Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino
Vol. 57, 1 (1999)

**A. Sanini**

# RILEGGENDO I RENDICONTI

## 1. Introduzione

I Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino sono nati nel 1929 come "Conferenze di Fisica e di Matematica della R. Università e della R. Scuola di Ingegneria di Torino" e nel 1938 hanno assunto l'attuale denominazione.

In un arco di vita di settant'anni è possibile cogliere l'evoluzione degli obbiettivi della Rivista, il mutare delle abitudini, dei diversi modi di confrontarsi e di comunicare i risultati ottenuti, persino una diversa possibilità da parte dei matematici di muoversi e quindi di stimolare collaborazioni anche di studiosi geograficamente lontani.

Particolarmente utile per comprendere l'evoluzione dei Rendiconti nei primi quarant'anni è l' indice cronologico e sistematico, curato sotto la Direzione di Tino Zeuli, dei volumi da 1 a 30; è auspicabile che questo lavoro possa essere continuato anche per i volumi successivi.

Nel primo periodo di attività, che va dall'inizio all'immediato dopoguerra, con l'inevitabile interruzione determinata dall'evento bellico, la Rivista pubblica i testi delle conferenze che studiosi operanti prevalentemente a Torino, come Guido Fubini, Gino Fano, Enrico Persico, Carlo Somigliana, Eligio Perucca, Gustavo Colonnetti ed altri, avevano tenuto quasi allo scopo di rendere partecipe la comunità scientifica locale dei progressi dei rispettivi settori e di stimolare eventuali collaborazioni.

A partire dal volume 8 (anni 1947–48 e 1948–49) insieme ai testi delle conferenze iniziano a comparire le Note, prevalentemente presentate dalla comunità scientifica locale, ma anche provenienti dall'estero e conseguenti alle collaborazioni che i docenti di Torino riuscivano a riprendere dopo la guerra.

Così nel volume 10 (anno 1950–51) insieme al testo di una conferenza di grande respiro culturale di Francesco Severi su "I fondamenti remoti e prossimi della geometria algebrica", appare la Nota "On some functional transformations" di Arthur Erdélyi, con cui Francesco Tricomi aveva collaborato per il Bateman Manuscript Project, da cui sono scaturite le opere in più volumi su "Higher Trascendental Functions" e "Tables of Integral Transforms".

Nel volume 11, insieme al testo della conferenza, tenuta volutamente su una base elementare, da uno dei matematici più significativi del 20° secolo, Heinz Hopf su "Einige Anwendungen der Topologie auf die Algebra", appare un interessante articolo di ricerca di Paul Berg e Peter Lax su "Fourth order operators".

Nel volume 14 al testo della conferenza di Eduard Cech, ben noto collaboratore di Guido Fubini, su "Deformazioni di congruenze di rette", si accompagna la Nota di Luis Santaló, uno dei più significativi esponenti della geometria integrale moderna, su "Cuestiones de geometria diferencial e integral en espacios de curvatura constante".

Nel volume 15 si trovano il testo della conferenza di Jean Leray su "La théorie des points fixes et ses applications en analyse" e le Note di Solomon Bochner su "Curvature and Betti numbers in real and complex vector bundles" e di Sanders MacLane su "Slides and torsion products for modules".

Il volume 16 contiene i testi di diverse conferenze interessanti di natura storica, quali quella di Alessandro Terracini su "Cauchy a Torino", quella di Paul Vincensini dal titolo "Vue d'ensemble sur l'oeuvre géométrique de Luigi Bianchi"; ad esse si accompagna il testo di una brillantissima conferenza di Georges de Rham dal titolo "Sur quelques courbes définies par des équations fonctionelles".

Questo elenco di conferenze importanti e di note significative che convivono nei vari volumi della Rivista può continuare fino ai giorni nostri; naturalmente una maggiore diffusione della Rivista anche a livello internazionale ha determinato un significativo incremento dello spazio dedicato alle note di ricerca.

Una citazione particolare meritano gli Atti dei Convegni Internazionali pubblicati sui Rendiconti. Il primo convegno è quello di Geometria Algebrica, tenuto a Torino nel maggio del 1961, in coincidenza con le celebrazioni del Centenario dell'Unità d'Italia, che vede i contributi dei maggiori geometri algebrici: Kähler, Samuel, Zariski, Van der Waerden, Dolbeault e molti altri.

