M. Bekkar *

SUR UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DANS L'ESPACE DE HEISENBERG.

Résumé. It is well known that in 3-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^3$, the only developable and minimal surface is the plane. In other words, affine functions $z = f(x,y) = ax + by + c$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ in x, y are the only solutions of the system of 2 partial differential equations:

$$(s_{\mathbb{E}}) \qquad \begin{cases} rt - s^2 = 0 \\ r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2) = 0 \end{cases}$$

where equation $(s_{\mathbb{E}})_1$ is the equation of developable surfaces and $(s_{\mathbb{E}})_2$ is the equation of minimal surfaces in Euclidean space $\mathbb{R}^3$. We use the Monge notation p, q, r, s, t for the first and second order derivatives of $f(x,y)$.

The space $\mathbb{R}^3$, with Riemannian metric $ds^2_{\mathbb{H}} = dx^2 + dy^2 + \omega^2$, (where ω is the Pfaffian 1-form defined by $\omega = (dz + \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy)$) is named Heisenberg space $\mathbb{H}_3$ and has a structure of nilpotent Lie group that acts on $\mathbb{H}_3$ by left translations keeping $ds^2_{\mathbb{H}}$ invariant. By analogy with the Euclidean space we study in space $\mathbb{H}_3$ the system of 2 partial differential equations:

$$(s_{\mathbb{H}}) \quad \begin{cases} rt - s^2 + \frac{1}{4} = 0 \\ r(1 + (q - \frac{x}{2})^2) - 2(p + \frac{y}{2})(q - \frac{x}{2})s + t(1 + (p + \frac{y}{2})^2) = 0 \end{cases}$$

where equation $(s_{\mathbb{H}})_1$ expresses the property of the indicatrix of normals to the surface under left translation to be degenerate. This equation has been studied as particular example of Monge-Ampère equation since it interprets a phenomenon in physics. Equation $(s_{\mathbb{H}})_2$ is the equation of minimal surfaces in $\mathbb{H}_3$.

1. Introduction

1.1. Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, on considère une surface (S) définie comme graphe d'une fonction $z = f(x,y)$. Tout point de (S) est $m = (x,y,f(x,y))$, et $p = f_x$, $q = f_y$,

*Ce travail a été fait pendant mon séjour à l'Université de Haute Alsace (février- juillet 2000). Je remercie mes professeurs et amis pour leur cordial accueil. Merci à Aïcha et les enfants qui ont été très compréhensifs.

$r = f_{xx}$, $s = f_{xy}$, $t = f_{yy}$ (notation de Monge) sont les dérivées de $f(x,y)$ de premier et deuxième ordre par rapport à x et y. Les formes fondamentales de (S) sont

$$I = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2, \quad II = Ldx^2 + 2Mdxdy + Ndy^2.$$

Sur l'espace tangent T_mS au point m de (S) il existe une base qui diagonalise simultanément les matrices associées aux formes quadratiques précédentes I et II. Les valeurs propres k_1 et k_2 sont appelées courbures principales. Le produit

$$K_G = k_1k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{(rt - s^2)}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

et la demi somme

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = \frac{r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2)}{2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

sont respectivement la courbure de Gauss et la coubure moyenne. Une surface dans $\mathbb{R}^3$ est dite *développable* si sa courbure de Gauss K_G est nulle (c.-à-.d. $rt - s^2 = 0$). Elle est dite *minimale* si sa courbure moyenne H est nulle (c.-à-.d. $r(1+q^2) - 2pqs + t(1 + p^2) = 0$).

1.2. Sur l'espace numérique $\mathbb{R}^3$ est définie la structure de groupe de Lie nilpotent $\mathbb{H}_3$, dit de Heisenberg, par la multiplication $\pi_{\mathbb{H}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui à (m, m') associe m'' défini par

$$m = (x,y,z),\ m' = \left(x',y',z'\right),$$

$$m'' = \left(x'',y'',z''\right) = (x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}x'y - \frac{1}{2}xy')$$

où $x,\ x',\ y,\ y',\ z,\ z' \in \mathbb{R}$. Les formes de Pfaff $dx,\ dy,\ \omega$ sont invariantes par les translations à gauche sur $\mathbb{H}_3$. Les champs de vecteurs duaux à ces trois 1-formes sont

$$X = \partial_x - \frac{1}{2}y\partial_z, \quad Y = \partial_y + \frac{1}{2}x\partial_z, \quad Z = \partial_z.$$

