Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino
Vol. 57, 3 (1999)

C. Borelli - C. Invernizzi

SULLA STABILITÀ DELL'EQUAZIONE FUNZIONALE DEI POLINOMI[†]

Sommario.
In this paper we obtain some stability results generalizing those well known due to Hyers concerning the Fréchet equation.

1. Introduzione

Lo scopo di questo lavoro è quello di ottenere dei risultati di stabilità secondo Hyers-Ulam che generalizzino i ben noti risultati di Hyers per le equazioni alle differenze con incrementi variabili presentati in [3].

Hyers, rifacendosi alla definizione di polinomio astratto introdotta da Fréchet in [2], prova un teorema di stabilità senza richiedere alcuna condizione di regolarità sulla funzione.

Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ a sia Y uno spazio vettoriale; sia inoltre T un cono convesso in X con vertice nell'origine.

Un monomio astratto di grado k su X è la restrizione alla diagonale di una trasformazione da X in Y k-additiva, cioè

$$V_k(x) = V(\underbrace{x, \cdots, x}_{k \text{ volte}}),$$

dove V è una trasformazione k-additiva.

Una trasformazione $V : T \to Y$ è un polinomio astratto al più di grado m se è decomponibile nella forma

$$V(x) = V_0(x) + V_1(x) + \cdots + V_m(x),$$

dove ogni V_k è un monomio astratto di grado k oppure è identicamente nullo in T, e V_0 è una costante. Se con $\Delta^k_{h_1,\cdots,h_k}$ indichiamo l'operatore differenza k-esima rispetto agli incrementi $h_1, \cdots, h_k$ e con Δ^k_h l'operatore differenza k-esima con incrementi tutti uguali a h, è ben nota la caratterizzazione seguente: una trasformazione $V : T \to Y$ è un polinomio astratto di grado al più m se e solo se

$$\Delta^{m+1}_h V(x) = 0 \qquad \text{per ogni} \quad x, h \in T.$$

Inoltre se V_k è un monomio astratto di grado k, esiste un'unica trasformazione k-additiva simmetrica $V(x_1, \cdots, x_k)$ tale che

$$V_k(x) = V(x, \cdots, x) \quad \text{e} \quad V(x_1, \cdots, x_k) = \frac{1}{k!}\Delta^k_{x_1,\cdots,x_k} V_k(x).$$

Nel prossimo paragrafo dimostreremo un teorema che generalizza il risultato di Hyers in [3] nella direzione di vari risultati di stabilità per l'equazione funzionale di Cauchy (si veda [1]).

[†]Lavoro finanziato dal M.U.R.S.T. Fondi di Ricerca (60%).

2. Dimostrazione dei risultati principali

In questo paragrafo daremo la dimostrazione del seguente

TEOREMA 4.1. *Sia S uno spazio vettoriale normato e sia B uno spazio di Banach. Consideriamo una funzione $f : S \to B$ soddisfacente la disuguaglianza*

$$\|\Delta^m_{h_1,\cdots,h_m} f(x)\| \leq \Phi_{m+1}(\|x\|, \|h_1\|, \cdots, \|h_m\|) + \beta, \tag{1}$$

per ogni $x \in S$, $h_i \in S$ $(1 \leq i \leq m)$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ e dove $\Phi_{m+1} : \mathbb{R}^{m+1}_+ \to \mathbb{R}_+$ è una funzione simmetrica, monotona non decrescente in ciascuna variabile e omogenea di grado $p \in [0, 1)$.

Allora esiste un polinomio astratto P_{m-1} definito su S a valori in B di grado al più $m - 1$, tale che per ogni $x \in S$ è

$$\|f(x) - P_{m-1}(x)\| \leq M_m \|x\|^p + \beta,$$

dove

$$M_m = \frac{1}{2^{m-1}} \left(\frac{1}{1 - 2^{p-1}}\right)^{m-1} \Phi_{m+1}(0, 1, \cdots, 1).$$

Inoltre $P_{m-1}(x) = f(0) + H_1(x) + \cdots + H_{m-1}(x)$ dove ogni H_k è il monomio astratto di grado k ottenuto nel modo seguente

$$H_{m-1}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(m-1)!n^{m-1}} \Delta^{m-1}_{nx} f(0)$$

$$H_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{k!n^k}\Big[\Delta^k_{nx} f(0) - \sum_{j=k+1}^{m-1} \Delta^k_{nx} H_j(0)\Big], \quad 1 \leq k \leq m - 2.$$

Premettiamo, seguendo le idee di Hyers, i seguenti lemmi.