Ma la vera stagione dei convegni internazionali, che è ancora particolarmente attiva, ha inizio negli anni '80, dopo che il Seminario Matematico ha trovato una struttura amministrativa più solida, sulla base di una convenzione stipulata tra l'Università e il Politecnico di Torino.

Ormai ogni anno si tiene un convegno internazionale, i cui Atti sono raccolti in appositi fascicoli dei Rendiconti.

I convegni rispondono in modo più puntuale alla maggiore specializzazione attraverso cui si sviluppano i diversi settori della Matematica, facilitano un confronto diretto tra gli specialisti e consentono ai partecipanti di stabilire rapporti di collaborazione e amicizia destinati a durare nel tempo.

Ricordo che alcuni di tali convegni sono stati promossi congiuntamente dal Seminario Matematico e dall'Institute for Scientific Interchange (ISI), con sede a Villa Gualino in Torino, che ha fornito supporto anche per la parte organizzativa.

Ci sarebbero tante cose da raccontare sui settant'anni dei Rendiconti, ricordi personali e cose raccontate da altri.

Rispondendo ad un invito dell'attuale Commissione Scientifica, cercherò in quello che segue di esprimere innanzitutto qualche considerazione su alcuni articoli apparsi sulla Rivista, limitando il periodo temporale agli anni '70 e seguendo l'ordine cronologico; naturalmente una selezione di questo tipo è difficile, condizionata dal nome degli Autori e soprattutto dalle conoscenze e dai gusti personali.

In secondo luogo, sempre con un criterio personale di selezione, prenderò in considerazione le tematiche affrontate in alcuni convegni, che evidenziano altresì l' evoluzione della matematica e delle sue applicazioni.

## 2. Alcuni articoli significativi

A partire dagli anni '50 appaiono sui Rendiconti diversi contributi significativi, alcuni dei quali già citati all'inizio di questo articolo, sia sotto forma di Note che di testi di conferenze. Cercherò di esporre un'analisi più dettagliata di alcuni di essi.

*a*) Nota di P.W. Berg e P.D. Lax: "Fourth order operators", vol. 11, 1951–52, 343–358.

Questo articolo si colloca al centro dell'analisi funzionale ed è collegato a risultati di Gaetano Fichera degli anni '50. Esso ha come oggetto la teoria del problema dei valori di frontiera per operatori differenziali del 4° ordine che siano prodotto di due operatori ellittici del 2° ordine. Questo studio ha le sue radici nel metodo usato da Zaremba nel caso in cui entrambi gli operatori coincidano con l'operatore di Laplace ed è quindi collegato all'equazione biarmonica, di fondamentale importanza nella teoria dell'elasticità.

Siano $L$, $M$ due operatori ellittici del 2° ordine, $D$ un dominio compatto di uno spazio euclideo o di una varietà riemanniana, $B$ la frontiera di $D$. Si consideri il problema di trovare le soluzioni $u$ dell'equazione

$$\begin{cases} LMu = f & \text{in } D \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } B\,. \end{cases}$$

Se $L$, $M$ hanno la stessa parte principale, cioè differiscono, a parte un cambiamento di variabili, dall'operatore di Laplace solo per termini del 1° ordine, viene dimostrato il seguente teorema dell'alternativa:

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione $u$ del problema è che il termine noto $f$ sia una funzione sufficientemente differenziabile ortogonale a tutte le soluzioni a quadrato sommabile del problema omogeneo aggiunto: $M^*L^*u = 0$.
Inoltre il numero delle soluzioni linearmente indipendenti del problema omogeneo $LMu = 0$ è finito e coincide con il numero delle soluzioni linearmente indipendenti del problema omogeneo aggiunto.

*b*) Nota di L.A. Santaló: "Cuestiones de geometria diferencial e integral en espacios de curvatura costante", vol. 14, 1954–55, 277–295.

