sont des entiers positifs tels que $\varepsilon_4 + \varepsilon_5$ soit pair. Il est immédiat qu'un tel système d'entiers s'écrit de manière unique sous la forme

$$\varepsilon_1 = c - n, \quad \varepsilon_2 = b - n, \quad \varepsilon_3 = a - n, \tag{1}$$

$$\varepsilon_4 = n + k, \quad \varepsilon_5 = n - k, \tag{2}$$

où les entiers a, b, c, n, k sont assujettis aux relations

$$|k| \leq n \leq p, \tag{3}$$

où p est le plus petit des trois sommets a, b, c. La matrice d'incidence $N(f) = \sum_{i=1}^{5} \varepsilon_i \cdot I_i$ est alors de la forme

$$N = \begin{pmatrix} 0 & c+k & b-k \\ c-k & 0 & b-k \\ b+k & a-k & 0 \end{pmatrix};$$

on notera que n n'intervient pas explicitement dans la matrice précédente ; de plus, on a $M = S + k \cdot V$ où S est la matrice symétrique $\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$ et $V = I_4 - I_5$ la matrice antisymétrique $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui indique la signification des entiers a, b, c, k.

L'identité (A) du formulaire s'obtient en évaluant de deux manières différentes le nombre N des circuits f tels que $N(f) = M$. Rappelons qu'un circuit correspondant à la matrice M s'obtient en attachant à chacun des sommets une suite finie d'arêtes ayant ce sommet pour source ; la suite des arêtes attachées au sommet 1 doit faire intervenir $c + k$ fois l'arête a_{12} et $b - k$ fois l'arête a_{13} et il y a donc $\binom{b+c}{c+k}$ choix possibles. ([8]) Raisonnant de manière analogue pour les sommets 2 et 3, on trouve

$$N = \binom{b+c}{c+k}\binom{c+a}{a+k}\binom{a+b}{b+k}. \tag{5}$$

Par ailleurs, vu l'unicité de la décomposition d'un circuit en cycles, le nombre des circuits qui font intervenir ε_i fois le cycle c_i pour $1 \leq i \leq 5$ est égal à $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5)!/(\varepsilon_1!\, \varepsilon_2!\, \varepsilon_3!\, \varepsilon_4!\, \varepsilon_5!)$; si l'on évalue les ε_i conformément aux formules (1) et (2) et qu'on somme sur l'entier n soumis à la condition (3), on trouve

$$N = \sum_{n=|k|}^{p} \frac{(a+b+c-n)!}{(a-n)!\,(b-n)!\,(c-n)!\,(n+k)!\,(n-k)!} \tag{6}$$

et la comparaison de (5) et (6) établit la formule (A).

3. Étude des circuits impairs

L'entier $\varepsilon_4 + \varepsilon_5$ étant cette fois impair, il faut remplacer les formules (2) et (3) par les suivantes :

$$\varepsilon_4 = n + k, \quad \varepsilon_5 = n - k + 1, \tag{2'}$$

$$\kappa \leq n \leq p \quad \text{avec } \kappa = \max\{-k, k-1\} \text{ et } p = \min\{a, b, c\}. \tag{3'}$$

([8]) Le nombre de suites faisant intervenir α_1 fois x_1, … , α_p fois x_p est égal à $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_p)!/(\alpha_1! \cdots \alpha_p!)$. On note $\binom{m}{n}$ le coefficient binomial $m!/((m-n)!\,n!)$.

La matrice d'incidence $N(f) = \sum_{i=1}^{5} \varepsilon_i \cdot I_i$ prend alors la forme

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & c+k & b-k+1 \\ c-k+1 & 0 & a+k \\ b+k & a-k+1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{4'}$$

l'évaluation directe du nombre N' des circuits f tels que $N(f) = M'$ conduit à la formule

$$N' = \binom{b+c+1}{c+k}\binom{c+a+1}{a+k}\binom{a+b+1}{b+k} \tag{5'}$$

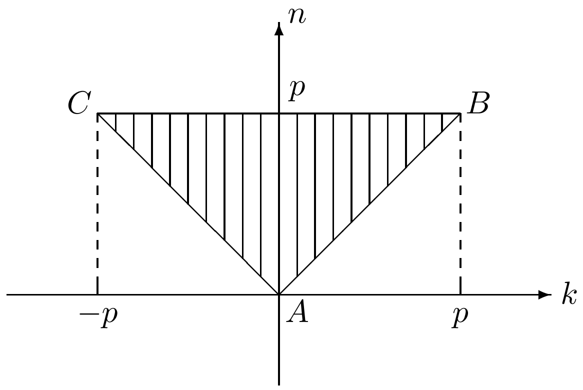
tandis que l'utilisation de la décomposition d'un circuit en produit de cycles conduit à l'évaluation

$$N' = \sum_{n=\kappa}^{p} \frac{(a+b+c-n+1)!}{(a-n)!\,(b-n)!\,(c-n)!\,(n+k)!\,(n-k+1)!}. \tag{6'}$$

La comparaison de ces deux résultats établit la formule (A′).

4. Autres identités

Montrons d'abord comment la formule (A) entraîne toutes celles du cas pair ; nous commencerons par (B). Nous considérons l'ensemble I des couples (k,n) d'entiers satisfaisant aux inégalités $|k| \leq n \leq p$, c'est-à-dire les points de coordonnées entières du triangle ABC ci-après :



Pour toute fonction f sur I, on a la formule de sommation

$$\sum_{(k,n)\in I} f(k,n) = \sum_{k=-p}^{p}\sum_{n=|k|}^{p} f(k,n) = \sum_{n=0}^{p}\sum_{k=-n}^{n} f(k,n). \tag{7}$$

Posons en particulier

$$f(k,n) = \frac{(a+b+c-n)!}{(a-n)!\,(b-n)!\,(c-n)!}\,\frac{u^{p+k}}{(n+k)!}\,\frac{v^{p-k}}{(n-k)!};$$

La formule du binôme entraîne

$$(uv)^{p-n}\frac{(u+v)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{u^{p+k}}{(n+k)!}\,\frac{v^{p-k}}{(n-k)!},$$

et le second membre de (B) est donc égal à $\sum_{n=0}^{p}\sum_{k=-n}^{n} f(k,n)$. D'autre part, la formule (A) montre que le premier membre de (B) est égal à $\sum_{k=-p}^{p}\sum_{n=|k|}^{p} f(k,n)$, d'où (B) d'après (7).

Il est clair que (C) est le cas particulier $u = v = 1$ de (B). Si l'on fait $u = 1$ et $v = -1$, on a $(u+v)^{2n} = 0$ pour $n > 0$ et le second membre de (B) se réduit au seul terme pour lequel $n = 0$, lui-même égal à $(-1)^p(a+b+c)!/(a!\,b!\,c!)$; la formule (D) est donc le cas particulier $u = 1$, $v = -1$ de (B). Si l'on fait $a = b = c = q$ et $k = \ell - q$, d'où $p = q$, dans (A) et qu'on remplace l'indice de sommation n par $q - m$, on obtient (E) ; on déduit (F) de (B) par les mêmes transformations. Enfin (G) s'obtient en faisant $u = v = 1$ dans (F) et (H) est le cas particulier $a = b = c = q$ de (D).

Les formules du cas impair se déduisent de (A$'$) de manière analogue ; seules (D$''$) et (H$'$) méritent un nouvel examen. Remplaçons u par $1 + t$ et v par -1 dans (B$'$) ; on obtient une égalité de la forme

$$(8)\qquad \sum_{k=-p}^{p+1} r_k(-1)^{k+1}(1+t)^{p+k} = \sum_{n=0}^{p} s_n(-1)^n(1+t)^{p-n}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

avec

$$r_k = \binom{b+c+1}{c+k}\binom{c+a+1}{a+k}\binom{a+b+1}{b+k} \text{ et } s_n = \frac{(a+b+c-n+1)!}{(a-n)!\,(b-n)!\,(c-n)!}.$$

Le coefficient de t dans le polynôme $(1+t)^{p+k}$ est égal à $p+k$ et les termes du second membre de (8) avec $n > 0$ sont divisibles par t^3 et ne contribuent donc pas au coefficient de t. Prenant le coefficient de t dans les deux membres de (8), on obtient

$$(9)\qquad \sum_{k=-p}^{p+1} r_k(-1)^{k+1}(p+k) = s_0;$$

faisant $t = 0$ dans (8), on obtient par ailleurs $\sum_{k=-p}^{p+1}(-1)^{k+1}r_k = 0$, d'où finalement $\sum_{k=-p}^{p+1}(-1)^{k+1}k\,r_k = s_0$, ce qui n'est autre que (D$''$). On démontre de manière analogue (H$'$) en faisant $u = 1 + t$ et $v = -1$ dans (F$'$) et en égalant les coefficients de t dans les deux membres de l'égalité obtenue ainsi.

5. Utilisation du "Master Theorem" de MacMahon

Nous allons montrer comment déduire les relations (B) et (B$'$) du théorème de MacMahon appliqué à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & s & t \\ t & 0 & s \\ s & t & 0 \end{pmatrix}$ où s et t sont deux indéterminées. Notons a, b, c des entiers positifs et p le plus petit de ces entiers. Nous noterons X_1, X_2 et X_3 de nouvelles indéterminées, P le polynôme

$$(sX_2 + tX_3)^{b+c}(sX_3 + tX_1)^{c+a}(sX_1 + tX_2)^{a+b}$$

et D le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -sX_2 & -tX_3 \\ -tX_1 & 1 & -sX_3 \\ -sX_1 & -tX_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, nous noterons U le coefficient du monôme $X_1^{b+c}X_2^{c+a}X_3^{a+b}$ dans P et V le coefficient du même monôme dans la série formelle D^{-1}.

(a) *Calcul de* U : en utilisant la formule du binôme, on développe f sous la forme

$$\begin{aligned} F = \sum_{\lambda=-c}^{b} \binom{b+c}{c+\lambda} (sX_2)^{c+\lambda}(tX_3)^{b-\lambda} \sum_{\mu=-a}^{c} \binom{c+a}{a+\mu} (sX_3)^{a+\mu}(tX_1)^{c-\mu} \\ \times \sum_{\nu=-b}^{a} \binom{a+b}{b+\nu} (sX_1)^{b+\nu}(tX_2)^{a-\nu} \\ = \sum_{\lambda,\mu,\nu} \binom{b+c}{c+\lambda}\binom{c+a}{a+\mu}\binom{a+b}{b+\nu} s^{(a+b+c)+(\lambda+\mu+\nu)} t^{(a+b+c)-(\lambda+\mu+\nu)} \\ \times X_1^{b+c-\mu+\nu} X_2^{c+a-\nu+\lambda} X_3^{a+b-\lambda+\mu}. \end{aligned}$$

On obtient le coefficient U de $X_1^{b+c}X_2^{c+a}X_3^{a+b}$ en faisant la somme de tous les termes pour lesquels $\lambda = \mu = \nu$ sont égaux à un entier k tel que $-p \le k \le p$, d'où

$$U = \sum_{k=-p}^{p} \binom{b+c}{c+k}\binom{c+a}{a+k}\binom{a+b}{b+k} s^{a+b+c+3k} t^{a+b+c-3k}. \tag{10}$$

(b) *Calcul de* V : on trouve immédiatement

$$D = 1 - stX_2X_3 - stX_3X_1 - stX_1X_2 - (s^3+t^3)X_1X_2X_3 = 1 - H$$

d'où par la formule du binôme

$$\begin{aligned} D^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} H^m = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta\ge 0} \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!} (stX_2X_3)^{\alpha}(stX_3X_1)^{\beta}(stX_1X_2)^{\gamma} \\ \times (s^3+t^3)^{\delta}(X_1X_2X_3)^{\delta} \\ = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta\ge 0} \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!} (st)^{\alpha+\beta+\gamma}(s^3+t^3)^{\delta} X_1^{\beta+\gamma+\delta} X_2^{\gamma+\alpha+\delta} X_3^{\alpha+\beta+\delta}. \end{aligned}$$

Or les nombres entiers positifs solutions du système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} \beta+\gamma+\delta &= b+c \\ \gamma+\alpha+\delta &= c+a \\ \alpha+\beta+\delta &= a+b \end{aligned}$$

sont donnés par $\alpha = a - n$, $\beta = b - n$, $\gamma = c - n$, $\delta = 2n$ où n parcourt l'ensemble des entiers compris entre 0 et p. On conclut alors

$$V = \sum_{n=0}^{p} \frac{(a+b+c-n)!}{(a-n)!\,(b-n)!\,(c-n)!}(st)^{a+b+c-3n}\frac{(s^3+t^3)^{2n}}{(2n)!}. \tag{11}$$

(c) *Démonstration de* (B) : le théorème de MacMahon fournit l'égalilté $U = V$. Si l'on remplace s^3 par u et t^3 par v dans l'égalité

$$(st)^{3p-(a+b+c)}U = (st)^{3p-(a+b+c)}V,$$

on obtient immédiatement (B).