Une surface (S) dans $\mathbb{H}_3$ décrite comme graphe d'une fonction a pour équation $z = f(x,y)$. Un vecteur unitaire normal à (S) au point $m(x,\ y,\ z = f(x,y))$ s'exprime par:

$$N_m = \frac{1}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}(PX + QY - Z) \ \text{ où } \ P = p + \frac{y}{2}, \ \ Q = q - \frac{x}{2}.$$

La différentielle $d(L_m)^{-1}$ de la translation à gauche $(L_m)^{-1}$ transporte le vecteur N_m en l'élément neutre du groupe $\mathbb{H}_3$, c'est à dire en 0. Soit donc:

$$d(L_m)^{-1}(N_m) = \frac{1}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}(PX_0 + QY_0 - Z_0).$$

L'application qui à $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ associe $d(L_m)^{-1}(N_m) \in S_0^2 \subset (T\mathbb{H}_3)_0$, où S_0^2 désigne la sphère unité de l'espace Euclidien $(T\mathbb{H}_3)_0$, est dégénérée si et seulement si:

$$\begin{vmatrix} P & \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ Q & \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & r & s+\frac{1}{2} \\ Q & s-\frac{1}{2} & t \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = rt - s^2 + \frac{1}{4} = 0$$

où |-| représente le déterminant. Ceci explique la provenance de l'équation $(s_{\mathbb{H}})_1$.

1.3. L'espace $\mathbb{H}_3$ est aussi l'espace numérique $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique Riemannienne $ds^2 = dx^2 + dy^2 + \omega^2$. Celle-ci définit la structure Riemannienne invariante à gauche sur $\mathbb{H}_3$. Cette métrique est invariante par les translations à gauche et aussi les rotations autour de l'axe (Oz). $\mathbb{H}_3$ est un espace homogène qui jouit de la plus grande mobilité après $\mathbb{R}^3$ Euclidien, la sphère $\mathbb{S}^3$ et l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$. Son groupe d'isométries est de dimension quatre. Plus précisément, la composante connexe de l'identité est le groupe des transformations affines de $\mathbb{R}^3$ suivantes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \dashrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ A & B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

où θ, a, b, c sont des réels, $A = \frac{1}{2}(a\sin\theta - b\cos\theta)$ et $B = \frac{1}{2}(a\cos\theta + b\sin\theta)$. Dans la suite les éléments de ce groupe seront notées $(\theta; a,b,c)$. Ce groupe contient des rotations $(\theta; 0,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe (Oz) et aussi les translations à gauche $(0; a,b,c)$.

Les éléments de la première forme fondamentale dans $\mathbb{H}_3$ sont $E = 1 + P^2$, $F = PQ$, $G = 1 + Q^2$. Le vecteur normal N_m, normé en tout point d'une surface dans $\mathbb{H}_3$, a pour composantes:

$$N_m = \frac{1}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}}(P, \ Q, \ -1).$$

La dégénérescense de la différentielle $d(L_m)^{-1}$ de la translation à gauche $(L_m)^{-1}$ peut aussi se traduire par

$$\left[N_m, \, \partial_x N_m, \, \partial_y N_m\right] = 0$$

où le crochet désigne le produit mixte entre le vecteur normal N_m et ses dérivées $\partial_x N_m$, $\partial_y N_m$ par rapport à x et y. C'est l'équation $(s_{\mathbb{H}})_1$. Elle est du type Monge-Ampère; elle apparait en théorie mécanique de la chaleur et est étudiée par les Classiques dans plusieurs ouvrages qui traitent la théorie des équations aux dérivées partielles et leurs applications aux surfaces (voir [5] ou [4]).

Remarque 1. On peut observer que pour une surface de $\mathbb{R}^3$, la condition d'avoir la différentielle de l'application de Gauss dégénérée équivaut à la courbure de Gauss nulle. Cette condition est interprétée par l'équation $(s_{\mathbb{E}})_1$ et de telles surfaces sont dites développables. La condition analogue pour une surface de $\mathbb{H}_3$ donne l'équation $(s_{\mathbb{H}})_1$ sans pour autant permettre l'annulation de la courbure de Gauss qui est donnée par

$$K_{\mathbb{H}} = \frac{rt - s^2 - \frac{3}{4} - (r-t)PQ - s(Q^2 - P^2) - \frac{1}{2}(Q^2 + P^2)}{(1 + Q^2 + P^2)^2}.$$