Uno dei risultati più significativi della geometria differenziale degli anni '40 è la generalizzazione della formula di Gauss-Bonnet in dimensione qualsiasi dovuta ad Allendorfer e Weil e di cui poco dopo Chern, utilizzando il metodo del riferimento mobile di Elie Cartan, ha dato una dimostrazione intrinseca, da cui la denominazione di Teorema di Gauss-Bonnet-Chern.

Nel caso particolare di un'ipersuperficie di uno spazio di curvatura sezionale costante i vari elementi che intervengono nella formula di Gauss-Bonnet hanno un semplice significato geometrico esprimibile mediante le curvature principali dell'ipersuperficie, risultati ottenuti nel 1943 da Herglotz, seguendo una via diversa da quella poi utilizzata da Chern.

La prima parte dell'articolo di Santaló ha esattamente lo scopo di adattare la dimostrazione data da Chern al caso delle ipersuperfici di uno spazio a curvatura costante.

La seconda parte è invece dedicata al calcolo di espressioni duali, con generalizzazione di risultati ottenuti da Blaschke in dimensione 2 e 3, e di geometria integrale, con estensione a spazi a curvatura costante della formula di Crofton, già estesa ad $\mathbb{R}^n$ da Hadwiger.

Passando ad un esame più dettagliato, in uno spazio a curvatura sezionale costante $K$, che è identificato al proiettivo reale o iperbolico a seconda del segno di $K$, si consideri un'ipersuperficie chiusa $S$ che delimita una regione $Q$. Siano $F$, $V$ rispettivamente l'area di $S$ e il volume di $Q$, $\chi(Q)$ la caratteristica di Eulero-Poincaré di $Q$. Detti $R_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ i raggi di curvatura principali di $S$, siano

$$m_i = \frac{1}{\binom{n-1}{i}} \left\{ \frac{1}{R_{\alpha_1}} \cdots \frac{1}{R_{\alpha_i}} \right\}, \quad m_0 = 1\,,$$

dove con il simbolo $\{\quad\}$ si indicano le funzioni simmetriche elementari di ordine $i$ delle curvature principali, $m_i$ le curvature medie e

$$M_i = \int_S m_i$$

i loro integrali su $S$. Siano inoltre

$$O_i = \frac{2\pi^{\frac{i+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}, \quad c_i = \binom{n-1}{i} \frac{O_n}{O_i O_{n-1-i}} K^{\frac{n-1-i}{2}},$$

dove $O_i$ rappresenta l'area della sfera unitaria $i$-dimensionale di $\mathbb{R}^n$.

Allora, a seconda che $n$ sia pari o dispari, sussiste la seguente formula, dovuta ad Allendoerfer e Weil e dimostrata intrinsecamente da Chern, detta formula di Gauss-Bonnet generalizzata

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2} O_n \chi(Q) = c_{n-1} M_{n-1} + c_{n-3} M_{n-3} + \cdots + c_1 M_1 + K^{\frac{n}{2}} V \qquad (n \text{ pari}) \\ &\frac{1}{2} O_n \chi(Q) = c_{n-1} M_{n-1} + c_{n-3} M_{n-3} + \cdots + c_2 M_2 + c_0 F \qquad (n \text{ dispari}) \end{aligned}$$

dove per $n$ dispari si ha $\chi(Q) = \frac{1}{2}\chi(S)$.

Le formule precedenti vengono quindi applicate per diverse questioni. Ad esempio, in uno spazio a curvatura costante 1, si chiama duale o polare di $S$ l'ipersuperficie $S^*$ parallela a distanza $\frac{\pi}{2}$ da $S$; siano inoltre $Q$, $Q^*$ le regioni delimitate da $S$, $S^*$. Tra gli integrali di curvatura media $M_i$ di $S$ e $M_i^*$ di $S^*$ sussistono le relazioni

$$M_i^* = M_{n-1-i} \qquad (i = 0, \ldots, n-1);$$

poiché $\chi(Q^*) = \chi(Q)$, dalle (*), con $M_0 = F$, $M_0^* = F^*$, rispettivamente aree di $S$, $S^*$, mentre $V$, $V^*$ indicano i volumi di $Q$, $Q^*$, si ottengono varie relazioni. Così per $n = 2$ si trovano le formule elementari

$$L + F^* = 2\pi\chi(Q), \qquad L^* + F = 2\pi\chi(Q),$$

dove $L$ è la lunghezza del contorno di $Q$, $F$ la sua area.
Per $n = 3$ si ha invece