La démonstration de (B′) s'obtient de manière analogue par la considération des coefficients du monôme $X_1^{b+c+1}X_2^{c+a+1}X_3^{a+b+1}$ dans le polynôme

$$Q = (sX_2 + tX_3)^{b+c+1}(sX_3 + tX_1)^{c+a+1}(sX_1 + tX_2)^{a+b+1}$$

et dans la série formelle D^{-1}.

FORMULAIRE

Dans tout ce formulaire, on note q, a, b et c des entiers positifs et l'on pose $p = \min\{a, b, c\}$.

I. *Cas pair.*

(A)
$$\binom{b+c}{c+k}\binom{c+a}{a+k}\binom{a+b}{b+k} = \sum_{n=|k|}^{p} \frac{(a+b+c-n)!}{(a-n)!\,(b-n)!\,(c-n)!\,(n+k)!\,(n-k)!} \quad \text{lorsque } |k| \le p.$$

(B)
$$\sum_{k=-p}^{p} \binom{b+c}{c+k}\binom{c+a}{a+k}\binom{a+b}{b+k} u^{p+k} v^{p-k} = \sum_{n=0}^{p} \frac{(a+b+c-n)!}{(a-n)!\,(b-n)!\,(c-n)!} (uv)^{p-n} \frac{(u+v)^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{[Foata 1965]}$$

(C)
$$\sum_{k=-p}^{p} \binom{b+c}{c+k}\binom{c+a}{a+k}\binom{a+b}{b+k} = \sum_{n=0}^{p} \frac{(a+b+c-n)!}{(a-n)!\,(b-n)!\,(c-n)!} \frac{2^{2n}}{(2n)!}$$

(D)
$$\sum_{k=-p}^{p} (-1)^k \binom{b+c}{c+k}\binom{c+a}{a+k}\binom{a+b}{b+k} = \frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!} \qquad \text{[Fjeldstad 1954]}$$

(E)
$$\binom{2q}{\ell}^3 = \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(2q+m)!}{(m!)^3\,(\ell-m)!\,(2q-\ell-m)!} \quad \text{si } 0 \le \ell \le 2q$$

(F)
$$\sum_{\ell=0}^{2q} \binom{2q}{\ell}^3 u^\ell v^{2q-\ell} = \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(2q+m)!}{(m!)^3\,(2q-2m)!} (uv)^m (u+v)^{2q-2m} \qquad \text{[MacMahon 1915]}$$

(G)
$$\sum_{\ell=0}^{2q} \binom{2q}{\ell}^3 = \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(2q+m)!}{(m!)^3\,(2q-2m)!} 2^{2q-2m} \qquad \text{[MacMahon 1915]}$$

(H)
$$\sum_{\ell=0}^{2q} (-1)^\ell \binom{2q}{\ell}^3 = (-1)^q \frac{(3q)!}{(q!)^3} \qquad \text{[Dixon 1890]}$$

II. *Cas impair* :

(A′)
$$\binom{b+c+1}{c+k}\binom{c+a+1}{a+k}\binom{a+b+1}{b+k} = \sum_{n=\kappa}^{p} \frac{(a+b+c-n+1)!}{(a-n)!\,(b-n)!\,(c-n)!\,(n+k)!\,(n-k+1)!}$$

lorsque $\kappa = \max\{-k, k-1\}$ est majoré par p.

$$(\mathrm{B}') \quad \sum_{k=-p}^{p+1} \binom{b+c+1}{c+k}\binom{c+a+1}{a+k}\binom{a+b+1}{b+k} u^{p+k} v^{p-k+1} = \sum_{n=0}^{p} \frac{(a+b+c-n+1)!}{(a-n)!\,(b-n)!\,(c-n)!} (uv)^{p-n} \frac{(u+v)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(\mathrm{C}') \quad \sum_{k=-p}^{p+1} \binom{b+c+1}{c+k}\binom{c+a+1}{a+k}\binom{a+b+1}{b+k} = \sum_{n=0}^{p} \frac{(a+b+c-n+1)!}{(a-n)!\,(b-n)!\,(c-n)!} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(\mathrm{D}') \quad \sum_{k=-p}^{p+1} (-1)^k \binom{b+c+1}{c+k}\binom{c+a+1}{a+k}\binom{a+b+1}{b+k} = 0$$

$$(\mathrm{D}'') \quad \sum_{k=-p}^{p+1} (-1)^{k+1} k \binom{b+c+1}{c+k}\binom{c+a+1}{a+k}\binom{a+b+1}{b+k} = \frac{(a+b+c+1)!}{a!\,b!\,c!}$$

$$(\mathrm{E}') \quad \binom{2q+1}{\ell}^3 = \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(2q+m+1)!}{(m!)^3\,(\ell-m)!\,(2q-\ell-m+1)!} \quad \text{si } 0 \le \ell \le q$$

$$(\mathrm{F}') \quad \sum_{\ell=0}^{2q+1} \binom{2q+1}{\ell}^3 u^{\ell} v^{2q-\ell+1} = \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(2q+m+1)!}{(m!)^3\,(2q-2m+1)!} (uv)^m (u+v)^{2q-2m+1}$$

$$(\mathrm{G}') \quad \sum_{\ell=0}^{2q+1} \binom{2q+1}{\ell}^3 = \sum_{m=0}^{\ell} \frac{(2q+m+1)!}{(m!)^3\,(2q-2m+1)!} 2^{2q-2m+1}$$

$$(\mathrm{H}') \quad \sum_{\ell=0}^{2q+1} (-1)^{\ell+1} \ell \binom{2q+1}{\ell}^3 = (-1)^q \frac{(3q+1)!}{(q!)^3}.$$

CHAPITRE VII

APPLICATIONS PROBABILISTES

1. Identité de Spitzer

Nus considèrerons dans la suite des séries formelles à coefficients complexes en une indéterminée t. Si U est une telle série, sans terme constant, son exponentielle est la série $\exp U = \sum_{m=0}^{\infty} U^m/m!$ La formule du binôme montre immédiatement que l'on a

$$\exp(U+V) = (\exp U)\cdot(\exp V). \tag{1}$$

De plus, pour toute série V sans terme constant, il existe une série U sans terme constant telle que $V = \sum_{m=1}^{\infty} U^m/m! = (\exp U) - 1$ et une seule : ceci résulte des théorèmes usuels sur la résolution "d'équations formelles." On en déduit que l'application exponentielle est une bijection de l'ensemble des séries sans terme constant, sur l'ensemble des séries de terme constant 1. L'application réciproque est appelée logarithme ; on note $\log V$ le logarithme de V.

Ces généralités étant rappelées, considérons deux suites

$$(a_n)_{n\geq 1} = (a_1, a_2, \dots) \quad \text{et} \quad (b_n)_{n\geq 1} = (b_1, b_2, \dots)$$

de nombres complexes. On dit qu'elles satisfont à l'*identité de Spitzer* si l'on a

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, t^n = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}\, t^k. \tag{2}$$

D'après ce qui précède, la correspondance $(a_n)_{n\geq 1} \leftrightarrow (b_n)_{n\geq 1}$ exprimée par cette identité est bijective.

On peut donner une forme récurrente plus simple à cette relation. Notons U' la dérivée d'une série U ; on sait que la dérivée de $\exp U$ est $U'\cdot\exp U$. Posons alors

$$A = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, t^n, \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}\, t^k.$$

La relation (2) s'écrit $A = \exp B$, d'où $tA' = tB'\cdot\exp B = A\cdot(tB')$; or on a $tA' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n t^n$ et $tB' = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k$; en prenant le coefficient de t^n dans l'identité $tA' = A \cdot (tB')$, on trouve

$$na_n = b_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot b_{n-k} \quad (n \geq 1). \tag{3}$$

La suite $(b_n)_{n\geq 1}$ étant donnée, les relations (3) pour $n = 1, 2, \dots$ déterminent de manière unique la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ par récurrence. Autrement dit, la relation de Spitzer équivaut au système des relations (3).

Notre but est maintenant de calculer explicitement le coefficient a_n en fonction de $b_1, \dots, b_n$ (pour $n \geq 1$ donné). On a $B = B_1 + B_2$ avec

$$B_1 = b_1 t + \frac{b_2}{2} t^2 + \cdots + \frac{b_n}{n} t^n, \quad B_2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{k} t^k.$$

Comme la série B_2 est divisible par t^{n+1}, il en est de même de la série $(\exp B_2) - 1 = \sum\limits_{m=1}^{\infty} (B_2)^m/m!$ et *a fortiori* de

$$(\exp B_1)((\exp B_2) - 1) = (\exp B_1)(\exp B_2) - \exp B_1 = \exp B - \exp B_1.$$

Le coefficient de t^n dans $\exp B$ est donc le même que dans $\exp B_1$; or on a

$$\begin{aligned}
\exp B_1 &= \exp\Big(b_1 t + \frac{b_2}{2} t^2 + \cdots + \frac{b_n}{n} t^n\Big) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \exp \frac{b_k}{k} t^k \\
&= \prod_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \Big(\frac{b_k}{k}\Big)^m t^{km} \\
&= \sum_{m_1,\dots,m_n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{m_k!} \Big(\frac{b_k}{k}\Big)^{m_k} t^{km_k}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$a_n = \sum \frac{b_1^{m_1} \cdots b_n^{m_n}}{m_1! \cdots m_n! \, 1^{m_1} 2^{m_2} \cdots n^{m_n}}, \tag{4}$$

la sommation étant étendue à toutes les suites $(m_1, \dots, m_n)$ de n entiers positifs satisfaisant à $1m_1 + 2m_2 + \cdots + m_n = n$.