LEMMA 4.1. *Sia S uno spazio vettoriale normato e sia B uno spazio di Banach. Se $f : S \to B$ soddisfa per ogni $x, y \in S$ la disuguaglianza*

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y) + f(0)\| \leq \Phi(\|x\|, \|y\|),$$

dove $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ è simmetrica e omogenea di grado $p \in [0, 1)$, allora esiste una funzione $\nu : S \to B$ additiva e tale che

$$\|f(x) - f(0) - \nu(x)\| \leq \|x\|^p \frac{\Phi(1, 1)}{2 - 2^p}, \tag{2}$$

$$\nu(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \Delta_{nx} f(0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(nx)}{n}. \tag{3}$$

Dimostrazione. Poniamo $f(x) - f(0) = g(x)$, così che $g(0) = 0$; allora

$$\|g(x + y) - g(x) - g(y)\| \leq \Phi(\|x\|, \|y\|). \tag{4}$$

Ponendo $x = y$ nella precedente relazione si ottiene

$$\|g(2x) - 2g(x)\| \leq \|x\|^p \Phi(1,1)$$

e quindi

$$\|\frac{g(2x)}{2} - g(x)\| \leq \frac{\|x\|^p}{2}\Phi(1,1).$$

Per induzione si prova che

$$\|\frac{g(2^n x)}{2^n} - g(x)\| \leq \|x\|^p \Phi(1,1)\frac{2^{-p}}{2^{n(1-p)}}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{i(1-p)}. \tag{5}$$

Da questo segue che la successione $T_n(x) = \frac{g(2^n x)}{2^n}$ è di Cauchy per ogni $x \in S$ e quindi, per la completezza di B, converge a $\nu(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$.

Sostituendo in (4) x e y rispettivamente con $2^n x$ e $2^n y$ e dividendo per 2^n, otteniamo

$$\|\frac{g(2^n(x+y))}{2^n} - \frac{g(2^n x)}{2^n} - \frac{g(2^n y)}{2^n}\| \leq \frac{1}{2^{n(1-p)}}\Phi(\|x\|,\|y\|),$$

e passando al limite per $n \to +\infty$ si prova l'additività di ν.

Se ora si passa al limite in (5) si ottiene la (2).

Sostituendo in (2) x con nx e dividendo per n, si ha

$$\|\frac{\nu(nx) - f(nx) + f(0)}{n}\| = \|\nu(x) - \frac{f(nx) - f(0)}{n}\| \leq \|x\|^p \frac{\Phi(1,1)}{(2-2^p)n^{1-p}}$$

e passando al limite per $n \to +\infty$ otteniamo la (3).

□

Si osservi che il precedente Lemma continua a valere anche nell'ipotesi

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0)\| \leq \Phi(\|x\|,\|y\|) + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}_+;$$

in tal caso si include il risultato di Hyers e si ottiene

$$\|f(x) - f(0) - \nu(x)\| \leq \|x\|^p \frac{\Phi(1,1)}{2-2^p} + \beta.$$

LEMMA 4.2. *Sia $f : S \to B$ tale che per ogni $x, y \in S$ valga la relazione*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0) - Q(x,y) - H(x,y)\| \leq \Phi(\|x\|,\|y\|), \tag{6}$$

dove $H(x,y)$ o è identicamente nulla o è un monomio astratto di grado $k-1$ in x, $Q(x,y)$ è un polinomio astratto di grado $k-2$ in x tale che $Q(0,y) = 0$ e la funzione Φ verifica le ipotesi del Lemma 4.1 ed inoltre è non decrescente in ciascuna variabile.

Allora $H(x,x) = k\hat{H}(x)$ e $\hat{H}(x)$ o è identicamente nulla oppure è un monomio astratto di grado k dato da

$$\hat{H}(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{k!n^k}\Delta_{nx}^k f(0)$$

e

$$H(x,y) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{k-1}}\Delta_{nx}^{k-1} g(0,y),$$

dove $g(x,y) = f(x+y) - f(x)$.