$$F + F^* = 2\pi\chi(S).$$

La parte finale dell'articolo è dedicata a questioni di geometria integrale. Detta $dG$ la densità delle rette (cioè delle geodetiche) di $\mathbb{R}^n$, $\lambda$ la lunghezza della corda che una retta $G$ stacca su un corpo convesso $Q$ di volume $V$, Hadwiger aveva provato che

$$\int_{G \cap Q \neq \emptyset} \lambda^{n+1} dG = \frac{1}{2} n(n+1) V^2$$

L'estensione a uno spazio a curvatura costante $K$ data nell'articolo è espressa da

$$\int_{G \cap Q \neq \emptyset} \Phi_{n-1}(\lambda, K)\, dG = V^2$$

dove

$$\Phi_{n-1}(\lambda, K) = \int_0^\lambda \int_0^\lambda \frac{\sin^{n-1}\left(\sqrt{|K|}|t_2 - t_1|\right)}{|K|^{\frac{n-1}{2}}} dt_1\, dt_2,$$

essendo $t_1$, $t_2$ le ascisse di due punti $P_1$, $P_2$ interni a $Q$ sulla geodetica $G$ che stacca su $Q$ una corda di lunghezza $\lambda$.

*c*) Nota di Salomon Bochner: "Curvature and Betti numbers in real and complex vector bundles", vol. 15, 1955–56, 225–253.

Una delle tecniche più potenti per lo studio della topologia di una varietà riemanniana è nota al giorno d'oggi con il nome di tecnica di Bochner; essa fornisce ostruzioni all'esistenza di campi di Killing e di forme armoniche e quindi, abbinata alla teoria di Hodge, ha riflessi sulla coomologia di una varietà.

Anche questo articolo, in cui non c'è, a parte il titolo, un riferimento esplicito ai numeri di Betti o invarianti del genere, rientra in questo ambito di idee. C'è da tenere presente che l'articolo è successivo sia alla ben nota monografia di Yano e Bochner: "Curvature and Betti numbers", Princeton 1953, sia all'utilizzo da parte di K. Kodaira dei risultati di Bochner riguardanti l'annullamento di gruppi di coomologia di una varietà kähleriana.

L'articolo di Bochner è certamente un articolo di prestigio, con una parte iniziale più elementare, seguita da alcune considerazioni più delicate, riguardanti la quasi modularità; una domanda che viene spontanea è il motivo per cui Bochner affida ai Rendiconti queste sue idee, ma questa volta la risposta è anche semplice, perché in quegli anni a Torino insegnò Aldo Andreotti.

Il primo obbiettivo dell'articolo, a cui sono dedicati i numeri 1, 2, è una chiara esposizione della teoria delle connessioni lineari su un fibrato vettoriale, nozione che si era sviluppata in quegli anni. Curiosamente le sezioni dei fibrati vettoriali vengono denominate vettoroidi (covarianti o contravarianti) e più in generale tensoroidi, a seconda delle leggi di trasformazione delle componenti.

Supposta assegnata una connessione lineare simmetrica sulla varietà base $M$ e una connessione lineare $(L^C_{Ai})$ sul fibrato vettoriale, la derivata covariante di un vettoroide covariante $t_A$ è espressa localmente da

$$t_{A,i} = \frac{\partial t_A}{\partial x^i} - t_C L^C_{Ai}$$

e la formula di commutazione delle derivate covarianti evidenzia il tensoroide di curvatura $R^B_{Aij}$, ossia

$$t_{A,i,j} - t_{A,j,i} = t_B R^B_{Aij}$$

con

$$R^B_{Aij} = \frac{\partial L^B_{Aj}}{\partial x^i} - \frac{\partial L^B_{Ai}}{\partial x^j} + L^B_{Ci} L^C_{Aj} - L^B_{Cj} L^C_{Ai}\,.$$

A partire dal n. 3, supposta assegnata una metrica positiva $(g_{AB})$ sulle sezioni del fibrato vettoriale, vengono esposti alcuni risultati di annullamento. È ben noto che su una varietà compatta se una funzione $\varphi$ ha Laplaciano positivo $\Delta\varphi \geq 0$, allora è armonica, cioè $\Delta\varphi = 0$. Se si considera una sezione covariante $\xi_A$ e la funzione $\varphi = g^{AB}\xi_A\xi_B$, si ha