Avant d'énoncer la proposition 7.1, il nous faudra introduire quelques notations. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes ; pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ et γ_n la permutation circulaire d'ordre n définie par

$$\gamma_n(i) = \begin{cases} i+1, & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 ; \\ 1, & \text{si } i = n. \end{cases} \tag{5}$$

Enfin, si $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma \oplus \tau$ l'élément ρ de $\mathfrak{S}_{m+n}$ défini par

$$\rho(i) = \begin{cases} \sigma(i), & \text{si } 1 \leq i \leq m ; \\ m + \tau(i-m), & \text{si } m+1 \leq i \leq m+n. \end{cases} \tag{6}$$

Proposition 7.1. — *On suppose donnée une suite de fonctions $h_n : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}$ (pour $n \geq 1$) satisfaisant aux relations :*

(a) *on a $h_n(\tau\sigma\tau^{-1}) = h_n(\sigma)$ pour σ, τ dans $\mathfrak{S}_n$;*

(b) *on a $h_{m+n}(\sigma \oplus \tau) = h_m(\sigma) \cdot h_n(\tau)$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$.*

Posons $a_n = (1/n!) \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} h_n(\sigma)$ et $b_n = h_n(\gamma_n)$. L'identité de Spitzer est satisfaite pour les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$; supposons que σ se décompose en p cycles de longueurs respectives $n_1, \ldots , n_p$. Il est bien connu qu'il existe $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tel que

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \gamma_{n_1} \oplus \cdots \oplus \gamma_{n_p};$$

d'après les hypothèses (a) et (b), on a alors

$$h_n(\sigma) = h_n(\tau\sigma\tau^{-1}) = h_{n_1}(\gamma_{n_1}) \cdots h_{n_p}(\gamma_{n_p}) = b_{n_1} \cdots b_{n_p}.$$

Autrement dit, si σ comporte m_k cycles de longueur k pour $k = 1, 2, \ldots, n$, on a $h_n(\sigma) = b_1^{m_1} \cdots b_k^{m_k}$. Il est bien connu qu'il existe dans $\mathfrak{S}_n$ un nombre égal à $n!/(m_1! \cdots m_n!\, 1^{m_1} \cdots n^{m_n})$ permutations ayant m_k cycles de longueur k pour $k = 1, 2, \ldots, n$. On a alors

$$a_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} h_n(\sigma) = \frac{1}{n!} \sum \frac{n!}{m_1! \cdots m_n!\, 1^{m_1} \cdots n^{m_n}}\, b_1^{m_1} \cdots b_n^{m_n},$$

c'est-à-dire que la relation (4) est satisfaite. $\square$

Remarque 7.2. — Si l'on pose $h_n(\sigma) = 1$ pour tout $n \geq 1$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, les conditions (a) et (b) de la proposition 7.1 sont remplies. On a dans ce cas $a_n = b_n = 1$, d'où

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}.$$

Le premier membre est l'inverse de $1 - t$; changeant t en $-t$, puis prenant le logarithme de l'inverse des deux membres (on a $(\exp U)^{-1} = \exp(-U)$), on retrouve l'identité bien connue

$$\log(1 + t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k}.$$

2. Propriétés du permanent

Rappelons d'abord la définition du permanent $\mathrm{Per}(a_{ij})$ d'une matrice carrée complexe $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$: c'est le nombre

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Cette définition ne diffère de celle du déterminant que par l'omission des signes $\pm$.

Dans la suite de ce n°, on note X un ensemble totalement ordonné et u une fonction à valeurs complexes sur $X \times X$. ([10])

LEMME 7.3. — *Pour $x_1, \ldots, x_n$ dans X, posons*

$$h_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} u(\overline{x}_i, x_i), \tag{7}$$

où $\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n$ est le réarrangement croissant de $x_1 \cdots x_n$. On a alors

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} h_n(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \operatorname{Per}(u(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq n}. \tag{8}$$

Notons $a(x_1, \ldots, x_n)$ le premier membre de (8) et $b(x_1, \ldots, x_n)$ le second. Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$; on a

$$\begin{aligned}
b(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} u(x_{\tau(i)}, x_{\tau\sigma(i)}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} u(x_j, x_{\tau\sigma\tau^{-1}(j)}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} u(x_j, x_{\sigma(j)}) \\
&= b(x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Autrement dit, la fonction de n variables b est symétrique ; comme il en est évidemment de même de a, il suffit d'établir la formule (8) lorsque la suite $(x_1, \ldots, x_n)$ est croissante. Mais dans ce cas, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le mot $x_1 \cdots x_n$ est le réarrangement croissant de $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$, d'où

$$h_n(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \prod_{i=1}^{n} u(x_i, x_{\sigma(i)});$$

en sommant sur σ, on trouve immédiatement (8). $\square$

LEMME 7.4. — *On suppose que l'on a $n \geq 2$ et $u(x, y) = 1$ lorsque $x \geq y$. Pour $x_1, \ldots, x_n$ dans X, posons*

$$k_n(x_1, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n-1} u(x_i, x_{i+1}). \tag{9}$$

On a alors

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} k_n(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \operatorname{Per}(u(x_i, x_j))_{1 \leq i,j \leq n}. \tag{10}$$

([10]) La définition du permanent conserve un sens pour des matrices à coefficients dans un anneau commutatif quelconque. On peut généraliser de manière analogue les lemmes 7.3 et 7.4.

En raisonnant comme dans le lemme précédent, on voit qu'il suffit de prouver l'identité (10) dans le cas d'une suite croissante $(x_1, \ldots, x_n)$. Posons alors $a_{ij} = u(x_i, x_j)$ pour $1 \leq i, j \leq n$ d'où $a_{ij} = 1$ lorsque $i \geq j$. On est donc ramené à prouver la relation

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n-1} a_{\sigma(i),\sigma(i+1)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n-1} a_{i,\sigma(i)} \tag{11}$$

(noter que l'on a $n \geq \sigma(n)$ d'où $a_{n,\sigma(n)} = 1$).

Or les réarrantements du mot $12 \cdots n$ sont les suites $\sigma(1)\sigma(2) \cdots \sigma(n)$ où σ parcourt $\mathfrak{S}_n$. Appliquons le théorème 4.11, (c) au cas où $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, où Ω est le monoïde multiplicatif des nombres complexes et $c(i, j) = a_{ij}$. On en déduit qu'il existe une bijection $\Phi : \sigma \mapsto \sigma'$ de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même telle que

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_{\sigma(i),\sigma(i+1)} = \prod_{i=1}^{n-1} a_{i,\sigma'(i)} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n). \tag{12}$$

Sommant sur σ (ou, ce qui revient au même, sur σ'), on déduit immédiatement (11) de (12). $\square$

3. Fonctions caractéristiques de certaines variables aléatoires

Dans ce n°, on note $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P})$; on note $\mathbb{E}[\tau]$ l'espérance d'une variable aléatoire τ définie sur $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P})$. On rappelle que $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

Lemme 7.5. — *Soit u une fonction borélienne et bornée sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs complexes. Pour tout entier $n \geq 1$, posons*

$$a_n = \frac{1}{n!}\mathbb{E}[\mathrm{Per}(u(\xi_i, \xi_j))_{1 \leq i,j \leq n}]$$
$$b_n = \mathbb{E}[u(\xi_1, \xi_2) \cdots u(\xi_{n-1}, \xi_n) u(\xi_n, \xi_1)].$$

Les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ satisfont à l'identité de Spitzer.

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, posons

$$h_n(\sigma) = \mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{n} u(\xi, \xi_{\sigma(i)})\Big].$$

Il est clair qu'on a

$$a_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} h_n(\sigma), \quad b_n = h_n(\gamma_n);$$

il suffit donc de prouver que les fonctions h_n satisfont aux hypothèses (a) et (b) de la proposition 7.1.

(a) Soient d'abord σ et τ dans $\mathfrak{S}_n$; définissons une fonction borélienne et bornée v sur $\mathbb{R}^n$ par

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} u(x_i, x_{\sigma(i)}).$$

On a

$$\begin{aligned} v(x_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(n)}) &= \prod_{i=1}^{n} u(x_{\tau(j)}, x_{\tau\sigma(j)}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} u(x_i, x_{\tau\sigma\tau^{-1}(i)}) \end{aligned}$$

(la première égalité par substitution dans la définition de v, la seconde par le changement $j = \tau^{-1}(i)$). On en déduit

$$\begin{aligned} h_n(\sigma) &= \mathbb{E}[v(\xi_1, \ldots, \xi_n)] \\ h_n(\tau\sigma\tau^{-1}) &= \mathbb{E}[v(\xi_{\tau(1)}, \ldots, \xi_{\tau(n)})]; \end{aligned}$$

mais le vecteur aléatoire $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est à composantes indépendantes de même loi et sa loi est invariante par permutation des coordonnées ; les variables aléatoires $v(\xi_n, \ldots, \xi_n)$ et $v(\xi_{\tau(1)}, \ldots, \xi_{\tau(n)})$ ont donc même espérance. En conclusion, on a $h_n(\tau\sigma\tau^{-1}) = h_n(\sigma)$.

(b) Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$; posons $\rho = \sigma \oplus \tau$. On a

$$\begin{aligned} h_{m+n}(\rho) &= \mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{m} u(\xi_i, \xi_{\sigma(i)}) \cdot \prod_{j=1}^{n} u(\xi_{m+j}, \xi_{m+\tau(j)})\Big] \\ h_m(\sigma) &= \mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{m} u(\xi_i, \xi_{\sigma(i)})\Big] \\ h_n(\tau) &= \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} u(\xi_j, \xi_{\tau(j)})\Big]; \end{aligned}$$

mais les hypothèses faites sur la suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ entraînent que les vecteurs aléatoires $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ et $(\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{m+n})$ sont indépendants et que le vecteur aléatoire $(\xi_{m_1}, \ldots, \xi_{m+n})$ a même loi que $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$. La formule $h_{m+n}(\rho) = h_m(\sigma) \cdot h_n(\tau)$ est alors immédiate. $\square$

Avant d'énoncer les deux thèorèmes fondamentaux de ce chapitre, nous introduirons quelques notations supplémentaires. On note b une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\overline{\xi}_1^{(n)}$, … , $\overline{\xi}_n^{(n)}$ le réarrangement croissant de la suite ξ_1, … , ξ_n ; ([11]) on pose

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} b(\overline{\xi}_i^{(n)}, \xi_i) \tag{13}$$

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^{n-1} b(\xi_i, \xi_{i+1}) \tag{14}$$

$$\theta_n = \zeta + b(\xi_n, \xi_1). \tag{15}$$

([11]) Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $\overline{\xi}_1^{(n)}(\omega)$, … , $\overline{\xi}_n^{(n)}(\omega)$ est le réarrangement croissant de la suite $\xi_1(\omega)$, … , $\xi_n(\omega)$.

Enfin, si ξ est une variable aléatoire réelle et q un nombre réel, on pose

$$\varphi_\xi(q) = \mathbb{E}[e^{iq\xi}] \tag{16}$$

(φ_ξ est la fonction caractéristique de ξ).

THÉORÈME 7.6. — *Soit q un nombre réel. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $a_n = \varphi_{\eta_n}(q)$ et $b_n = \varphi_{\theta_n}(q)$. Alors les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ satisfont à l'identité de Spitzer.*

THÉORÈME 7.7. — *Supposons que l'on ait $b(x,y) = 0$ lorsque $x \geq y$. Alors les variables aléatoires η_n et ζ_n ont même loi.*

Posons $u(x,y) = e^{iqb(x,y)}$; la fonction u sur $\mathbb{R}^2$ est borélienne et de module 1, donc bornée. On définit h_n comme dans le lemme 7.3, d'où

$$a_n = \mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{n} u(\overline{\xi}_i^{(n)}, \xi_i)\Big] = \mathbb{E}[h_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)];$$

comme le vecteur aléatoire $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est symétrique, on a donc

$$a_n = \frac{1}{n!}\Big[\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} h_n(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(n)})\Big].$$

Le lemme 7.3 entraîne

$$a_n = \frac{1}{n!}\mathbb{E}[\operatorname{Per}(u(\xi_i, \xi_j))_{1\leq i,j\leq n}];$$

comme on a évidemment

$$b_n = \mathbb{E}[u(\xi_1, \xi_2)u(\xi_2, \xi_3)\cdots u(\xi_{n-1}, \xi_n)u(\xi_n, \xi_1)],$$

le lemme 7.5 montre que les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ satisfont à l'identité de Spitzer. Ceci démontre le théorème 7.6.