Dimostrazione. Per ipotesi esiste una funzione $\nu(x_1, \cdots, x_{k-1}, y)$ additiva e simmetrica nelle prime $k-1$ variabili tale che

$$H(x, y) = \frac{1}{(k-1)!}\nu(x, \cdots, x, y). \tag{7}$$

Facendo la differenza $(k-1)$-esima con incrementi $x_1, \cdots, x_{k-1}$ nel primo membro della (6) e ricordando che $\Delta^{k-1}_{x_1,\cdots,x_{k-1}} Q(x, y) = 0$, otteniamo

$$\|\Delta^k_{x_1,\cdots,x_{k-1},y} f(x) - \Delta^{k-1}_{x_1,\cdots,x_{k-1}} H(x, y)\| \le 2^{k-1}\Phi(\sum_{i=1}^{k-1} \|x_i\| + \|x\|, \|y\|)$$

e, per la (7),

$$\|\Delta^k_{x_1,\cdots,x_{k-1},y} f(x) - \nu(x_1, \cdots, x_{k-1}, y)\| \le 2^{k-1}\Phi(\sum_{i=1}^{k-1} \|x_i\| + \|x\|, \|y\|). \tag{8}$$

Se scambiamo in (8) y con x_j, $1 \le j \le k-1$, grazie alla simmetria dell'operatore differenza otteniamo

$$\begin{aligned} &\|\Delta^k_{x_1,\cdots,x_{k-1},y} f(x) - \nu(x_1, \cdots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \cdots, x_{k-1}, x_j)\| \\ \le\ & 2^{k-1}\Phi(\sum_{i\neq j}^{k-1} \|x_i\| + \|x\| + \|y\|, \|x_j\|). \end{aligned} \tag{9}$$

Da queste due ultime espressioni abbiamo

$$\begin{aligned} &\|\nu(x_1, \cdots, x_{k-1}, y) - \nu(x_1, \cdots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \cdots, x_{k-1}, x_j)\| \\ \le\ & 2^{k-1}\Phi(\sum_{i=1}^{k-1} \|x_i\| + \|x\|, \|y\|) + 2^{k-1}\Phi(\sum_{i\neq j}^{k-1} \|x_i\| + \|x\| + \|y\|, \|x_j\|). \end{aligned} \tag{10}$$

Mostriamo ora che ν, additiva e simmetrica nelle prime $(k-1)$ variabili, lo è pure nell'ultima variabile.

Sia $k = 2$; la precedente relazione si riduce a

$$\|\nu(x_1, y) - \nu(y, x_1)\| \le 2\Phi(\|x_1\| + \|x\|, \|y\|) + 2\Phi(\|y\| + \|x\|, \|x_1\|),$$

da cui sostituendo x_1 con nx_1 e passando al limite dopo aver diviso per n, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\nu(y, nx_1)}{n} = \nu(x_1, y),$$

da cui, sfruttando l'additività di ν rispetto alla prima variabile, otteniamo l'additività rispetto alla seconda e la simmetria.

Se $k > 2$, sostituiamo in (10) x_i con nx_i $(1 \le i \le k-1, i \neq j)$ e passando al limite dopo aver diviso per n, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\nu(nx_1, \cdots, y, \cdots, nx_{k-1}, x_j)}{n} = \nu(x_1, \cdots, x_{k-1}, y)$$

e l'additività di ν rispetto alla j-esima variabile porta a quella sulla k-esima ed alla simmetria.

Posto $g(x, y) = f(x + y) - f(x)$, scrivendo la (9) in termini di g, dopo aver sostituito x_j con x per ogni j e diviso per $(k-1)!n^{k-1}$, otteniamo

$$\frac{\|\Delta_{nx}^{k-1} g(0, y) - \nu(nx, \cdots, nx, y)\|}{(k-1)!n^{k-1}} \leq \frac{2^{k-1}\Phi(\sum_1^n \|nx\| + \|x\|, \|y\|)}{(k-1)!n^{k-1}},$$

da cui

$$\frac{1}{(k-1)!} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{k-1}} \Delta_{nx}^{k-1} g(0, y) = \frac{1}{(k-1)!} \nu(x, \cdots, x, y) = H(x, y).$$

Definiamo ora $\hat{H}(x) = \frac{1}{k} H(x, x) = \frac{1}{k!} \nu(x, \cdots, x)$ e sostituiamo y con nx nella precedente relazione; passando al limite si ha

$$\hat{H}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{k!n^k} \Delta_{nx}^k f(0).$$