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi = T_1 + T_2$$

dove

$$T_1 = g^{rs} g^{AB} \xi_{A,r}\xi_{B,s} \geq 0$$
$$T_2 = g^{AB}\left(g^{rs}\xi_{A,r,s}\right)\xi_B = g^{rs}\left(\xi_{A,r,s}\right)\xi^A \qquad \left(\xi^A = g^{AB}\xi_B\right),$$

da cui $\Delta\varphi \geq 0$ se $T_2 \geq 0$.

TEOREMA 1.1. *Se il campo $\xi_A$ soddisfa a condizioni del tipo*

$$(*) \qquad g^{rs}\xi_{A,r,s} = g^{BC}S_{AB}\xi_C$$

*con $S_{AB}$ opportuno tensoroide, sussistono i seguenti risultati:*

*Su una varietà compatta $M$, se $S_{AB}$ è definito positivo, allora $\xi_A = 0$.*

*Se $S_{AB}$ è solo semidefinito positivo, allora le soluzioni di (*) sono quelle per cui si ha simultaneamente $\xi_{A,i} = 0$, $S_A^B\xi_B = 0$.*

Vengono quindi segnalate estensioni del precedente teorema a varietà non compatte. La prima estensione riguarda vettoroidi $\xi_A$ che oltre alle (*) soddisfano alla condizione di avere valori nulli alla frontiera nel senso che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un sottoinsieme compatto $M^\epsilon$ tale che $g^{AB}\xi_A\xi_B < \epsilon^2$ per tutti i punti di $M$ non appartenenti a $M^\epsilon$.

La seconda estensione è più fine e riguarda la validità dei risultati del teorema sotto la condizione che sulla varietà $M$ ci sia un gruppo di trasformazioni rispetto a cui le quantità

$$g^{rs},\ g^{AB},\ \xi_A,\ \xi_{A,i},\ \xi_{A,i,j}$$

siano quasi automorfe o quasi modulari, concetto introdotto da Bochner in un articolo apparso nel 1951 sul Canadian Journal of Mathematics e di cui l'articolo di Torino si può considerare una continuazione.

La parte successiva dell'articolo è dedicata all'esame di situazioni in cui sono soddisfatte le (*) con opportune espressioni del tensoroide $S$ e vengono ottenute applicazioni a vettori o tensori armonici a valori in fibrati vettoriali.

In particolare, se il tensore di curvatura del fibrato vettoriale su una varietà compatta è positivo, cioè

$$R^C_{Aij}t^{Ai}t_{Cs}g^{sj} > 0 \quad \text{per} \quad t^{Ai}t_{Ai} > 0$$

allora non esistono tensori armonici non nulli a valori nel fibrato vettoriale, cioè tensori $\xi_{A_1\dots A_s i_1\dots i_p}$, simmetrici negli indici $A_r$ e antisimmetrici negli indici $i_h$, tali che

$$\xi_{A_1\dots A_s i_1\dots i_p,j} = \sum_{q=1}^{p}\xi_{A_1\dots A_s i_1\dots j\dots i_p,i_q}\,, \qquad g^{ij}\xi_{A_1\dots A_s i_1\dots i_{p-1}i,j} = 0$$

Seguono quindi considerazioni riguardanti l'annullamento di campi armonici su varietà kähleriane compatte ed analoghi per varietà complesse non compatte, con dati che soddisfino le condizioni di quasi modularità.

*d*) Conferenza di Georges de Rham: "Sur quelques courbes definiées par des équations fonctionelles", vol. 16, 1956–57, 101–113.

In questa conferenza de Rham espone, in modo estremamente elegante, alcuni risultati da lui precedentemente ottenuti, arricchendo l'esposizione attraverso le motivazioni geometriche che lo hanno condotto allo studio del problema, ai suoi collegamenti anche con la teoria della probabilità e ai risultati ottenuti da altri autori, in particolare von Koch, Cesaro, Polya, seguendo le idee topologiche sviluppate a Torino da Giuseppe Peano. Persino la bibliografia ragionata, che conclude la conferenza, appare particolarmente ben strutturata e tale da fornire i lineamenti generali della teoria in cui si inquadrano i risultati riferiti.

