PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 47 (61), 1990, 99–102

ТЕНЗОРЫ КРИВИЗНЫ КОМПЛЕКСНЫХ И ДВОЙНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Ћемал Доличанин и **Лариса Антонова**

1. Комплексные и двойные квадратичные эллиптические пространства и их вещественные интерпретации

Резюме. Найдены тензоры кривизны $R_{ij,kl}$ для комплексных и двойных квадратичных эллиптических пространств $\mathbb{C}S_n$ и $'\mathbb{C}S_n$.

В работе [**1**] были найдены тензоры кривизны $R_{ij,kl}$ комплексных и двойных эрмитовых эллиптических пространств $\mathbb{C}\overline{S}_n$ и $'\mathbb{C}\overline{S}_n$, изометричных, соответственно, риманову симметрическому пространству V_{2n} и псевдориманову симметрическому пространству ${}^nV_{2n}$, а также аналогичных эрмитовых эллиптических пространств над алгебрами кватернионов, антикватернионов, октав, антиоктав и над тензорными произведениями этих алгебр. В настоящей работе аналогичная задача решается для комплексных и двойных квадратичных эллиптических пространств $\mathbb{C}S_n$ и $'\mathbb{C}S_n$ [**2**, с. 608]. В отличие от эрмитовых пространств $\mathbb{C}\overline{S}_n$ и $'\mathbb{C}\overline{S}_n$, изометричных вещественным пространствам V_{2n} и ${}^nV_{2n}$, пространства $\mathbb{C}S_n$ и $'\mathbb{C}S_n$ обладают, соответственно, комплексными и двойными линейными элементами ds^2, однако в эти пространства можно ввести метрики, соответственно, пространств ${}^nV_{2n}$ и V_{2n}, если определить линейные элементы ds^2 этих пространств как вещественные части $\operatorname{Re} ds^2$ комплексного или двойного линейных элементов ds^2. Пространства $\mathbb{C}S_n$ и $'\mathbb{C}S_n$ являются, соответственно, комплексным и двойным симметрическими пространствами, а определенные нами пространства ${}^nV_{2n}$ и V_{2n} являются вещественными псевдоримановым и римановым пространствами. Именно эта метрика вещественных симметрических пространств индуцируется в пространствах $\mathbb{C}S_n$ и $'\mathbb{C}S_n$ метрикой Картана в группах их движений,

---

AMS Subject Classification (1985): Primary 53 A 35

§§ 1 и 3 написаны Ћ. Доличаниным, а § 2 — Л. Антоновой.

если рассматривать пространства $\mathbb{C}S_n$ и $'\mathbb{C}S_n$ как вполне геодезические поверхности в группах их движений, состоящих из произведений $\sigma_0\sigma$ отражений σ относительно точек этих пространств на отражение σ_0 относительно фиксированной точки этих пространств.

Так же как в работе [**1**] мы будем вычислять координаты $R_{ij,kl}$ тензоров кривизны пространства V_{2n} и ${}^nV_{2n}$, определяемых пространствами $\mathbb{C}S_n$ и $'\mathbb{C}S_n$ в адаптированных ортонормированных реперах, состоящих из векторов, изображающих векторы $\vec{\varepsilon}_i$, ортонормированных реперов пространств $\mathbb{C}E_n$ и $'\mathbb{C}E_n$, касательных к пространствам $\mathbb{C}S_n$ и $'\mathbb{C}S_n$, и из произведений $\vec{\varepsilon}_i i$ или $\vec{\varepsilon}_i e$ на мнимую или двойную единицу поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел или алгебры $'\mathbb{C}$ двойных чисел. В дальнейшем мы будем обозначать вещественные единицы алгебр $\mathbb{C}$ и $'\mathbb{C}$ через i_0, а мнимую и двойную единицы этих алгебр — через i_1.