1.4. Dans [1] on trouve l'équation des surfaces minimales $(s_{\mathbb{H}})_2$ dans $\mathbb{H}_3$ et aussi quelques solutions particulières. Dans [3] on donne une description générale de toutes les surfaces minimales réglées dans $\mathbb{H}_3$, soit par des droites géodésiques ou par des droites qui ne sont pas géodésiques. Certaines surfaces minimales de $\mathbb{H}_3$, (c.-à-.d., certaines solutions de $(s_{\mathbb{H}})_2$), sont aussi solutions de $(s_{\mathbb{H}})_1$. Dans cet article on résoud le système $(s_{\mathbb{H}})$. Nous allons, avant cela, rappeler et démontrer une propriété géométrique du plan dans $\mathbb{R}^3$ interprétée par $(s_{\mathbb{E}})$.

2. Résolution des systèmes $(s_{\mathbb{E}})$ et $(s_{\mathbb{H}})$

PROPOSITION 1. *Le plan est la seule surface développable et minimale dans* $\mathbb{R}^3$ *euclidien.*

Preuve. Analytiquement cela revient a résoudre le système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$(s_{\mathbb{E}}) \qquad \begin{cases} rt - s^2 = 0 \\ r(1+q^2) - 2pqs + t(1+p^2) = 0. \end{cases}$$

Dans [5] (pp.70-71, Vol. 3) on trouve la résolution de l'équation $(s_{\mathbb{E}})_1$ qui est du type Monge-Ampère et qui admet les trois intégrales premières:

$$\begin{cases} q = F(p) \\ z - px - qy = \Phi(p) \\ x + yF'(p) + \Phi'(p) = 0. \end{cases}$$

Le prime désigne la dérivation par rapport à p et la troisième équation est obtenue en différentiant la deuxième. En dérivant par rapport à x et à y la première équation du système précédent on obtient $q_x = s = rF'$ et $q_y = t = sF'$. En les portant dans l'équation $(s_{\mathbb{E}})_2$ des surfaces minimales, on doit avoir, pour $F' \neq 0$,

$$s(1+q^2) - 2pqsF' + s(1+p^2)F'^2 = 0.$$

Si $s \neq 0$, on obtient l'équation du second degré en F' dont le discriminant vaut $-(1+p^2+q^2)$. Comme il n'y a pas de solution réelle on doit avoir $s = 0$, ou $t = 0$; la solution est $z = f(x, y) = ax + by + c$. On obtient aussi le même résultat si $F' = 0$.

□

En ce qui concerne le système $(s_{\mathbb{H}})$ dans $\mathbb{H}_3$ nous avons le

THÉORÈME 1. *Les solutions du système* $(s_{\mathbb{H}})$

$$(s_{\mathbb{H}}) \qquad \begin{cases} rt - s^2 + \frac{1}{4} = 0 \\ r(1 + (q - \frac{x}{2})^2) - 2(p + \frac{y}{2})(q - \frac{x}{2})s + t(1 + (p + \frac{y}{2})^2) = 0 \end{cases}$$

sont les solutions de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_1) \qquad (1+\varphi'^2-\alpha\varphi'\varphi'') = (\alpha\varphi'-(1+\alpha^2)\varphi'')\psi'', \text{ où } \psi''-\varphi'' \neq 0.$$

où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires qui dépendent, séparement et respectivement, des paramètres α et β, et dont la surface $z = f(x,y)$ est paramètrée comme suit:

$$x = \psi' - \varphi',\ y = \alpha - \beta,\ z = \frac{(\alpha+\beta)}{2}x + \varphi - \psi$$

Preuve. Selon la résolution classique des équations aux dérivées partielles (voir [5], pp.71-73, Vol.3), $(s_{\mathbb{H}})_1$ est du type Monge-Ampère. En effet, (pour une surface $z = f(x,y)$) pour sa résolution on pose:

$$(s_1) \qquad \begin{cases} x = \psi' - \varphi' \\ y = \alpha - \beta \\ z = \frac{\psi'-\varphi'}{2}(\alpha+\beta) + \varphi - \psi = \frac{(\alpha+\beta)}{2}x + \varphi - \psi \end{cases}$$

où α et β sont deux paramètres quelconques dont φ et ψ sont deux fonctions arbitraires qui en dépendent respectivement et le prime indique la dérivation. Les différentielles s'écrivent:

$$(s_2) \qquad \begin{cases} dx = \psi'' d\beta - \varphi'' d\alpha \\ dy = d\alpha - d\beta \\ dz = \frac{x}{2}(d\alpha + d\beta) + \frac{(\alpha+\beta)}{2}(\psi'' d\beta - \varphi'' d\alpha) + \varphi' d\alpha - \psi' d\beta \end{cases}$$

soit donc:

$$d\alpha = \frac{1}{\psi''-\varphi''}(dx + \psi'' dy), \quad d\beta = \frac{1}{\psi''-\varphi''}(dx + \varphi'' dy)$$

ce qui nous permet d'avoir la différentielle

$$dz = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)dx + \frac{1}{2}(\psi'+\varphi')dy.$$