Credo che anche oggi, con la riscoperta del discreto e lo sviluppo della teoria dei frattali, questa esposizione mantenga grande validità per i contenuti, ma sia soprattutto lo stile dell'esposizione un modello su cui riflettere; de Rham è stato riconosciuto da tutti come un matematico finissimo e questa conferenza ne è una conferma.

Procediamo ad esporre alcuni contenuti.

Siano $F_0$, $F_1$ due trasformazioni del piano in se stesso; si cerca un'applicazione $t \to M(t)$ dell'intervallo $0 \leq t \leq 1$ nel piano che soddisfi alle equazioni funzionali

$$(1) \qquad M\left(\frac{t}{2}\right) = F_0 M(t)\,, \qquad M\left(\frac{1+t}{2}\right) = F_1 M(t)\,.$$

Se le trasformazioni $F_0$, $F_1$ sono contrazioni e se l'immagine mediante $F_0$ del punto fisso di $F_1$ coincide con l'immagine mediante $F_1$ del punto fisso di $F_0$, allora le equazioni (1) hanno una soluzione limitata unica $M(t)$ continua, che è la curva definita dalle (1).

Il caso più semplice di trasformazioni $F_0$, $F_1$ del piano, identificato al campo complesso, soddisfacenti le dette condizioni è dato da

$$F_0 z = az, \quad F_1 z = a + (1-a)z, \quad \text{con } |a|, |1-a| < 1$$

aventi rispettivamente 0, 1 come punti uniti.

Se $a = \frac{1}{2}$ si trova $M(t) = t$; se $a \neq \frac{1}{2}$, la derivata di $M(t)$ è nulla oppure non esiste. Così ad esempio per $a = \frac{1}{2}(1+i)$, $M(t)$ è una funzione continua ovunque non derivabile, mentre se $a \neq \frac{1}{2}$ è reale, si ha $M'(t) = 0$ quasi ovunque.

Un caso analogo si ha per le trasformazioni definite da

$$F_0 z = a\overline{z}, \quad F_1 z = a + (1-a)\overline{z}, \quad \text{con } |a|, |1-a| < 1$$

Per $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$ la curva $M(t)$ è la curva di von Koch, mentre se $\left|a - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, si trovano curve di Peano.

Viene quindi descritto il modello geometrico che ha condotto l'Autore allo studio delle equazioni (1).

Si consideri un poligono a due lati $P_0 = ABC$ e sia, per ricorrenza, $P_{n+1}$ la poligonale avente per vertici i punti che dividono i lati di $P_n$ in tre parti uguali e nell'ordine in cui i punti si trovano su $P_n$. Queste poligonali sono convesse e il loro limite è una curva $C$ che unisce il punto medio di $AB$ con il punto medio di $BC$.

Se $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ sono i vertici di $P_1$, sia $F_0$ la trasformazione affine del piano che trasforma la terna iniziale $ABC$ in $A'B'C'$ e sia $F_1$ quella che trasforma $ABC$ in $B'C'D'$.

Indicato con $M(h2^{-n})$ il punto medio dell'$(h+1)$-esimo lato di $P_n$, si prova che $F_0 M(h2^{-n}) = M(h2^{-n-1})$, e , per continuità, $F_0 M(t) = M\left(\frac{t}{2}\right)$ per $0 \leq t \leq 1$. Nello stesso modo si prova $F_1 M(t) = M\left(\frac{1+t}{2}\right)$.

Le coordinate $x(t)$, $y(t)$ di $M(t)$ hanno derivate quasi ovunque nulle e la curvatura di $M(t)$ è quasi ovunque nulla ed è infinita per i valori di $t$ corrispondenti alle frazioni binarie.

Una estensione di questa costruzione porta alle curve $C_\gamma$ in cui le poligonali $P_{n+1}$ si ottengono da $P_n$ dividendo i lati di $P_n$ in tre parti, di cui la prima e la terza uguali, mentre la centrale di lunghezza $\gamma$ volte quella delle estreme. Se $\gamma = 1$ si ritrovano le curve precedenti; se $\gamma = 2$ si ha il caso singolare di un arco di parabola; per gli altri valori reali di $\gamma$ c'è tutta una classificazione dei vari tipi di curve $C_\gamma$.