Пространство $'\mathbb{C}S_n$ допускает вещественную интерпретацию в виде гиперквадрики Q_{2n} эллиптического пространства S_{2n+1}, являющейся n-эквидистантой n-мерной плоскости этого пространства и ее полярной n-мерной плоскости [**3**], а пространство $\mathbb{C}S_n$ допускает аналогичную вещественную интерпретацию в виде гиперквадрики $'Q_{2n}$ гиперболического пространства ${}^nS_{2n+1}$, состоящую из вещественных точек прямых, соединяющих мнимо сопряженные точки двух взаимно полярных мнимо сопряженных n-мерных плоскостей пространства ${}^{n+1}S_{2n+1}$, а группы движений пространств $'\mathbb{C}S_n$ и $\mathbb{C}S_n$ изоморфны подгруппам групп движений пространств S_{2n+1} и ${}^nS_{2n+1}$, переводящих в себя эти гиперквадрики. Эти гиперквадрики изометричны указанным выше симметрическим пространствам V_{2n} и ${}^nV_{2n}$.

2. Тензор кривизны двойного пространства

Так же как в случае пространств $\mathbb{C}\overline{S}_n$ и $'\mathbb{C}\overline{S}_n$, рассматриваемых в [**1**], для нахождения координат тензоров кривизны $R_{ij,kl}$ пространств V_{2n} и ${}^nV_{2n}$, образующих вещественные реализации пространств $'\mathbb{C}S_n$ и $\mathbb{C}S_n$, мы можем рассмотреть разложения

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}_0 \oplus \mathbb{E} \tag{1}$$

алгебр Ли $\mathbb{G}$ групп G движений этих пространств в виде прямых сумм алгебры Ли $\mathbb{G}_0$ стационарной подгруппы G_0 точек этих пространств и линейного подпространства $\mathbb{E}$, которое можно рассматривать как касательное пространство E_{2n} или ${}^nE_{2n}$ соответственно, пространства V_{2n} и ${}^nV_{2n}$. Если так же, как в работе [**1**] мы будем обозначать матрицу на пересечении i-й строки и j-го столбца символом E_{ij}, матрицы подпространства $\mathbb{E}$ алгебры Ли $\mathbb{G}$ группы движений пространства $\mathbb{C}\overline{S}_n$ или $'\mathbb{C}\overline{S}_n$ можно записать в виде

$$A = (E_{0i} - E_{i0})a^i, \tag{2}$$

а матрици (2), представляющие векторы $\vec{\varepsilon}_i i_\alpha$ касательных пространств $\mathbb{C}E_n$ и $'\mathbb{C}E_n$ пространств $\mathbb{C}S_n$ и $'\mathbb{C}S_n$ — в виде

$$A_{i\alpha} = (E_{0i} - E_{i0})i_\alpha. \tag{3}$$

Так как тензор кривизны $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot l}$ симметрического пространства, связанный с тензором $R_{IJ,KL}$ этого пространства соотношением $R_{IJ,KL} = R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot H} a_{hl}$, где a_{IJ} — метрический тензор симметрического пространства, выражается через структурные константы C_{IJ}^{α} и $C_{\alpha J}^{I}$ алгебры Ли $\mathbb{G}$ в базисе этой алгебры, состоящем из элементов E_{α} ее подалгебры $\mathbb{G}_0$ и элементов E_I ее подпространства $\mathbb{E}$ по формуле $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot L} = \rho C_{ij}^{\alpha} C_{\alpha k}^{L}$ [**4**, с. 462], где ρ — некоторый вещественный множитель, тензор $R_{ij,k}^{\cdot\cdot\cdot L}$ может быть определен с помощью двойного коммутатора $\big[[A_{i\alpha} A_{j\beta}] A_{k\gamma}\big]$ по формуле

$$R_{i\alpha,j\beta,k\gamma}^{\cdot\quad\cdot\quad\cdot l\delta} A_{l\delta} = \rho\big[[A_{i\alpha} A_{j\beta}] A_{k\gamma}\big]. \tag{4}$$