□

LEMMA 4.3. *Sia f soddisfacente le ipotesi del Lemma4.2 e poniamo $\hat{f}(x) = f(x) - \hat{H}(x)$. Allora $\hat{f}$ soddisfa le ipotesi del Lemma 4.2 con $k-1$ al posto di k ($k \geq 3$), cioè esistono un monomio astratto $H'(x, y)$ di grado $k-2$ in x e un polinomio astratto $Q'(x, y)$ di grado $k-3$ in x con $Q'(0, y) = 0$, tali che*

$$\|\hat{f}(x + y) - \hat{f}(x) - \hat{f}(y) + \hat{f}(0) - Q'(x, y) - H'(x, y)\| \leq \Phi(\|x\|, \|y\|).$$

Dimostrazione. Sostituendo $f(x) = \hat{f}(x) + \hat{H}(x)$ in (6) otteniamo

$$\begin{aligned} &\|\hat{f}(x + y) - \hat{f}(x) - \hat{f}(y) + \hat{f}(0) - Q(x, y) - H(x, y) + \hat{H}(x + y) - \hat{H}(x) - \hat{H}(y)\| \\ &\leq \Phi(\|x\|, \|y\|). \end{aligned} \tag{11}$$

Poiché

$$\hat{H}(x + y) - \hat{H}(x) - \hat{H}(y) = \frac{1}{k!} (\nu(x + y, \cdots, x + y) - \nu(x, \cdots, x) - \nu(y, \cdots, y))$$

e

$$\nu(x + y, \cdots, x + y) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \nu(\underbrace{x, \cdots, x}_{k-i \text{ volte}}, \underbrace{y, \cdots, y}_{i \text{ volte}}),$$

otteniamo

$$\hat{H}(x + y) - \hat{H}(x) - \hat{H}(y) = \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \nu(\underbrace{x, \cdots, x}_{k-i \text{ volte}}, \underbrace{y, \cdots, y}_{i \text{ volte}}) \right) = H(x, y) + q(x, y)$$

dove $q(x, y)$ è un polinomio astratto di grado al più $k-2$ in x che si annulla per $x = 0$. Quindi sostituendo nella disuguaglianza (11) abbiamo

$$\|\hat{f}(x + y) - \hat{f}(x) - \hat{f}(y) + \hat{f}(0) - Q(x, y) + q(x, y)\| \leq \Phi(\|x\|, \|y\|),$$

dove sia Q che q sono di grado al più $k-2$ e si annullano in $x=0$. La loro differenza si può quindi scrivere nella forma

$$Q(x, y) - q(x, y) = Q'(x, y) + H'(x, y),$$

dove H' è un monomio astratto di grado $k-2$ e $Q'(x, y)$ è un polinomio astratto di grado al più $k-3$ in x che si annulla per $x=0$.

□

Osserviamo che analogamente al Lemma 4.1, anche i Lemmi 4.2 e 4.3 rimangono validi nel caso in cui si sostituisca la (6) con

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0) - Q(x, y) - H(x, y)\| \leq \Phi(\|x\|, \|y\|) + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}_+.$$

Dimostrazione. Dimostrazione del Teorema4.1

Procediamo per induzione.

Posto $g(x) = f(x) - f(0)$, si ha che $\Delta^2_{h_1,h_2} f(x) = \Delta^2_{h_1,h_2} g(x)$, quindi per la (1) otteniamo

$$\|g(x+h_1+h_2) - g(x+h_1) - g(x+h_2) + g(x)\| \leq \Phi_3(\|x\|, \|h_1\|, \|h_2\|) + \beta;$$

ponendo nella relazione precedente $x=0$, $h_1=x$ e $h_2=y$, si ha

$$\|g(x+y) - g(x) - g(y)\| \leq \Phi_3(0, \|x\|, \|y\|) + \beta.$$

Per il Lemma 4.1 possiamo costruire una funzione additiva $H(x) = \lim_{n\to+\infty} 2^{-n} g(2^n x)$ tale che

$$\|g(x) - H(x)\| \leq \frac{\Phi_3(0, 1, 1)}{2-2^p} \|x\|^p + \beta.$$

Se poniamo $P(x) = H(x) + f(0)$, otteniamo

$$\|f(x) - P(x)\| \leq \frac{\Phi_3(0, 1, 1)}{2-2^p} \|x\|^p + \beta$$

e sostituendo x con nx, dividendo per n e passando al limite abbiamo

$$H(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} [f(nx) - f(0)].$$

Supponiamo ora il teorema vero per m. Poniamo $G(x, y) = f(x+y) - f(x)$ e da

$$\|\Delta^{m+1}_{h_1,\cdots,h_m,y} f(x)\| \leq \Phi_{m+2}(\|x\|, \|h_1\|, \cdots, \|h_m\|, \|y\|) + \beta$$