Supposons maintenant que l'on ait $b(x,y) = 0$ pour $x \geq y$; posons encore $u(x,y) = e^{iqb(x,y)}$, d'où $u(x,y) = 1$ pour $x \geq y$. Enfin posons

$$a'_n = \varphi_{\zeta_n}(q) = \mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{n-1} u(\xi_i, \xi_{i+1})\Big].$$

En raisonnant comme précédemment, mais en utilisant le lemme 7.4 en place du lemme 7.3, on voit que les suites $(a'_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ satisfont à l'identité de Spitzer. On a donc $a'_n = a_n$, c'est-à-dire $\varphi_{\zeta_n}(q) = \varphi_{\eta_n}(q)$ pour tout $n \geq 1$ et tout nombre réel q. Autrement dit, les variables aléatoires ζ_n et η_n ont même fonction caractéristique, donc même loi. Ceci démontre le théorème 7.7. ∎

Exemple 7.8. — Soit $[c,d]$ un intervalle fini, le cas particulier $c = d$ n'étant pas dépourvu d'intérêt. Définissons la fonction b sur $\mathbb{R}^2$ par

$$b(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < c \text{ et } y > d\,; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair qu'on a $b(x, y) = 0$ lorsque $x \geq y$. La signification des variables η_n et ζ_n est facile à élucider dans ce cas :

(a) si N est le nombre aléatoire d'indices i tels que $1 \leq i \leq n$ et $\xi_i < c$, alors η_n est le nombre aléatoire d'indices j tels que $1 \leq j \leq N$ et $\xi_h > d$. Ceci s'interprète aisément en termes de méthode d'échantillonnage.

(b) ζ_n est le nombre aléatoire d'indice i tels que $1 \leq i \leq n-1$, $\xi_i < c$ et $\xi_{i+1} > d$; on peut l'appeler le nombre des traversées croissantes de l'intervalle $[c, d]$.

Ces deux variables aléatoires prennent les valeurs 0, 1, 2, ... , $n-1$; le théorème 7.7 entraîne qu'elles ont même loi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Foata (D.). — Étude algébrique de certains problèmes d'Analyse Combinatoire et du Calcul des Probabilités, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, t. **14**, 1965, p. 81–241.

[2] Hardy (G. H.) et Wright (E. M.). — *An Introduction to the Theory of Numbers.* 4ième édition, Oxford Univ. Press, 1960.

[3] MacMahon (P. A.). — *Combinatory Analysis*, 1. — Cambridge Univ. Press, 1915 (réimpression : Chelsea Publ. Co., New York, 1960).

[4] Rota (G.-C.). — On the Foundations of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius Functions, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. **2**, 1964, p. 340–368.

[5] Spitzer (F.). — A combinatorial lemma and its appllication to probability theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **82**, 1956, p. 323–339.

INDEX DES PRINCIPALES NOTATIONS

(Une référence telle que IV.3 renvoie au n° 3 du chapitre IV.)

Symbole	*Référence*	*Signification*
$\mathrm{Mo}(Z)$	I.1	Monoïde libre construit sur Z.
$\mathrm{Ab}(Z)$	I.1	Monoïde commutatif libre construit sur Z.
ϵ	I.1	Homomorphisme canonique de $\mathrm{Mo}(Z)$ dans $\mathrm{Ab}(Z)$.
$L(Z;C)$	I.2	Monoïde défini par des relations de commutation.
π	I.2	Homomorphisme canonique de $L(Z;C)$ dans $\mathrm{Ab}(Z)$.
λ	I.2	Homomorphisme canonique de $\mathrm{Mo}(Z)$ dans $L(Z;C)$.
ι	I.2	Involution de $L(Z;C)$.
$[z]$	I.2	Élément de $L(Z;C)$ correspondant à $z \in Z$.
$[F]$	I.2	Produit des éléments $[z]$ pour z parcourant la partie commutative F.
μ_M	II.1	Fonction de Möbius du monoïde M.
$\|F\|$	II.3	Nombre d'éléments d'un ensemble fini F.
$\sigma(a)$	III.1	Source de l'arête a.
$\beta(a)$	III.1	But de l'arête a.
$N(f)$	III.1	Matrice d'incidence du flot f.
$b(a)$	III.2	Flot associé à l'arête a.
$\sigma(c)$	III.5	Source du chemin c.
$\beta(c)$	III.5	But du chemin c.
$b(c)$	III.5	Flot associé au chemin c.
$F(X)$	IV.1	Monoïde des flots sur l'ensemble X.
$Q(X)$	IV.1	Monoïde des réarrangements construit sur X.
θ	IV.1	Homomorphisme canonique de $F(X)$ dans $\mathrm{Ab}(X)$.
$n_{x,y}(f)$	IV.1	Multiciplicité du couple (x,y) dans le flot f.
$\binom{w}{w'}$	IV.1	Réarrangement défini par les mots w et w'.
n_c	IV.1	Homomorphisme de $F(X)$ dans Ω associé à l'application c de $X \times X$ dans Ω.
γw	IV.2	Mot déduit de w par permutation circulaire.
$[w]$	IV.2	Cycle associé à un mot w sans lettres répétées.
$\overline{w}$	IV.3	Réarrangement croissant du mot w.
$Q'(X)$	IV.3	Monoïde d'intercalement construit sur l'ensemble totalement ordonné X.

Γ	IV.3	Isomomorphisme de $Q'(X)$ sur $Q(X)$ défini par $\Gamma(w) = \binom{w}{\overline{w}}$.
Π	IV.3	Isomorphisme réciproque de Γ.
$w \, \tau \, w'$	IV.3	Produit d'intercalement des mots w et w'.
$\nu_{x,y}(w)$	IV.3	Nombre des paires $(\overline{x}_i, x_i)$ égales à (x, y) où $w = x_1 \cdots x_m$ et $\overline{w} = \overline{x}_1 \cdots \overline{x}_m$.
ν_c	IV.3	Homomorphisme de $Q'(X)$ dans Ω associé à l'application c de $X \times X$ dans Ω.
$\xi_{x,y}(w)$	IV.4	Nombre de couples (x_i, x_{i+1}) égaux à (x, y) où $w = x_1 \cdots x_m$.
$\xi_c(w)$	IV.4	Somme $c(x_1, x_2) + \cdots + c(x_{m-1}, x_m)$ pour $w = x_1 \cdots x_m$ et une application c de $X \times X$ dans Ω.
Fw	IV.4	Dernière lettre du mot w.
Δ	IV.4	Bijection de $\mathrm{Mo}(X)$ sur $Q(X)$ définie par $\Delta(w) = \binom{\gamma w_1 \cdots \gamma w_p}{w_1 \cdots w_p}$ si $(w_1, \ldots, w_p)$ est la décomposition descendante de w.
Φ	IV.5	Permutation $\Gamma^{-1} \circ \Delta$ de $\mathrm{Mo}(X)$.
$\nu(w)$	IV.5	Nombre des indices i avec $\overline{x}_i < x_i$ où $w = x_1 \cdots x_m$ et $\overline{w} = \overline{x}_1 \cdots \overline{x}_m$.
$\xi(w)$	IV.5	Nombre des indices i tels que $x_i < x_{i+1}$ pour le mot $w = x_1 \cdots x_m$.
γ_n	VII.1	Permutation circulaire de $12 \cdots n$.
$\sigma \oplus \tau$	VII.1	Permutation $\begin{pmatrix} \sigma(1) \cdots \sigma(m) & m + \tau(1) \cdots m + \tau(n) \\ 1 \quad \cdots \quad m & m+1 \quad \cdots \quad m+n \end{pmatrix}$.
$\mathrm{Per}(a_{i,j})$	VII.2	Permanent de la matrice carrée (a_{ij}).
$(\xi_n)_{n \geq 1}$	VII.3	Une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi.
$\overline{\xi}_1^{(n)}, \ldots, \overline{\xi}_n^{(n)}$	VII.3	Réarrangement croissant de $\xi_1, \ldots, \xi_n$.
b	VII.3	Fonction borélienne de deux variables réelles.
$\gamma_n, \zeta_n, \theta_n$	VII.3	Variables aléatoires déduites de $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et n.

Notations générales

$\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers.
$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.
$\mathfrak{S}_n$: ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

INVERSIONS DE MÖBIUS ([1])

Dominique Foata

La formule d'inversion de Möbius, comme le soulignait fort justement le professeur Temperley lors de la Rencontre d'Aberdeen (6-12 juillet 1975), n'est en fait qu'une sublimation du principe d'inclusion-exclusion. Chacun sait bien que le plus difficile dans les applications est de *calculer* la fonction de Möbius sous-jacente et à l'exception de quelques cas simples, ce calcul ne dérive pas des principes, mais reste une affaire d'ingéniosité et d'expérience.

La formule d'inversion, de façon habituelle (*cf.*, par exemple, Rota (1964)), est présentée dans le cadre des *ensembles ordonnés localement finis* ("locally finite partially ordered sets"). Dans Cartier-Foata (1969, chap. 2), on trouve une définition de fonction de Möbius des *monoïdes à factorisation finie.* Le but de cette note est de montrer la connexion entre ces deux présentations.

En aucun cas, je ne veux faire ici œuvre originale : mon but est simplement de montrer qu'il n'y a qu'une "théorie" de l'inversion de Möbius. Le cadre choisi pour présenter la formule d'inversion est au fond accessoire et ne peut être qu'une structure algébrique rudimentaire. En fait, la proposition 1 ci-dessous doit être attribuée à Rota (1972) et la proposition 2 à Schützenberger (1974) dans des communications privées avec l'auteur.

1. Ensembles ordonnés

La construction de la fonction de Möbius pour les ensembles ordonnés est très clairement exposée dans Rota (1964). Soit P un ensemble ordonné localement fini, c'est-à-dire que si $x \le y$, il n'y a qu'un nombre *fini* de $z \in P$ tels que $x \le z \le y$. On forme l'ensemble $R(P \times P)$ des fonctions réelles de deux variables x et y, où x et y sont dans P, ayant les propriétés suivantes :

(i) $f(x,y) = 0$ si $x \not\le y$;

(ii) $f(x,x)$ est, pour tout $x \in P$, une constante qui ne dépend que de f.([2])

L'ensemble $R(P \times P)$ est muni d'une structure d'algèbre associative sur le corps des réels – on l'appellera désormais l'*algèbre d'incidence* de P – en prenant pour somme $f+g$ et produit fg de deux éléments f, g de $R(P \times P)$, les fonctions définies par

$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y);$$
$$(fg)(x,y) = \sum_{x \le z \le y} f(x,z)g(z,y);$$

([1]) The present text was written on the occasion of the *Science Research Council Rencontre*, Aberdeen, July 6–12 1975 and had never been published since.

([2]) La restriction (ii) n'est en général pas imposée. Elle est ici mentionnée par commodité. On se persuadera que les fonction ξ_P et μ_P définies ci-après appartiennent bien à $R(P \times P)$.

pour tout x, y dans P. L'algèbre $R(P \times P)$ a un élément unité δ (la fonction de Kronecker). On distingue enfin une application ξ_P définie par

$$\xi_P(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \le y\,; \\ 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

La fonction de Möbius μ_P de P n'est autre que l'inverse (on démontre qu'il existe !) de ξ_P dans $A(P \times P)$. Autrement dit, μ_P est la fonction satisfaisant à

$$\xi_P\, \mu_P = \mu_P\, \xi_P = \delta.$$

2. Monoïdes à factorisation finie

Soit maintenant M un monoïde, c'est-à-dire un ensemble muni d'une opération associative (qu'on notera multiplicativement), admettant un élément unité (qu'on notera 1). Le monoïde M peut ou non contenir un élément zéro, noté 0, tel que $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ pour tout x dans M. On note M^+ l'ensemble des éléments non nuls de M.

On appelle *décomposition* d'un élément x de M toute suite finie $s = (x_1, \ldots, x_q)$ d'éléments de M, différents de 0 et de 1, telle que $x = x_1 \cdots x_q$. L'entier q s'appelle le *degré* de la décomposition s. On admet, par convention, une décomposition vide de 1, de degré 0. On dit que le monoïde M est à *factorisation finie*, si tout élément de M^+ n'admet qu'un nombre fini de décompositions.