### 3. I Convegni

A partire dagli anni '80, nell'ambito dell'attività promossa dal Seminario Matematico, si sono tenuti in Torino diversi convegni internazionali che vengono qui elencati:

1. Stochastic Problems in Mechanics, 28–30 maggio 1981
2. Linear Partial and Pseudo-differential Operators, 30 settembre–2 ottobre 1982
3. Differential Geometry on Homogeneous Spaces, 29 settembre–1° ottobre 1983
4. Special Functions: Theory and Computation, 10–12 ottobre 1984
5. Algebraic Varieties of Small Dimension, 2–5 ottobre 1985
6. Linear and Nonlinear Mathematical Control Theory, 1–4 luglio 1986
7. Logic and Computer Science: New Trends and Applications, 13–15 ottobre 1986
8. Nonlinear Hyperbolic Equations in Applied Sciences, 9–12 giugno 1987
9. Partial Differential Equations and Geometry, 12–15 ottobre 1988
10. Some Topics in Nonlinear PDE's, 2–6 ottobre 1989
11. Numerical Methods in Applied Science and Industry, 18–21 giugno 1991
12. Numerical Methods in Astrophysics and Cosmology, 18–20 maggio 1993

Esaminerò nel seguito le tematiche affrontate in alcuni di questi convegni, indicando talvolta i titoli e gli argomenti sviluppati in alcuni contributi.

*a*) Convegno su "Stochastic Problems in Mechanics", 28, 29, 30 maggio 1981.

Il motivo ispiratore del convegno è che i modelli lineari e deterministici, spesso utilizzati nella modellizzazione matematica dei sistemi fisici, non sempre sono idonei allo scopo, in quanto in diversi settori, dalla biologia alle vibrazioni meccaniche, appaiono quantità che possono avere un comportamento addirittura stocastico. Di qui la necessità di orientare gli interessi di ricerca verso l'analisi e lo studio delle tecniche di soluzione delle equazioni non lineari stocastiche, come esse si presentano nella fisica dei sistemi.

Il convegno registra diversi interventi interessanti da parte di studiosi stranieri e italiani, con una significativa rappresentanza dell'area torinese. Notevole anche il numero di conferenze tenute da studiosi afferenti a istituti non matematici.

Particolarmente significativi appaiono i contributi di
- George Adomian: "Solution of nonlinear physical problems", in cui sono delineate le tecniche di base e numerose loro applicazioni;
- Michel Metivier: "Strong solutions of stochastic equations (a review)", in cui vengono trattati problemi di esistenza e non eplosione per soluzioni forti di equazioni differenziali stocastiche sotto ipotesi del tipo Lipschitz e date indicazioni sulla regolarità delle soluzioni.

Altrettanto significativi i contributi di Giuseppe Da Prato su "Stochastic differential equations with non continuous coefficients in Hilbert spaces" e di Giovanni Gallavotti su "Some problems in hamiltonian perturbation theory".

Il volume dedicato al convegno è concluso dal testo di una conferenza tenuta in data precedente da Luigi Accardi su "Foundations of quantum probability", il cui contenuto è strettamente attinente ai temi del convegno.

*b*) Convegno su "Differential Geometry on Homogeneous Spaces", 29, 30 settembre e 1° ottobre 1983.

Questo convegno fu promosso congiuntamente dal Seminario Matematico e dall'Accademia delle Scienze di Torino, che celebrava il bicentenario della fondazione e che mise a disposizione per le conferenze la prestigiosa Sala dei Mappamondi.

Il principale organizzatore ed animatore del convegno fu Franco Tricerri, che tutti ricordiamo; egli riuscì per l'occasione a far convergere su Torino i più significativi rappresentanti del settore, fra cui vorrei ricordare Mikhael Gromov, uno dei matematici più rappresentativi del nostro tempo, che divenne da allora un assiduo partecipante alle iniziative promosse in Italia nell'ambito della geometria differenziale.