otteniamo

$$\|\Delta^{m}_{h_1,\cdots,h_m} G(x, y)\| \leq \Phi_{m+2}(\|x\|, \|h_1\|, \cdots, \|h_m\|, \|y\|) + \beta,$$

da cui, se pensiamo y fissato, per l'ipotesi di induzione possiamo garantire l'esistenza di un polinomio $P_{m-1}(x, y)$ di grado $m-1$ in x tale che

$$\|G(x, y) - P_{m-1}(x, y)\| \leq \frac{1}{2^{m-1}} \left(\frac{1}{1-2^{p-1}}\right)^{m-1} \Phi_{m+2}(0, \|x\|, \cdots, \|x\|, \|y\|) + \beta$$

e $P_{m-1}(x, y) = G(0, y) + Q(x, y) + H(x, y)$, dove H è un monomio astratto di grado al più $m - 1$ in x e Q è un polinomio astratto di grado $m - 2$ tale che $Q(0, y) = 0$. Ricordando l'espressione di G, ciò significa

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y) + f(0) - Q(x, y) - H(x, y)\| \\ \leq \frac{1}{2^{m-1}} \left(\frac{1}{1 - 2^{p-1}}\right)^{m-1} \Phi_{m+2}(0, \|x\|, \cdots, \|x\|, \|y\|) + \beta,$$

quindi f soddisfa le ipotesi del Lemma 4.2 con $k = m$, da cui

$$H_m(x) = \frac{H(x, x)}{m} = \frac{1}{m!} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^m} \Delta_{nx}^m f(0)$$

è un monomio astratto di grado m.

Applichiamo ora il Lemma 4.3 alla funzione $f_1(x) = f(x) - H_m(x)$. Otteniamo

$$\|f_1(x + y) - f_1(x) - f_1(y) + f_1(0) - R_{m-3}(x, y) - R_{m-2}(x, y)\| \\ \leq \frac{1}{2^{m-1}} \left(\frac{1}{1 - 2^{p-1}}\right)^{m-1} \Phi_{m+2}(0, \|x\|, \cdots, \|x\|, \|y\|) + \beta,$$

dove R_{m-2} è un monomio astratto di grado $m-2$ in x e R_{m-3} è un polinomio astratto di grado al più $m - 3$ in x tale che $R_{m-3}(0, y) = 0$.

La funzione f_1 verifica quindi le ipotesi del Lemma 4.2 con $k = m - 1$, quindi

$$\begin{aligned} H_{m-1}(x) &= \frac{R_{m-2}(x, x)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{m-1}} \Delta_{nx}^{m-1} f_1(0) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{m-1}} [\Delta_{nx}^{m-1} f(0) - \Delta_{nx}^{m-1} H_m(0)] \end{aligned}$$

è un monomio astratto di grado $m - 1$ in x.

Riapplicando di nuovo il Lemma 4.3 alla funzione $f_2(x) = f_1(x) - H_{m-1}(x) = f(x) - H_{m-1}(x) - H_m(x)$, vediamo che sono verificate le ipotesi del Lemma 4.2 con $k = m - 2$ che assicurano che

$$H_{m-2}(x) = \frac{1}{(m-2)!} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{m-2}} \Delta_{nx}^{m-2} f_2(0)$$

è un monomio astratto di grado $m - 2$ in x.

Continuando in questo modo si giunge ad una funzione $f_{m-2}(x) = f(x) - H_3(x) - \cdots - H_m(x)$ tale che

$$\|f_{m-2}(x + y) - f_{m-2}(x) - f_{m-2}(y) + f_{m-2}(0) - h(x, y)\| \\ \leq \frac{1}{2^{m-1}} \left(\frac{1}{1 - 2^{p-1}}\right)^{m-1} \Phi_{m+2}(0, \|x\|, \cdots, \|x\|, \|y\|) + \beta,$$

con h monomio astratto di primo grado in x. Per il Lemma 4.2

$$H_2(x) = \frac{h(x, x)}{2} = \frac{1}{2!} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \Delta_{nx}^2 f_{m-2}(0)$$

è un monomio astratto di grado 2 e quindi la funzione $f_{m-1}(x) = f(x) - H_2(x) - \cdots - H_m(x)$ per il Lemma 4.3 è tale che

$$\|f_{m-1}(x + y) - f_{m-1}(x) - f_{m-1}(y) + f_{m-1}(0)\| \\ \leq \frac{1}{2^{m-1}} \left(\frac{1}{1 - 2^{p-1}}\right)^{m-1} \Phi_{m+2}(0, \|x\|, \cdots, \|x\|, \|y\|) + \beta.$$