Soit $R(M)$ l'ensemble des fonctions réelles sur M^+. On munit $R(M)$ d'une structure d'algèbre associative en posant

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);$$
$$(fg)(x) = \sum_{x_1 x_2 = x} f(x_1) g(x_2).$$

Dans la seconde règle ci-dessus, la sommation est étendue à tous les couples (x_1, x_2) tels que $x_1 x_2 = x$, en particulier, aux couples $(1, x)$ et $(x, 1)$. On dira encore que $R(M)$ est l'*algèbre d'incidence* de M. De même, on distingue deux éléments ξ_M et ϵ_M dans $R(M)$, définis par $\xi_m(x) = 1$ pour tout x dans M^+ et $\epsilon_M(x) = 1$ ou 0 suivant que $x = 1$ ou $x \ne 0, 1$.

3. Formules d'inversion

La formule d'inversion de Möbius dans le cas des ensembles ordonnés est la suivante : soient f et g deux fonctions réelles d'*une* variable x courant dans un ensemble ordonné P et p un élément de P. Alors les relations suivantes sont équivalentes :

$$g(x) = \sum_{p \le y \le x} f(y), \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } P\,;$$
$$f(x) = \sum_{p \le y \le x} g(y) \mu_P(y, x), \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } P.$$

Dans le cas des monoïdes à factorisation finie, la formule d'inversion de Möbius est une identité dans l'algèbre d'incidence $R(M)$ du monoïde M (*cf.* Cartier-Foata (1969), p. 20). Soient f et g deux fonctions réelles sur M^+. On a l'équivalence entre les deux formules

$$g(x) = \sum_{x_1 x_2 = x} f(x_2), \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } M^+ ;$$
$$f(x) = \sum_{x_1 x_2 = x} \mu_M(x_1) g(x_2), \quad \text{pour tout } x \text{ dans } M^+.$$

Un dernier rapprochement entre μ_P et μ_M. Dans le cas des ensembles ordonnés, on détermine μ_P par récurrence au moyen des formules $\mu_P(x,x) = 1$ et

$$\mu_P(x,y) = -\sum_{x \le z \le y,\, z \ne y} \mu_P(x,z),$$

en utilisant le fait qu'il n'y a qu'un ensemble fini de z tels que $x \le z \le y$.

Dans le cas des monoïdes, la fonction de Möbius μ_M est donnée en chaque point x par l'argument suivant. Pour tout x dans M^+ on note $d_+(x)$ (resp. $d_-(x)$) le nombre de décompositions de x de degré pair (resp. impair). Alors

$$\mu_M(x) = d_+(x) - d_-(x)$$

pour tout x dans M.

4. Algèbres d'incidence des monoïdes

Voyons maintenant comment le calcul de toute fonction de Möbius d'un ensemble ordonné peut être ramené au calcul d'une fonction de Möbius d'un monoïde à factorisation finie.

PROPOSITION 1. — *Soit $R(P \times P)$ l'algèbre d'incidence d'un ensemble ordonné localement fini P. Alors il existe un monoïde à factorisation finie M tel que son algèbre d'incidence $R(M)$ soit isomorphie à $R(P \times P)$.*

Démonstration. — Soit J l'ensemble des couples (x,y) d'éléments de P tels que $x \le y$ et $x \ne y$. Soient encore deux éléments que nous noterons 0 et 1 n'appartenant pas à P. On munit l'ensemble $M = \{0,1\} \cup J$ d'une structure de monoïde en posant

$$(*) \qquad \begin{aligned} &0 \cdot m = m \cdot 0 = 0, && \text{pour tout } m \text{ dans } M ; \\ &1 \cdot m = m \cdot 1 = m, && \text{pour tout } m \text{ dans } M^+ = M \setminus \{0\} ; \end{aligned}$$

et pour (x,y) , (z,t) dans J

$$(**) \qquad (x,y) \cdot (z,t) = \begin{cases} (x,t), & \text{si } y = z ; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La multiplication ainsi définie est évidemment associative. Si (x,y) est dans J, il n'admet qu'un nombre fini de décompositions, puisque le segment $[x,y] = \{z \in P : x \le z \le y\}$ est fini. Le monoïde M est donc à factorisation finie.

Soit maintenant $f \in R(P \times P)$. On définit la fonction réelle f_M sur M^+ par les relations

(i) $\qquad f_M(1) = f(x,x), \qquad$ pour un élément x quelconque de P ;

(ii) $\qquad f_M(x,y) = f(x,y), \qquad$ pour $x < y$.

Montrons que l'application $f \mapsto f_M$ est un isomorphisme de $R(P \times P)$ sur $R(M)$. Le caractère bijectif de $f \mapsto f_M$ est évident d'après les relations (i) et (ii) et la relation $(f+g)_M = f_M + g_M$ est triviale. Reste à vérifier : $(fg)_M = f_M g_M$. Or, pour $x < y$, on a

$$\begin{aligned}(fg)_M(x,y) &= \sum_{x \le z \le y} f(x,z)g(z,y)\\ &= \sum_{x<z<y} f(x,z)g(z,y) + f(x,x)g(x,y) + f(x,y)g(y,y)\\ &= \sum f_M(x_1,y_1)g_M(x_2,y_2) + f_M(1)g_M(x,y) + f_M(x,y)g_M(1),\end{aligned}$$

où la sommation est étendue à l'ensemble des paires de couples (x_1,y_1), (x_2,y_2) tels que $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x,y)$. D'où

$$(fg)_M = (f_M g_M)(x,y).$$

Enfin, pour tout x dans P,

$$\begin{aligned}(fg)_M(1) &= (fg)(x,x)\\ &= f(x,x)g(x,x) = f_M(1)g_M(1)\\ &= (f_M g_M)(1). \quad \square\end{aligned}$$

Corollaire. — *Soit M le monoïde associé à l'ensemble ordonné P par les relations $(*)$ et $(**)$. On a alors*

$$\mu_P(x,y) = \mu_M(x,y)$$

pour tout couple (x,y) tel que $x \le y$.

En effet, μ_M est l'image de μ_P par l'isomomorphisme $f \mapsto f_M$.

5. Algèbres d'incidence des ensembles ordonnés

Réciproquement, on peut ramener le calcul de la fonction de Möbius d'un monoïde à factorisation finie M à celui de la fonction de Möbius d'un ensemble ordonné P. Il y a cependant une restriction à imposer sur le monoïde M. On dit qu'un monoïde M est *simplifiable* (à droite) si pour x, u, v dans M avec $x \neq 0$ on a : $[xu = xv] \Rightarrow [u = v]$. Supposons M simplifiable. Si u, x, y sont dans M et si $y = xu$, l'élément u est défini de façon unique. On peut donc poser

$$u = y/x \quad \text{et ainsi} \quad y = x\,(y/x).$$

Compte tenu de cette restriction, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 2. — *Soit $R(M)$ l'algèbre d'incidence d'un monoïde à factoorisation finie et simplifiable. Alors il existe un ensemble ordonné localement fini P tel que son algèbre d'incidence $R(P\times P)$ soit isomorphe à $R(M)$.*

Démonstration. — L'ensemble ordonné P qu'on va associer à M est la paire $(M,\le)$, où "$\le$" est l'ordre défini par

$$x\le y \quad \text{si } y=xu \text{ pour un certain } u \text{ dans } M.$$

On définit de cette façon un ordre sur M, car si $y=xu$ et $y=zv$, on a $z=xuv$; d'où $x\le y$ et $y\le z$ entraînent $x\le y$. De plus, cet ordre est localement fini, car si l'on a $x\le y\le z$, on a aussi $z=yv$ pour un certain v, où encore (y,v) est une décomposition de degré 2 de z. Comme il n'y a qu'un nombre fini de décompositions de z, il n'y a donc qu'un nombre fini d'éléments y satisfaisant à $x\le y\le z$. Comme on a supposé M *simplifiable*, il existe un et un seul élément noté y/x tel que $y=x(y/x)$ lorsque $x\le y$.

Soit f une fonction appartenant à $R(M)$. On pose alors pour x,y dans M

$$f_P(x,y)=\begin{cases} f(y/x), & \text{si } x\le y\,;\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Comme précédemment on peut vérifier que $f\mapsto f_P$ est bijectif et linéaire. Soient f et g deux éléments de $R(M)$. On a pour $x\le y$

$$\begin{aligned}(fg)_P(x,y)=(fg)(y/x)&=\sum_{u_1u_2=y/x} f(u_1)g(u_2)\\ &=\sum_{x\le y\le z} f(z/x)g(y/z)\\ &=\sum_{x\le y\le z} f_P(x,z)g_P(z,y)=(f_Pg_P)(x,y). \quad \square\end{aligned}$$

La fonction de Möbius μ_P de l'ensemble $P=(M,\le)$ est alors donnée par

$$\mu_P(x,y)=\mu_M(y/x), \quad \text{lorsque } x\le y.$$

Bibliographie

Pierre Cartier, Dominique Foata (1969). — *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements.* — Lecture Notes in Math., no. **85**, Springer-Verlag, Berlin.

Gian-Carlo Rota (1964). — On the Foundations of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius Inversion, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **2**, p. 340–368.

Gian-Carlo Rota (1972). — Communication privée.

Marcel-Paul Schützenberger (1974). — Communication privée.

Institut Lothaire
1, rue Murner
67000 Strasbourg, France

Retyped with TEX, December 10, 2005.

LE POLYNÔME CHROMATIQUE

Bodo LASS

Institut Camille Jordan (UMR 5208 du CNRS)
Université Claude Bernard – Lyon 1
Bâtiment Doyen Jean Braconnier (101)
43, Boulevard du 11 Novembre 1918
F-69622 Villeurbanne Cedex

Courriel : `lass@math.univ-lyon1.fr`

Regardons la toute première identité dans Cartier-Foata ([1], p. 1, formule (1)) (ou bien le théorème 2.4, p. 13) et associons un graphe (simple) $G = (V, E)$ à cette identité : chaque sommet $v \in V$ correspond à une variable T_v et chaque arête $\{u, v\} \in E$ correspond, de façon bijective, à deux variables T_u, T_v qui ne commutent pas. Par conséquent, les monômes formés de lettres distinctes commutant deux à deux correspondent aux ensembles de sommets qui ne contiennent aucune arête : on les appelle *indépendants*.

Imposons maintenant les relations supplémentaires $T_v^2 = 0$ pour tout $v \in V$ ainsi que $T_u T_v = T_v T_u$ pour toute arète $\{u, v\} \in E$ (pour travailler avec l'algèbre commutative des fonctions d'ensembles $\mathbb{Z}[T_v]/\langle T_v^2\rangle$, $v \in V$). L'identité (1) devient alors

$$\Bigl[1 + \sum_{\substack{\emptyset\subset I\subseteq V,\\ I \text{ indépendant}}} (-1)^{|I|} \prod_{v\in I} T_v\Bigr]^{-1} = 1 + \sum_{\emptyset\subset V'\subseteq V} a(G[V']) \prod_{v\in V'} T_v,$$

où $a(G[V'])$ est le nombre d'orientations acycliques du graphe $G[V']$ qui contient toutes les arêtes ayant leurs deux extrémités dans $V' \subseteq V$. En effet, les monômes distincts formés des lettres non-commutatives T_v, $v \in V'$, correspondaient aux orientations acycliques du graphe $G[V']$.

On appelle une coloration des sommets de G *régulière* si et seulement si les deux extrémités de chaque arête obtiennent des couleurs différentes. Notons $\chi_G(\lambda)$ le nombre de ces colorations avec λ couleurs. Puisque $\chi_G(\lambda)$ compte les partitions de V en λ ensembles indépendants, nous avons l'identité (voir Tutte [3])

$$1 + \sum_{\emptyset\subset V'\subseteq V} \chi_{G[V']}(\lambda) \prod_{v\in V'} T_v = \Bigl[1 + \sum_{\substack{\emptyset\subset I\subseteq V,\\ I \text{ indépendant}}} \prod_{v\in I} T_v\Bigr]^{\lambda}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{|V|} \binom{\lambda}{k} \Bigl[\sum_{\substack{\emptyset\subset I\subseteq V,\\ I \text{ indépendant}}} \prod_{v\in I} T_v\Bigr]^{k},$$

puisque $k > |V|$ implique $\left[\sum_{\emptyset\subset I\subseteq V,\ I \text{ indépendant}} \prod_{v\in I} T_v\right]^k = 0$ dans l'algèbre commutative des fonctions d'ensembles $\mathbb{Z}[T_v]/\langle T_v^2\rangle$, $v \in V$. En particulier, $\chi_G(\lambda)$ est un polynôme : le *polynôme chromatique*.