Come ben conoscono i cultori della geometria differenziale e dell'analisi armonica, il ruolo degli spazi omogenei è molto importante in quanto tali spazi sono spesso utilizzati come modelli per la teoria generale e forniscono numerosi esempi sia nell'ambito della geometria differenziale che della geometria complessa.

Durante il convegno, la tematica degli spazi omogenei è stata affrontata da vari punti di vista; vorrei ricordare in particolare le conferenze di:
- Alfred Gray su "Homogeneous almost Hermitian manifolds";
- Aroldo Kaplan su "Lie groups of Heisenberg type";
- János Szenthe su "Transformation groups on homogeneous spaces";
- Wolfgang Ziller su "On the isotropy representation of a symmetric space".

Un cenno particolare merita il contributo agli Atti del convegno dato da Oldrich Kowalski con l'articolo su "Space with volume-preserving symmetries and related classes of Riemannian manifolds".

L'articolo contiene una completa ed esplicita descrizione, con tutti i dettagli di calcolo, delle metriche in dimensione tre degli spazi per cui la simmetria geodetica conserva i volumi, noti anche come spazi di D'Atri. Il metodo introdotto da Kowalski in questa nota è stato successivamente utilizzato da diversi autori in altri problemi di classificazione.

*c*) Convegno su "Numerical Methods in Applied Science and Industry", dal 18 al 21 giugno 1991.

Lo scopo del convegno era di mettere in contatto scienziati impegnati nello sviluppo di tecniche numeriche con attuali e potenziali utilizzatori di esse in applicazioni tecnologiche sofisticate. Osservando gli Atti, si può ben comprendere che lo scopo sia stato raggiunto in quanto, insieme ad articoli dedicati ai fondamenti recenti dell'Analisi Numerica, compaiono articoli decisamente applicativi, dedicati ad esempio allo studio di fenomeni dell'elasticità e all'uso di metodi numerici nell'industria automobilistica.

Fra i contributi più significativi mi sembra si possano segnalare quelli di:
- Ivo Babuska (e altri autori) su "Reliability of finite element analysis" in cui vengono affrontati, su esempi concreti, i problemi dell'affidabilità della formulazione matematica del modello e dell'affidabilità della soluzione numerica;
- Carlos A. Brebbia su "On two different methods for transforming domain integrals to the boundary", in cui vengono descritti e confrontati i vantaggi di due possibili evoluzioni del metodo degli elementi alla frontiera, detti rispettivamente Dual e Multiple Reciprocity Method;
- George C. Hsiao su "Some recent developments on the coupling of finite element and boundary element methods", in cui viene sottolineata l'utilità dell'accoppiamento dei due metodi che, singolarmente, sono rispettivamente più adatti a problemi ristretti a regioni limitate, anche in presenza di equazioni non lineari, ovvero a problemi su domini non limitati governati da equazioni lineari;
- Thomas J.R. Hughes (e altri autori) su "A matrix-free implicit iterative solver for compressible flow problems" in cui, in particolare, i sistemi non simmetrici, generati da una linearizzazione,

sono risolti con una riformulazione di un noto metodo iterativo che consente una riduzione della memoria utilizzata del calcolatore.

## 4. Altri fascicoli speciali

Oltre ai Proceedings dei convegni promossi dal Seminario Matematico, in questi anni sono stati pubblicati diversi fascicoli dei Rendiconti di contenuto monotematico, per il cui elenco via via aggiornato si rinvia alla terza di copertina di ogni fascicolo.

Si tratta sia di Atti di convegni promossi in ambito locale dai diversi gruppi di ricerca che di Atti di convegni svoltisi in altre località che hanno visto una partecipazione attiva di docenti della sede dal punto di vista organizzativo e scientifico.

Alcuni fascicoli speciali, pur non essendo legati a convegni, costituiscono puntualizzazioni su temi di ricerca di attualità nate dalla capacità di docenti della sede di aggregare e quindi rendere disponibili in forma organica contributi significativi da parte di esponenti di avanguardia di diversi settori della matematica.

**AMS Subject Classification: 01A90.**

Aristide SANINI
Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
corso Duca degli Abruzzi 24
10129 Torino, Italia
e-mail: `sanini@polito.it`