Poiché f_{m-1} verifica le ipotesi del Lemma 4.1, possiamo assicurare l'esistenza di una funzione additiva

$$H_1(x) \; = \; \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \Delta_{nx} f_{m-1}(0)$$

tale che

$$\|f_{m-1}(x) \; - \; f_{m-1}(0) \; - \; H_1(x)\| \leq \frac{1}{2^m} \left(\frac{1}{1-2^{p-1}} \right)^m \Phi_{m+2}(0, 1, \cdots, 1)\|x\|^p + \beta,$$

quindi

$$\|f(x) \; - \; P_m(x)\| \leq \|x\|^p M_{m+1} + \beta$$

dove $P_m(x) = f(0) + H_1(x) + H_2(x) + \cdots + H_m(x)$.

□

3. Ulteriori risultati

Utilizzando procedimenti simili a quelli del paragrafo precedente è possibile provare risultati di stabilità anche nel caso in cui la funzione di controllo sia di una classe differente.Il risultato che proveremo fa riferimento, per quanto riguarda la scelta della funzione di controllo, a [4]. Precisamente vale il

TEOREMA 4.2. *Sia $f : S \to B$, dove S è uno spazio vettoriale normato e B è uno spazio di Banach, una funzione soddisfacente la disuguaglianza*

$$\|\Delta^m_{h_1,\cdots,h_m} f(x)\| \leq \Psi(\|x\|) + \sum_{i=1}^{m} \Psi(\|h_i\|)$$

per ogni $h_1, \cdots, h_m, x \in S$, dove $\Psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ verifica le condizioni

i) $\lim_{t\to+\infty} \frac{\Psi(t)}{t} = 0$,

ii) $\Psi(ts) \leq \Psi(t)\Psi(s)$,

iii) $\Psi(t) < t$ *per ogni* $t > 1$,

iv) Ψ *è localmente limitata.*

Allora esiste un polinomio astratto P_{m-1} tale che

$$\|f(x) - P_{m-1}\| \leq \Psi(0) + \Psi(\|x\|)T_m,$$

dove

$$T_m = \frac{2 + (2-\Psi(2)) + (2-\Psi(2))^2 + \cdots + (2-\Psi(2))^{m-2}}{(2-\Psi(2))^{m-1}}.$$

La dimostrazione del Teorema 4.2 procede in maniera analoga a quella seguita per il Teorema 4.1, facendo uso dei lemmi seguenti che costituiscono una evidente variante dei Lemmi 4.1 e 4.2.

LEMMA 4.4. *Sia $f : S \to B$, dove S è uno spazio vettoriale normato e B è uno spazio di Banach, una funzione soddisfacente la disuguaglianza*

$$\|f(x+y) \; - \; f(x) \; - \; f(y) \; + \; f(0)\| \leq \Psi(\|x\|) + \Psi(\|y\|),$$

dove Ψ *verifica le ipotesi del Teorema 4.2.*

Allora esiste una funzione $\nu : S \to B$ *additiva e tale che*

$$\|f(x) - f(0) - \nu(x)\| \leq \Psi(\|x\|)\frac{2}{2 - \Psi(2)}$$

e inoltre

$$\nu(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\Delta_{nx} f(0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(nx)}{n}.$$

LEMMA 4.5. *Sia* $f : S \to B$ *tale che per ogni* $x, y \in S$ *valga la relazione*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0) - Q(x,y) - H(x,y)\| \leq \Psi(\|x\|) + \Psi(\|y\|),$$

dove $H(x, y)$ *o è identicamente nulla o è un monomio astratto di grado* $k-1$ *in* x*,* $Q(x, y)$ *è un polinomio astratto di grado* $k-2$ *in* x *tale che* $Q(0, y) = 0$.

Allora $H(x,x) = k\hat{H}(x)$ *e* $\hat{H}(x)$ *o è identicamente nullo oppure è un monomio astratto di grado* k *dato da*

$$\hat{H}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{k!n^k}\Delta^k_{nx} f(0)$$

e

$$H(x,y) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{k-1}}\Delta^{k-1}_{nx} g(0,y),$$

dove $g(x, y) = f(x + y) - f(x)$.

Per concludere osserviamo che il Teorema 1 non può essere esteso al caso $p \geq 1$ (assumendo $\beta = 0$).