En remplaçant chaque variable T_v par $-T_v$ nous voyons donc que l'identité (1) (ou bien le théorème 2.4) est une généralisation non-commutative de l'identité $(-1)^{|V|}\chi_G(-1) = a(G)$ (voir Stanley [4]).

Une autre généralisation peut être obtenue en associant à chaque arête $\{u, v\}$ l'hyperplan $x_u = x_v$ dans l'espace $\mathbb{R}^{|V|}$. Les orientations acycliques de G correspondent alors aux régions de cet arrangement d'hyperplans. En fait, la formule $(-1)^{|V|}\chi_G(-1) = a(G)$ se généralise non seulement aux arrangements d'hyperplans (voir Winder [4]) mais encore aux matroïdes orientés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Pierre Cartier, Dominique Foata. — *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements.* — Lecture Notes in Math. **85**, Springer-Verlag, Berlin, 1969 ; electronically reedited 2006.

[2] R. P. Stanley. — Acyclic orientations of graphs, *Discrete Math.*, t. **5**, 1973, p. 171-178.

[3] W. T. Tutte. — On dichromatic polynomials, *J. Combin. Theory*, t. **2**, 1967, p. 301-320.

[4] R. O. Winder. — Partitions of N-space by hyperplanes, *SIAM J. Appl. Math.*, t. **14**, 1966, p. 811-818.

THE THEORY OF HEAPS AND THE CARTIER–FOATA MONOID

C. Krattenthaler

Fakultät für Mathematik, Universität Wien,
Nordbergstraße 15, A-1090 Vienna, Austria.
WWW: `http://www.mat.univie.ac.at/~kratt`

Abstract. We present Viennot's theory of heaps of pieces, show that heaps are equivalent to elements in the partially commutative monoid of Cartier and Foata, and illustrate the main results of the theory by reproducing its application to the enumeration of parallelogram polyominoes due to Bousquet–Mélou and Viennot.

1. Introduction

The purpose of this note is to present an alternative, geometric point of view of the *"monoïde partiellement commutatif"* of Cartier and Foata [7], now known as the *Cartier–Foata monoid*. This alternative point of view is due to Viennot [22], who introduced a combinatorial theory which he coined the theory of "*heaps of pieces*." While theoretically completely equivalent to the theory of Cartier and Foata, its main feature is the visualisation of elements of the monoid in terms of so-called "heaps," which makes it very versatile in combinatorial applications.

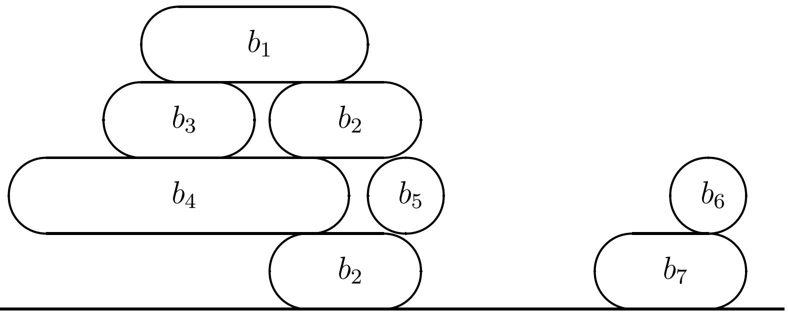
We explain the basic set-up in the next section, and, in Section 3, why this is equivalent to the monoid of Cartier and Foata. The two main theorems (generalising results from [7]) are stated and proved in Section 4, while a beautiful application to parallelogram polyominoes, due to Bousquet–Mélou and Viennot [6], is recalled in Section 5. Other applications include applications to animals, polyominoes, Motzkin paths and orthogonal polynomials, Rogers–Ramanujan identities, Lyndon words, fully commutative elements in Coxeter groups, Bessel functions, and Lorentzian quantum gravity, see [3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24]. The reader is also referred to the survey [2].

2. Heaps of pieces

Informally, a *heap* is what we would imagine. We take a collection of "pieces," say $b_1, b_2, \dots$, and put them one on top of the other, sometimes also sideways, to form a "heap," see Figure 1.

We imagine that pieces can only move vertically (so that the heap in Figure 1 would indeed form a stable arrangement). Note that we allow several copies of a piece to appear in a heap. (This means that they differ only by a vertical translation.) For example, in Figure 1 there appear two copies of b_2. Under these assumptions, there are pieces which can move past each other, and others which cannot. For example, in Figure 1, we can move the piece b_6 higher up, thus moving it higher than b_1 if we wish.

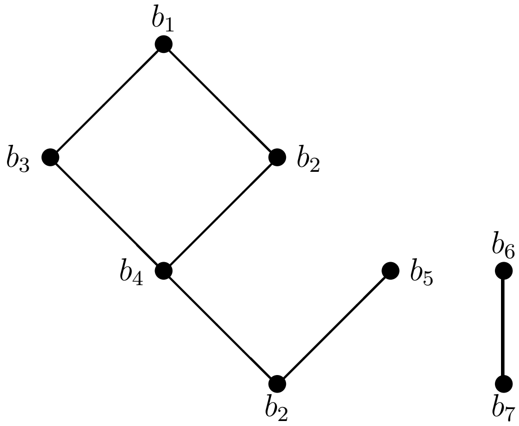
However, we cannot move b_7 higher than b_6, because b_6 blocks the way. On the other hand, we can move b_7 past b_1 (thus taking b_6 with us).



A heap of pieces

Figure 1

To make these considerations mathematically rigorous, consider the "skeleton" of a heap. This is obtained by replacing each piece by a vertex, and by joining two vertices by an edge whenever one vertex blocks the way of the other in the sense described above. The skeleton of the heap in Figure 1 is shown in Figure 2. (There, we have labelled each vertex by the name of the corresponding piece.) Mathematically, a skeleton is a labelled *partially ordered set* or *poset*.



The skeleton of the heap in Figure 1

Figure 2

Definition 2.1. A *partially ordered set (poset)* is a pair $(P, \preceq)$, where P is a set, and where $\preceq$ is a binary relation defined on P which is

(1) reflexive, i.e., $x \preceq x$ for all x in P,
(2) antisymmetric, i.e., if $x \preceq y$ and $y \preceq x$, then $x = y$ for all x, y in P,
(3) transitive, i.e., if $x \preceq y$ and $y \preceq z$ then $x \preceq z$ for all x, y, z in P.

Posets are usually shown graphically in the form of *Hasse diagrams*. The Hasse diagram of a poset is the graph with vertices P, in which x and y are connected by an edge if $x \preceq y$ and there is no z different from x and y with $x \preceq z \preceq y$. Moreover, in the diagram, x is shown at a lower level than y. Clearly, the diagram in Figure 2 is the Hasse diagram of a poset, with vertices labelled by pieces.

Now we can rigorously define what a heap is.

Definition 2.2. Let $\mathcal{B}$ be a set (of pieces) with a symmetric and reflexive binary relation $\mathcal{R}$. A heap is a triple $(P, \preceq, \ell)$, where $(P, \preceq)$ is a poset, and where ℓ is a labelling of the elements of P by elements of $\mathcal{B}$, such that:

(1) If $x, y \in P$ and $\ell(x)\mathcal{R}\ell(y)$, then either $x \preceq y$ or $y \preceq x$.
(2) The relation $\preceq$ is the transitive closure of the relations from (1).

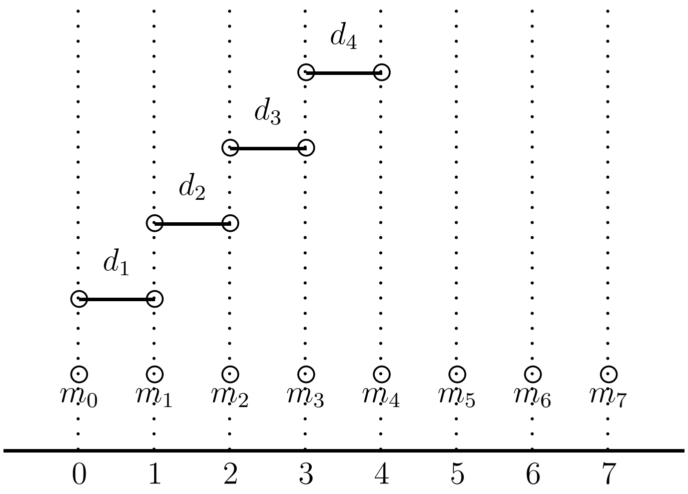
Remark 2.3. The meaning of the relation $\mathcal{R}$ is that it expresses which pieces cannot be moved past each other. That is, a relation $x\mathcal{R}y$ means that x blocks the way of y, and vice versa. Requirement (1) above then says that, hence, in (any realisation of) a heap, either x must be above y, symbolised by $y \preceq x$, or x must be below y, symbolised by $x \preceq y$.

We illustrate this concept with the heap in Figure 1. The pieces are $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_7\}$. The relations are (not mentioning the relations of the form $b_i\mathcal{R}b_i$; if a relation $b_i\mathcal{R}b_j$ holds then also $b_j\mathcal{R}b_i$)

$$b_1\mathcal{R}b_2,\ b_1\mathcal{R}b_3,\ b_1\mathcal{R}b_4,\ b_2\mathcal{R}b_4,\ b_3\mathcal{R}b_4,\ b_2\mathcal{R}b_5,\ b_6\mathcal{R}b_7. \tag{2.1}$$

According to Remark 2.3, these relations mean that if $b_i\mathcal{R}b_j$, then in any heap a piece b_i must be either below or above a piece b_j, more precisely, in the corresponding poset a vertex u labelled b_i and a vertex v labelled b_j must either satisfy $u \preceq v$ or $v \preceq u$. In our running example we have $b_2\mathcal{R}b_4$, and indeed there is one piece b_2 which is above b_4, and there is another piece b_2 which is below b_4, see Figure 1.

A class of heaps which is of great importance for studying animals, polyominoes, Motzkin paths and orthogonal polynomials (cf. [2, 3, 4, 5, 12, 13, 24]), is the class of heaps of *monomers* and *dimers*, which we now introduce. (A more general class of heaps will be relevant in our sample application in Section 5.)

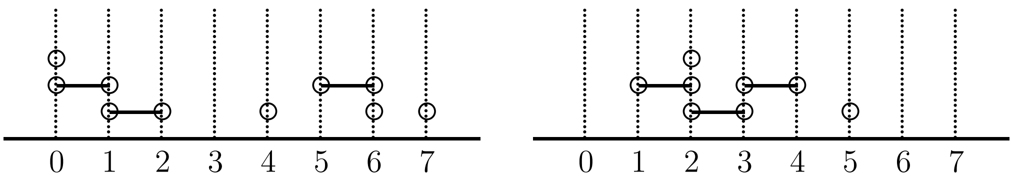


Monomers and dimers

Figure 3

Example 2.4. Let $\mathcal{B} = M \cup D$, where $\mathcal{M} = \{m_0, m_1, \dots\}$ is the set of monomers and $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots\}$ is the set of dimers. We think of a monomer m_i as a point, symbolised by a circle, with x-coordinate i, see Figure 3. We think of a dimer d_i as two points, symbolised by circles, with x-coordinates $i-1$ and i which are connected by an edge, see Figure 3.

We impose the relations $m_i \mathcal{R} m_i$, $m_i \mathcal{R} d_i$, $m_i \mathcal{R} d_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots$, $d_i \mathcal{R} d_j$, $i-1 \le j \le i$, and extend $\mathcal{R}$ to a symmetric relation. Figure 4 shows two heaps of momomers and dimers.