En comparant avec $dz = p dx + q dy$ on a

$$p = \frac{1}{2}(\alpha+\beta), \qquad q = \frac{1}{2}(\psi'+\varphi').$$

De nouveau les différentielles des fonctions précédentes sont:

$$dp = \frac{1}{2}(d\alpha + d\beta) = r dx + s dy, \quad dq = \frac{1}{2}(d\psi' + d\varphi') = s dx + t dy$$

ce qui donne, via les expressions de $d\alpha$ et $d\beta$ précédentes:

$$r = \frac{1}{\psi''-\varphi''}, \quad s = \frac{\psi''+\varphi''}{2(\psi''-\varphi'')}, \quad t = \frac{\psi''\varphi''}{\psi''-\varphi''}.$$

En reportant ces dérivées dans l'équation des surfaces minimales $(s_{\mathbb{H}})_2$ on obtient l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_1) \qquad (1+\varphi'^2-\alpha\varphi'\varphi'') = (\alpha\varphi' - (1+\alpha^2)\varphi'')\psi'', \text{ où } \psi''-\varphi'' \neq 0$$

ou aussi

$$\psi'' = \frac{1+\varphi'^2-\alpha\varphi'\varphi''}{\alpha\varphi'-(1+\alpha^2)\varphi''}, \text{ où } \psi''-\varphi'' \neq 0.$$

C'est une équation différentielle (à variables séparables) en φ et ψ. Selon la résolution classique des équations différentielles on a $\psi'' = k$ (k cste), c'est à dire:

$$\psi(\beta) = \frac{k}{2}\beta^2 + c_1\beta + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La solution de l'équation différentielle dépendra de cette constante fondamentale k. On a deux cas:

i) $k = 0$. Après un calcul classique, la solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ est:

$$\begin{cases} \psi(\beta) = c_1\beta + c_2 \\ \varphi(\alpha) = \frac{1}{2\lambda}\left[\lambda\alpha\sqrt{\lambda^2\alpha^2-1} - Log(\lambda\alpha + \sqrt{\lambda^2\alpha^2-1})\right] + c_3, \end{cases}$$

avec λ et c_3 comme constantes d'intégration (notons par $(*)$ l'expression $\varphi'(\alpha) = \pm\sqrt{\lambda^2\alpha^2-1}$).

En utilisant les relations du système (s_1) on en déduit:

$$\alpha = \frac{1}{\lambda}\sqrt{(x-c_1)^2+1}, \quad \beta = \frac{1}{\lambda}\sqrt{(x-c_1)^2+1} - y$$

qui donne l'expression z de (s_1)

$$z = \frac{(x-c_1)}{2}\left[\frac{1}{\lambda}\sqrt{(x-c_1)^2+1} - y\right] -$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\left[(x-c_1)\sqrt{(x-c_1)^2+1} - Log((x-c_1) + \sqrt{(x-c_1)^2+1})\right] + c_3.$$

L'isométrie $(0; -c_1, 0, -c_3)$ de $\mathbb{H}_3$ permet de ramener cette surface au graphe de la fonction

$$z = f(x,y) = \frac{\eta}{2}\left[x\sqrt{x^2+1} - Log(x + \sqrt{x^2+1})\right] - xy/2, \ \eta \in \mathbb{R}.$$

On retrouve donc l'une des surfaces annoncée dans [1].

ii) $k \neq 0$. On aura donc $\psi(\beta) = \frac{1}{2}k\beta^2 + c_1\beta + c_2$ et on observe que l'équation différentielle en φ s'exprime comme:

$$1 + \varphi'^2 - k\alpha\varphi' = (\alpha\varphi' - k(1+\alpha^2))\varphi''$$

qui admet comme solution particulière $\varphi' = -\alpha/k$, soit $\varphi(\alpha) = -\alpha^2/2k + c_3$. A partir des équations du système (s_1) on obtient les expressions

$$\alpha = \frac{k}{k^2+1}(x - c_1 + ky), \qquad \beta = \frac{1}{k^2+1}(k(x-c_1) - y)$$

et en reportant dans z de (s_1) on aura:

$$z = \frac{1}{2(k^2+1)}\left[k(x^2-y^2) + (k^2-1)xy - 2c_1(kx-y) + c_1^2 k\right] + c_3 - c_2.$$