Dimostriamo l'esistenza di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e di una funzione $\Phi_{n+1} : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}_+$ simmetrica, monotona crescente in ciascuna variabile e omogenea di grado 1 tali che

$$|\Delta^n_{h_1,\cdots,h_n} f(x)| \leq \Phi_{n+1}(|x|, |h_1|, \cdots, |h_n|), \quad x, h_1, \cdots, h_n \in \mathbb{R},$$

e, per qualunque polinomio astratto P_{n-1} di grado $n-1$, si verifica che

$$\limsup_{x\to+\infty} |\frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{x}| = +\infty.$$

Consideriamo una funzione $H : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ simmetrica, monotona crescente in ogni variabile, omogenea di grado 1 e tale che $H(1, 1) = 1$, $\lim_{s\to+\infty} H(1, s) = +\infty$ e definiamo $h(t) = H(1, t)$. Poiché $\lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$, esiste una successione monotona crescente di interi positivi $\{n_k\}$ tale che $n_1 = 1$ e $h(2^{n_k}) > k$. Consideriamo ora la successione $\{a_k\}$ data da

$$a_1 = 0\,, \quad a_2 = 2\,, \quad a_{k+1} = 2^{n_k} a_k \text{ per } k = 2, 3, \cdots$$

e definiamo

$$g(a_1) = 0\,, \quad g(a_k) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k+1}\,,\ k = 2, 3, \cdots,$$

estendiamo quindi g linearmente sugli intervalli determinati dalla successione $\{a_k\}$. Si ottiene una funzione continua e monotona crescente che soddisfa le seguenti condizioni:

i) $g(0) = 0$,

ii) $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$,

iii) $g(t+s) - g(t) \le h(t^{-1}s)$ per ogni $s \in [0,+\infty)$ e $t \in (0,+\infty)$.

Isac e Rassias in [4] hanno mostrato che la funzione

$$f(t) = \frac{tg(t)}{2} \tag{12}$$

verifica la disuguaglianza

$$|f(t+s) - f(t) - f(s)| \le H(|t|,|s|)\ , \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

Da questo segue che

$$|\Delta^n_{h_1,\cdots,h_n} f(x)| \le \Phi_{n+1}(|x|,|h_1|,\cdots,|h_n|)\ , \quad x,h_1,\cdots,h_n \in \mathbb{R},$$

dove $\Phi_{n+1} : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}_+$ è una funzione simmetrica, monotona crescente in ciascuna variabile e omogenea di grado 1. Infatti, procedendo per induzione, se $n = 2$ abbiamo

$$\begin{aligned}
|\Delta^2_{h_1,h_2} f(x)| &= |f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1) - f(x+h_2) + f(x)| \\
&\le |f(x+h_1+h_2) - f(x+h_2) - f(h_1)| + |f(x+h_1) - f(x) - f(h_1)| \\
&\le H(|x+h_2|,|h_1|) + H(|x|,|h_1|) \le 2H(|x|+|h_1|+|h_2|,|x|+|h_1|+|h_2|) \\
&= \Phi_3(|x|,|h_1|,|h_2|)
\end{aligned}$$

e Φ_3 è simmetrica, monotona crescente e omogenea di primo grado, poiché H ha tali proprietà. Passiamo ora da n a $n+1$:

$$\begin{aligned}
|\Delta^{n+1}_{h_1,\cdots,h_{n+1}} f(x)| &\le |\Delta^n_{h_1,\cdots,h_n} f(x+h_{n+1})| + |\Delta^n_{h_1,\cdots,h_n} f(x)| \\
&\le \Phi_{n+1}(|x+h_{n+1}|,|h_1|,\cdots,|h_n|) + \Phi_{n+1}(|x|,|h_1|,\cdots,|h_n|) \\
&\le 2\Phi_{n+1}(|x|+|h_1|+\cdots+|h_{n+1}|,\cdots,|x|+|h_1|+\cdots+|h_{n+1}|) \\
&= \Phi_{n+2}(|x|,|h_1|,\cdots,|h_{n+1}|)
\end{aligned}$$

con Φ_{n+2} simmetrica, monotona crescente ed omogenea di grado 1.