Two heaps of monomers and dimers

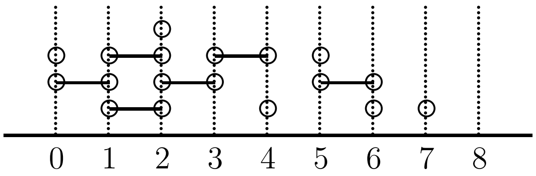
Figure 4

Next we make heaps into a *monoid* by introducing a *composition* of heaps. (A monoid is a set with a binary operation which is associative.) Intuitively, given two heaps H_1 and H_2, the composition of H_1 and H_2, the heap $H_1 \circ H_2$, is the heap which results by putting H_2 on top of H_1. The rigorous definition is the following.

Definition 2.5. Let H_1 and H_2 be heaps, $H_1 = (P_1, \preceq_1, \ell_1)$, $H_2 = (P_2, \preceq_2, \ell_2)$. Then the composition of H_1 and H_2, $H_1 \circ H_2$, is the heap $(H_3, \preceq_3, \ell_3)$ with

(1) $P_3 = P_1 \cup P_2$.
(2) The partial order $\preceq_3$ on P_3 is the transitive closure of
  (a) $v_1 \preceq_3 v_2$ if $v_1 \preceq_1 v_2$,
  (b) $v_1 \preceq_3 v_2$ if $v_1 \preceq_2 v_2$,
  (c) $v_1 \preceq_3 v_2$ if $v_1 \in P_1$, $v_2 \in P_2$ and $\ell_1(v_1) \mathcal{R} \ell_2(v_2)$.

The composition of the two heaps in Figure 4 is shown in Figure 5.



The composition of the heaps in Figure 4

Figure 5

Given pieces $\mathcal{B}$ with relation $\mathcal{R}$, let $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ be the set of all heaps consisting of pieces from $\mathcal{B}$, including the empty heap, denoted by $\emptyset$. It is easy to see that Definition 2.5 makes $(\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R}), \circ)$ into a monoid with unit $\emptyset$.

3. Equivalence with the Cartier–Foata monoid

The monoid which we have just defined in the previous section can be seen to be equivalent to the Cartier–Foata monoid [7]. In order to explain this equivalence, we first observe that heaps could also be encoded by *words* with letters from $\mathcal{B}$, i.e., by sequences of pieces. To obtain a word from a heap $H = (P, \preceq, \ell)$, one considers a *linear extension* of the poset P (i.e., a linear ordering $\le$ of the elements of P in which $x \le y$ whenever $x \preceq y$), and then reads the labels $\ell(x)$ of the elements of P, while x runs through all elements of P in the linear order, bottom to top. Clearly, since there may be several linear extensions of a poset, several different words may be read off from the same heap. For the heap in Figure 1 (see Figure 2 for the corresponding poset), possible such readings are

$$b_2b_7b_4b_5b_6b_3b_2b_1 \text{ and } b_2b_5b_4b_2b_3b_1b_7b_6. \tag{3.1}$$

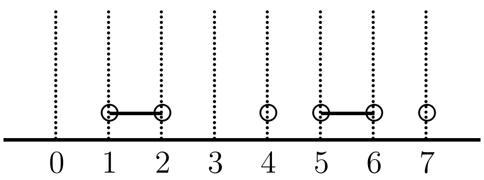
Of course, we want to identify words that are read off from the same heap. Therefore we introduce an equivalence relation on words: We say that the words u and w are equivalent, in symbols $u \sim w$, if w arises from u by a squence of interchanges of two adjacent letters x and y for which $x \not\mathcal{R} y$. For example, given the relation $\mathcal{R}$ as in (2.1), the words in (3.1) arise from each other by the following sequence of interchanges:

$$\begin{aligned} b_2b_7b_4b_5b_6b_3b_2b_1 &\sim b_2b_7b_5b_4b_6b_3b_2b_1 \sim b_2b_5b_7b_4b_6b_3b_2b_1 \\ &\sim b_2b_5b_4b_7b_6b_3b_2b_1 \sim b_2b_5b_4b_7b_6b_2b_3b_1 \sim b_2b_5b_4b_7b_2b_6b_3b_1 \\ &\sim b_2b_5b_4b_2b_7b_6b_3b_1 \sim b_2b_5b_4b_2b_7b_3b_6b_1 \sim b_2b_5b_4b_2b_3b_7b_6b_1 \\ &\qquad \sim b_2b_5b_4b_2b_3b_7b_1b_6 \sim b_2b_5b_4b_2b_3b_1b_7b_6. \end{aligned}$$

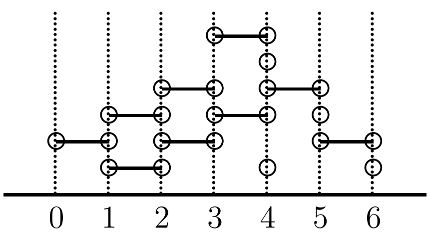
Thus, heaps in $\mathcal{H}(\mathcal{B}, \mathcal{R})$ correspond to equivalence classes of words modulo $\sim$. Under this correspondence, the composition of heaps corresponds exactly to the composition of equivalence classes of words induced by concatenation of words. The equivalence of the heap monoid and the Cartier–Foata monoid is now obvious.

4. The main theorems

For the statement of the main theorems in the theory of heaps, we need two more terms. A *trivial heap* is a heap consisting of pieces all of which are pairwise unrelated, i.e., $x \not\mathcal{R} y$ for all pieces x, y in H. Figure 6.a shows a trivial heap consisting of monomers and dimers. A *pyramid* is a heap with exactly one maximal element (in the corresponding poset). Figure 6.a shows a pyramid consisting of monomers and dimers. Finally, if H is a heap, then we write $|H|$ for the number of pieces in H.



a. A trivial heap



b. A pyramid

Figure 6

The following theorem is Proposition 5.3 from [22].

Theorem 4.1. *Let $\mathcal{M}$ be a subset of the pieces $\mathcal{B}$. Then, in the monoid $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})$, the (formal) sum of all heaps with maximal pieces (by which we mean the labels of the maximal elements in the corresponding posets) contained in $\mathcal{M}$ is given by*

$$\sum_{\substack{H\in\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})\\ \text{maximal pieces }\subseteq\mathcal{M}}} H = \Bigg(\sum_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}T\Bigg)^{-1}\Bigg(\sum_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B}\backslash\mathcal{M},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}T\Bigg), \tag{4.1}$$

where $\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})$ denotes the set of all trivial heaps with pieces from $\mathcal{B}$, and similarly for $\mathcal{T}(\mathcal{B}\backslash\mathcal{M},\mathcal{R})$. In particular, the sum of all heaps if given by

$$\sum_{H\in\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})} H = \Bigg(\sum_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}T\Bigg)^{-1}. \tag{4.2}$$

Remark 4.2. The inverse of the series which appears on the right-hand sides of (4.1) and (4.2) exists because it has the form $(1-X)^{-1}=\sum_{j\ge0}X^j$.

Remark 4.3. Equation (4.1) generalises Eq. (1) from [7, Introduction, Part A], the latter being equivalent to (4.2).

Proof. Formula (4.2) is the special case of (4.1) in which $\mathcal{M}=\mathcal{B}$. Therefore it suffices to establish (4.1). By multiplication at the left by $\sum_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}T$, the latter is equivalent to

$$\sum_{\substack{H\in\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R}),\ T\in\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})\\ \text{maximal pieces of }H\ \subseteq\mathcal{M}}} (-1)^{|T|}T\circ H = \Bigg(\sum_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B}\backslash\mathcal{M},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}T\Bigg). \tag{4.3}$$

We show that most of the terms on the left-hand side of (4.3) cancel each other pairwise. In order to do this, we first fix an arbitrary linear order on the set of pieces $\mathcal{B}$. Now, let (H,T) be a pair of a heap H in $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})$ with maximal pieces contained in $\mathcal{M}$ and a trivial heap T. Consider the minimal pieces in $T\circ H$ (again, this means the labels of the minimal elements in the poset corresponding to $T\circ H$) which are below some maximal piece in $T\circ H$ that belongs to $\mathcal{M}$. Let b be the first such minimal piece in the linear order of pieces. Then we form a new pair (H',T') by:

- If $b\in T$, then $H'=b\circ H$ and $T'=T\backslash b$.
- If $b\notin T$, then $H'=H\backslash b$ and $T'=T\circ b$.

In particular, nothing changes in the composed heap, i.e., we have $T'\circ H'=T\circ H$. Hence, we have $(-1)^{|T'|}T'\circ H'=-(-1)^{|T|}T\circ H$. When the same mapping is applied to (H',T') then we obtain back (H,T). Therefore, all the summands on the left-hand side of (4.3) which are indexed by pairs to which the above map is applicable cancel. The remaining summands are those indexed by pairs (H,T) for which $T\circ H$ does not contain any maximal piece in $\mathcal{M}$. This forces H (which "sits" on top of T in $T\circ H$) to be the empty heap, and T to consist of pieces in $\mathcal{B}\backslash\mathcal{M}$ only (all the pieces in a trivial heap are maximal). Thus, (4.3) is established. □

The second main theorem, Proposition 5.10 from [22], concerns the set of pyramids in $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})$, which, for convenience, we denote by $\mathcal{P}(\mathcal{B},\mathcal{R})$. In contrast to Theorem 4.1, in the result we must give up non-commutativity.

Theorem 4.4. *For the following (formal) sum indexed by pyramids in $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})$, we have*

$$\sum_{P\in\mathcal{P}(\mathcal{B},\mathcal{R})}\frac{1}{|P|}P =_{comm} -\log\Bigg(\sum_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}T\Bigg), \tag{4.4}$$

where $=_{comm}$ means that the identity holds in the commutative extension of $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})$, that is, in the commutative monoid which arises from $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})$ by letting all pieces in $\mathcal{B}$ commute.

Proof. We make heaps into *labelled* objects. More precisely, a *labelled heap* is a heap from $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})$ with N pieces which are arbitrarily labelled from 1 up to N (with each label between 1 and N appearing exactly once). Given a labelled heap H_1, we decompose it uniquely into labelled pyramids as follows. To begin with, we "push" the piece labelled 1 "downwards." Let this piece be b_1. (In the language of words, we would push b_1 to the left, using partial commutativity of letters.) Since some pieces cannot move past others, thereby we will take several pieces with us. In fact, these will form a pyramid P_1 with maximal piece b_1. Let H_2 be what remains from H_1 after removing P_1. We now repeat the same procedure with the piece b_2 which has the minimal label within all pieces of H_2. Etc. In the end, we will have obtained a set of labelled pyramids with the special property that in each pyramid the label of its maximal element is the smallest of all labels of pieces of the pyramid.

Let $\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{B},\mathcal{R})$ denote the set of all labelled heaps, and let $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{B},\mathcal{R})$ denote the set of all labelled pyramids in $\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{B},\mathcal{R})$ with the above special property. Then, by the exponential principle for labelled combinatorial objects (cf. [1, Eqs. (20), (70)], [11, Sec. II.2.1], or [19, Cor. 5.1.6]), we have immediately

$$\sum_{H\in\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{B},\mathcal{R})}\frac{1}{|H|!}H =_{\text{comm}} \exp\left(\sum_{P\in\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{B},\mathcal{R})}\frac{1}{|P|!}P\right).$$

However, for any (unlabelled) heap in $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})$ with N pieces there are exactly $N!$ ways to label the pieces to obtain a labelled heap in $\tilde{\mathcal{H}}(\mathcal{B},\mathcal{R})$, while for any (unlabelled) pyramid from $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})$ with N pieces there a exactly $(N-1)!$ ways to label the pieces to obtain a labelled pyramid in $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{B},\mathcal{R})$. (The reader should recall that the maximal element of the pyramid must get the smallest label.) Hence,

$$\sum_{H\in\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})}H =_{\text{comm}} \exp\left(\sum_{P\in\mathcal{P}(\mathcal{B},\mathcal{R})}\frac{1}{|P|}P\right),$$

which, in view of (4.2), is equivalent to (4.4). □

In applications, heaps will have weights, which are defined by introducing a weight $w(b)$ (being an element in some commutative ring with unit element) for each piece b in $\mathcal{B}$, and by extending the weight w to all heaps H by letting $w(H)$ denote the product of all weights of the pieces in H. Theorems 4.1 and 4.4 immediately imply the following corollary on the corresponding generating function of heaps.