L'isométrie $(\arctan k;\, 0, \frac{1}{2}c_1\sqrt{1+k^2}, 0)$ de $\mathbb{H}_3$ permet de ramener cette surface au graphe de la fonction $z = f(x,y) = -xy/2$. Ainsi la solution particulière de $(\mathcal{E}_1)$ donne cette surface, appelée paraboloïde hyperbolique, surface déjà annoncée dans [1] aussi. Pour la solution générale de $(\mathcal{E}_1)$ on a:

$$\varphi'' = \frac{1 + \varphi'^2 - k\alpha\varphi'}{\alpha\varphi' - k(1+\alpha^2)}$$

qui se ramène à une équation du premier ordre par le changement $\varphi' = \gamma$ et qui devient:

$$\gamma' = \frac{1 + \gamma^2 - k\alpha\gamma}{\alpha\gamma - k(1+\alpha^2)}.$$

Le changement de variables

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\alpha + \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}\gamma, \qquad \Gamma = \frac{-k}{\sqrt{k^2+1}}\alpha + \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\gamma,$$

permet de ramener cette équation différentielle à l'équation différentielle à variables séparables

$$\frac{\Gamma d\Gamma}{\Gamma^2+1} = \frac{d\sigma}{\sigma}$$

Ce changement de variables correspond à une rotation d'angle $\arccos(1/\sqrt{1+k^2})$ autour de l'origine et exprime les nouvelles coordonnées (σ,Γ) par rapport aux coordonnées (α,γ). L'équation différentielle précédente est exprimée dans le nouveau repère (γ_1,γ_2) où $\gamma_1 = -\alpha/k = \varphi'$ (solution particulière qui est une droite) et $\gamma_2 = k\alpha$ qui lui est perpendiculaire. Cette équation différentielle s'intègre facilement du fait qu'elle est comparable à $(*)$ de **i)** et la solution est:

$$\Gamma(\sigma) = \pm\sqrt{\mu\sigma^2 - 1}, \; \mu \in \mathbb{R}.$$

□

REMARQUE 2. L'intégration du système $(s_{\mathbb{H}})$ dans $\mathbb{H}_3$ qui se ramène à celle d'une équation différentielle permet donc, dans des cas particuliers, de retrouver des surfaces explicites $z = f(x,y)$. Dans le cas général on intègre l'équation différentielle sans avoir explicitement la (ou les) surface(s) correspondante(s).

Références

[1] BEKKAR M., *Exemples de surfaces minimales dans l'espace de Heisenberg*, Rend. del Sem. Univ. Cagliari (Italie), **61** 2 (1991), 123–130.

[2] BEKKAR M., *Métriques riemanniennes qui admettent les plans comme surfaces minimales*, Thèse de doctorat, Université de Haute Alsace, sept. 1993, Mulhouse, France.

[3] BEKKAR M. AND SARI T., *Surfaces minimales réglées dans l'espace de Heisenberg*, Rend. del Sem. Mat. Politec. Torino (Italie), **50** 3 (1992), 243–254.

[4] DARBOUX G., *Leçons sur la théorie générale des surfaces. 1, 2*, Gauthier-Villars et Fils, Paris 1894.

[5] GOURSAT E., *Cours d'analyse. 1, 2, 3*, Gauthier-Villars, Paris 1956.

[6] HANGAN TH., *Sur les distributions totalement géodésiques du groupe nilpotent riemanien H_{2p+1}*, Rend. del Sem. Univ. Cagliari (Italie), **LV** 1 (1985), 17–24.

[7] SANINI A., *Gauss map of a surface of the Heisenberg group*, Boll. dell' Unione Mat. Italiana, **7** 11-B (1997), suppl. fasc. 2, 79–93.

AMS Subject Classification: 49Q05, 53A10.

Mohamed Bekkar
Departement de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université d'Oran Es-Sénia
Oran, ALGÉRIE
e-mail: `bekkarm@univ-oran.dz`

ou

Laboratoire de mathématiques, F. S. T.
Université de Haute Alsace
4, rue des Frères Lumière
68093 Mulhouse cédex, FRANCE
Lavoro pervenuto in redazione il 20.12.2000 e, in forma definitiva, il 02.11.2001.