Supponiamo ora, per assurdo, che esista un polinomio astratto P_{n-1} di grado $n-1$ tale che

$$\limsup_{x\to+\infty} |\frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{x}| < +\infty.$$

Essendo f continua, essa è limitata su ogni intervallo compatto. Dalla relazione precedente segue che anche P_{n-1} è limitato su ogni intervallo compatto non contenente lo zero. Ma allora P_{n-1} è un polinomio in senso ordinario, cioè $P_{n-1}(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$. Restringendoci ad $x > 0$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{x}\right| &= \left|\frac{f(x)}{x} - \frac{c_0}{x} - c_1 - \cdots - c_{n-1}x^{n-2}\right| \\
&= \left|\frac{g(x)}{2} - \frac{c_0}{x} - c_1 - \cdots - c_{n-1}x^{n-2}\right|.
\end{aligned}$$

Per $n = 1$ e $n = 2$ abbiamo ovviamente

$$\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{f(x) - P_{n-1}(x)}{x}\right| = +\infty.$$

Se $n > 2$, definiamo $\overline{f}(x) = g(a_k)\chi_{(a_{k-1},a_k]}(x)$ e osserviamo che per la costruzione fatta è $n_k \geq k$ e, per $k \geq 5$, $a_{k-1} \geq a_{k-2} \geq k$. Si verifica allora che

$$g(x) \leq \overline{f}(x) \leq \log(k+1)\chi_{(a_{k-1},a_k]}(x) \leq \log(a_{k-1})\chi_{(a_{k-1},a_k]}(x) \leq 3\log x$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x^{n-2}} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{3\log x}{x^{n-2}} = 0.$$

Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{g(x)}{2} - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \right| = \lim_{x\to+\infty} x^{n-2} \left| \frac{g(x)}{2x^{n-2}} - \frac{c_0}{x^{n-1}} - \cdots - c_{n-1} \right| = +\infty.$$

La stessa funzione f fornisce il controesempio per il caso $p > 1$. Per mostrare ciò osserviamo che partendo dalla funzione Φ_{n+1} costruita in precedenza e fissato $p > 1$, la funzione Γ_{n+1} definita da

$$\Gamma_{n+1}(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \Phi_{n+1}(x_k^p, \cdots, x_k^p)$$

è simmetrica, monotona crescente ed omogenea di grado p e inoltre

$$\Phi_{n+1}(x_1, \cdots, x_{n+1}) \leq \Gamma_{n+1}(x_1, \cdots, x_{n+1}) + \Phi_{n+1}(1, \cdots, 1).$$

Utilizzando questo risultato, per la funzione costruita in (12) abbiamo la seguente disuguaglianza

$$|\Delta^n_{h_1,\cdots,h_n} f(x)| \leq \Gamma_{n+1}(|x|, |h_1|, \cdots, |h_n|) + \beta.$$

Fissato $p > 1$ sia $n = [p] + 2$. Supponiamo ora che esista un polinomio astratto P_{n-1} tale che

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{|f(x) - P_{n-1}(x)| - \beta}{|x|^p} < +\infty.$$

Come nel caso precedente la continuità di f ci garantisce che P_{n-1} è un polinomio ordinario e, restringendoci ai reali positivi, otteniamo

$$\frac{|f(x) - P_{n-1}(x)| - \beta}{x^p} = \left| \frac{g(x)}{2x^{p-1}} - \frac{c_0}{x^p} - \cdots - \frac{c_{n-1}x^{n-1}}{x^p} \right| - \frac{\beta}{x^p}.$$

Si prova quindi immediatamente che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x) - P_{n-1}(x)| - \beta}{|x|^p} = +\infty.$$

Si noti che sono esclusi i casi $n = 1$ e $n = 2$, per i quali infatti mediante le stesse tecniche dimostrative usate da Hyers si ottengono risultati positivi di stabilità.

Riferimenti bibliografici

[1] FORTI G.L., *Hyers-Ulam stability of functional equations in several variables*, Aeq. Math. **50** (1995), 143–190.

[2] FRÉCHET M., *Les polynomes abstraits*, J. Math. Pure Appl. (9) **8** (1929), 71–92.

[3] HYERS D.H., *Transformations with bounded n-th differences*, Pacific J. Math. **11** (1961), 591–602.

[4] ISAC G. AND RASSIAS T.M., *On the Hyers-Ulam stability of ψ - additive mappings*, J. Approx. Theory **72** (1993), 131–137.

AMS Subject Classification: 39B52, 39B72, 47H15.

Costanza BORELLI, Chiara INVERNIZZI
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Milano
Via C. Saldini 50
20133 Milano, ITALIA
e-mail: borelli@mat.unimi.it

Lavoro pervenuto in redazione il 28.8.1997 e, in forma definitiva, il 25.11.1999.