Corollary 4.5. *Let $\mathcal{M}$ be a subset of the pieces $\mathcal{B}$. Then, the generating function for all heaps with maximal pieces contained in $\mathcal{M}$ is given by*

$$\sum_{\substack{H\in\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})\\ \text{maximal pieces }\subseteq\mathcal{M}}} w(H)=\frac{\sum\limits_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B}\backslash\mathcal{M},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}w(T)}{\sum\limits_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}w(T)},\tag{4.5}$$

where again $\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})$ denotes the set of all trivial heaps with pieces from $\mathcal{B}$. In particular, the generating function for all heaps is given by

$$\sum_{H\in\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})} w(H)=\frac{1}{\sum\limits_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}w(T)}.\tag{4.6}$$

Furthermore,

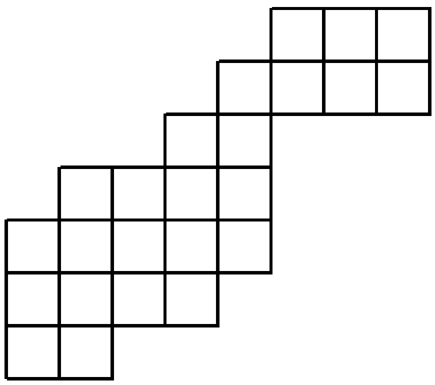
$$\sum_{P\in\mathcal{P}(\mathcal{B},\mathcal{R})}\frac{1}{|P|}w(P)=-\log\Bigg(\sum_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}w(T)\Bigg),\tag{4.7}$$

where again $\mathcal{P}(\mathcal{B},\mathcal{R})$ denotes the set of all pyramids in $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})$.

5. A sample application

As an illustration, we show how to use the results from Section 4 in order to obtain a formula for a multivariate generating function for *parallelogram polyominoes.* This beautiful application of heaps is due to Bousquet–Mélou and Viennot [6].

A parallelogram polyomino is a non-empty set of square cells in the plane without holes which are enclosed by two paths consisting of unit horizontal and vertical steps in the positive direction, both of which starting in the same point and ending in the same point. An example is shown in Figure 7.



A parallogram polyomino

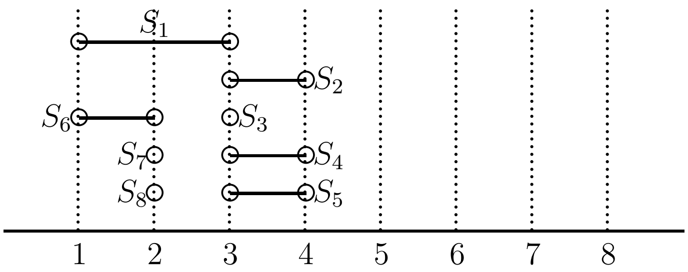
Figure 7

The *area* $a(P)$ of a parallelogram polyomino P is the number of cells of P. The *width* $b(P)$ of a parallelogram polyomino P is the number of columns of cells of P. The *height* $h(P)$ of a parallelogram polyomino P is the number of rows of cells of P. For our parallogram polyomino in Figure 7, P_0 say, we have $a(P_0)=24$, $b(P_0)=8$, and $h(P_0)=7$.

We would like to compute the generating function

$$\sum_P x^{b(P)} y^{h(P)} q^{a(P)},$$

summed over all parallogram polyominoes P. In order to do so, we show that the latter are in bijection with heaps, the pieces of which are segments of the form $[a,c]$, $1 \le a \le c$, with the "obvious" commutation relations: two segments $[a_1,c_1]$ and $[a_2,c_2]$ commute if and only if one segment "is to the left of the other," that is, if $c_1 < a_2$ or if $c_2 < a_1$. See Figure 8 for an example of a heap formed out of pieces of that form. (More precisely, the segments in this figure are $S_1 = [1,3]$, $S_2 = [3,4]$, $S_3 = [3,3]$, $S_4 = [3,4]$, $S_5 = [3,4]$, $S_6 = [1,2]$, $S_7 = [2,2]$, $S_8 = [2,2]$.)



A heap of segments

Figure 8

Given a parallelogram polyomino P consisting of n columns, we obtain a heap of segments in the following way: Let $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ be the sequence of column lengths of P (considering the columns from left to right). In our example in Figure 7, these are $(3,4,3,4,4,2,2,2)$. Furthermore, define $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ to be the sequence with $a_1 = 1$ and, for $i > 1$, a_i being equal to the length of the segment along which the $(i-1)$-st and the i-th column of P touch each other. In our example in Figure 7, these are $(1,3,3,3,3,1,2,2)$. Now form the heap by piling the segments $[a_i, c_i]$, $i = n, n-1, \dots, 1$, on each other, that is, we form the heap

$$[a_n, c_n] \circ [a_{n-1}, c_{n-1}] \circ \cdots \circ [a_1, c_1].$$

It can be checked that the heap in Figure 8 corresponds to the parallelogram polyomino in Figure 7 under this correspondence.

It can be shown that this correspondence is, in fact, a bijection between parallelogram polyominoes P and heaps of segments H with a maximal piece of the form $[1,c]$. Moreover, under this correspondence,

(1) $b(P)$ is the number of pieces of H;
(2) $h(P)$ is one more than the sum of all the lengths of pieces of H;
(3) $a(P)$ is the sum of the right abscissae of the pieces of H (i.e., the sum of the c_i's).

For details, we refer the reader to [6].

Now we apply Corollary 4.5 with $\mathcal{H}(\mathcal{B},\mathcal{R})$ being our heaps of segments, $\mathcal{M}$ being the set of all pieces of the form $[1,c]$, and with the weight w being defined as

$$w(H) = x^{|H|} y^{\sum(\text{lengths of pieces of } H)} q^{\sum(\text{right abscissae of pieces of } H)}.$$

In order to do so, first of all, we must compute the sum

$$\sum_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}w(T).$$

Now, a trivial heap consisting of n pieces has the form

$$[a_1,c_1]\circ[a_2,c_2]\circ\dots\circ[a_n,c_n],$$

where $1\le a_1\le c_1<a_2\le c_2<\dots<a_n\le c_n$. Therefore,

$$\sum_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}w(T)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\sum_{1\le a_1\le c_1<a_2\le c_2<\dots<a_n\le c_n}y^{\sum_{i=1}^n(c_i-a_i)}q^{\sum_{i=1}^n c_i}.$$

Now the sums over $c_n,a_n,c_{n-1},a_{n-1},\dots,c_1,a_1$ can be evaluated, in this order, all of them being geometric sums. The result is

$$\sum_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}w(T)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(q;q)_n\,(yq;q)_n},$$

where $(\alpha;q)_k$ is the *q-shifted factorial*, given by $(\alpha;q)_0:=1$ and

$$(\alpha;q)_k:=(1-\alpha)(1-\alpha q)\cdots(1-\alpha q^{k-1})$$

if k is a positive integer. Similary, we obtain

$$\sum_T{}'(-1)^{|T|}w(T)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1} q^{\binom{n+2}{2}}}{(q;q)_n\,(yq;q)_{n+1}},$$

the sum being over all trivial heaps T in $\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})$ containing *at least one* piece from $\mathcal{M}$. Hence, remembering that parallelogram polyominoes are *non-empty* sets of cells, we infer that

$$\sum_P x^{b(P)}y^{h(P)}q^{a(P)}=y\left(\frac{\sum\limits_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B}\backslash\mathcal{M},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}w(T)}{\sum\limits_{T\in\mathcal{T}(\mathcal{B},\mathcal{R})}(-1)^{|T|}w(T)}-1\right)$$

$$=y\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1} q^{\binom{n+2}{2}}}{(q;q)_n\,(yq;q)_{n+1}}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n} q^{\binom{n+1}{2}}}{(q;q)_n\,(yq;q)_{n}}},\tag{5.1}$$

the sum over P being over all parallogram polyominoes P.

References

[1] F. Bergeron, G. Labelle and P. Leroux, *Combinatorial species and tree-like structures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[2] J. Bétréma and J. G. Penaud, *Modèles avec particules dures, animaux dirigés et séries en variables partiellement commutatives*, manuscript, `arχiv:math.CO/0106210`.

[3] M. Bousquet–Mélou, *q-Énumération de polyominos convexes*, J. Combin. Theory Ser. A **64** (1993), 265–288.

[4] M. Bousquet–Mélou, *Polyominoes and polygons*, in: Jerusalem Combinatorics ’93, pp. 55–70, Contemp. Math., 178, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[5] M. Bousquet–Mélou and A. Rechnitzer, *Animals and heaps of dimers*, Discrete Math. **258** (2002), 235–274.

[6] M. Bousquet–Mélou and X. Viennot, *Empilements de segments et q-énumération de polyominos convexes dirigés*, J. Combin. Theory Ser. A **60** (1992), 196–224.

[7] P. Cartier and D. Foata, *Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements*, Lecture Notes in Mathematics, No. 85, Springer–Verlag, Berlin, New York, 1969; republished in the “books” section of the Séminaire Lotharingien de Combinatoire.

[8] S. Corteel, A. Denise and D. Gouyou-Beauchamps, *Bijections for directed animals on infinite families of lattices*, Ann. Comb. **4** (2000), 269–284.

[9] J.-M. Fédou, *Sur les fonctions de Bessel*, Discrete Math. **139** (1995), 473–480.

[10] J.-M. Fédou, *Combinatorial objects enumerated by q-Bessel functions*, Rep. Math. Phys. **34** (1994), 57–70.

[11] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, book project, available at `http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/books.html`.

[12] P. Di Francesco and E. Guitter, *Integrability of graph combinatorics via random walks and heaps of dimers*, J. Stat. Mech. Theory Exp. 2005, no. 9, P09001, 34 pp.

[13] A. M. Garsia, *Heaps, continued fractions and orthogonal polynomials*, Lecture Notes for a course given at the University of California at San Diego, 1993.

[14] R. M. Green, *Acyclic heaps of pieces, I*, J. Algebraic Combin. **19** (2004), 173–196.

[15] R. M. Green, *Acyclic heaps of pieces, II*, Glasgow Math. J. **46** (2004), 459–476.

[16] R. M. Green, *On rank functions for heaps*, J. Combin. Theory Ser. A **102** (2003), 411–424.

[17] R. M. Green, *Full heaps and representations of affine Kac–Moody algebras*, preprint, arχiv:math.CO/0605768.

[18] P. Lalonde, *Lyndon heaps: an analogue of Lyndon words in free partially commutative monoids*, Discrete Math. **145** (1995), 171–189.

[19] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[20] J. R. Stembridge, *On the fully commutative elements of Coxeter groups*, J. Alg. Combin. **5** (1996), 353–385.

[21] J. R. Stembridge, *Minuscule elements of Weyl groups*, J. Algebra **235** (2001), 722–743.

[22] X. G. Viennot, *Heaps of pieces. I. Basic definitions and combinatorial lemmas*, Lecture Notes in Math., 1234, Springer, Berlin, 1986, pp. 321–350.

[23] X. G. Viennot, *Bijections for the Rogers-Ramanujan reciprocal*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **52** (1987), 171–183.

[24] X. Viennot and W. James, *Heaps of segments, q-Bessel functions in square lattice enumeration and applications in quantum gravity*, preprint.

Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Nordbergstrasze 15, A-1090 Vienna, Austria. WWW: `http://www.mat.univie.ac.at/~kratt`