Так как в нашем случае роль базисных элементов E_I играют матрицы $A_{i\alpha}$, тензоры $R_{i\alpha,j\beta,k\gamma}^{\cdot\quad\cdot\quad\cdot l\delta}$ пространств V_{2n} и ${}^{n}V_{2n}$, образующих реализации пространств $'\mathbb{C}S_n$ и $\mathbb{C}S_n$, определяются по формуле

$$R_{i\alpha,j\beta,k\gamma}^{\cdot\quad\cdot\quad\cdot l\delta} i_{\delta} = \rho(\delta_{ik}\delta_j^l - \delta_{jk}\delta_i^l) i_{\alpha} i_{\beta} i_{\gamma}. \tag{5}$$

Подставляя в формулу (5) выражения (3) матриц $A_{i\alpha}$ и замечая, что для подмногообразий $x^i = \overline{x}^i$ пространств $'\mathbb{C}S_n$ и $\mathbb{C}S_n$, т.е. для площадок, определяемых векторами $A_{i\alpha}$ и $A_{j\alpha}$ ($i = k \neq j = l$, $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$) секционная кривизна равна r^{-2}, мы находим, что множитель ρ в формуле (5) равен r^{-2} и сама эта формула для пространства $'\mathbb{C}S_n$ может быть записана в виде

$$R_{i\alpha,j\beta,k\gamma,l\delta} = r^{-2}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}). \tag{6}$$

В случае $i = j = k = l$ формула (6) дает $R_{i\alpha,i\beta,i\gamma,i\delta} = 0$, что соответствует тому, что прямая $'\mathbb{C}S_1$ изображается квадрикой Клиффорда пространства S_3, гауссова кривизна которой во всех ее точках равна нулю.

Секционная кривизна K пространства V_{2n}, изображающего пространство $'\mathbb{C}S_n$, выражается через тензор $R_{IJ,KL}$, координаты которого в этом случае равни координатам тензора $R_{IJ,K}^{\cdot\cdot\cdot L}$ (в этом случае $a_{ij} = \delta_{ij}$) по формуле

$$K = R_{IJ,KL} a^I b^J a^K b^L \tag{7}$$

где $\vec{a} = \{a^I\}$ и $\vec{b} = \{b^I\}$ — два взаимно ортогональные единичные векторы, определяющие эту площадку.

Если в случае плоскости $'\mathbb{C}S_2$ мы выберем в каждой точке этой плоскости векторы $\vec{\varepsilon}_1$ и $\vec{\varepsilon}_2$ таким образом, что векторы $\vec{\varepsilon}_1(1+e)/\sqrt{2}$ и $\vec{\varepsilon}_2(1+e)/\sqrt{2}$ расположены в одной из главных площадок пространства V_4, изображающего плоскость $'\mathbb{C}S_2$, т.е. направлены по одной из сфер, высекаемых из гиперквадрики Q_4, изометричной пространству V_4, трехмерной плоскостью, проходящей через одну из баз 2-эквидистанты и через одну из точек второй базы, причем векторы $\vec{\varepsilon}_1(1+e)/\sqrt{2}$ и $\vec{\varepsilon}_2(1+e)/\sqrt{2}$ направлены по ортогональным проекциям векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на эту главную площадку, а векторы $\vec{\varepsilon}_1(1+e)/\sqrt{2}$ и $\vec{\varepsilon}_2(1+e)/\sqrt{2}$ расположены во второй главной площадке и также направлены по ортогональным проекциям векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на эту площадку, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ могут быть записаны в виде

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon}_1 \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sqrt{2}} + \vec{\varepsilon}_1 e \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{2}}, \qquad \vec{b} = \vec{\varepsilon}_2 \frac{\cos\beta + \sin\beta}{\sqrt{2}} + \vec{\varepsilon}_2 e \frac{\cos\beta - \sin\beta}{\sqrt{2}} \tag{8}$$

где α и β — углы, составляемые векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с первой главной площадкой. Подставляя координаты (8) векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в формулу (7), мы получим значение секционной кривизны K этой площадки в виде

$$K = r^{-2}(1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta). \tag{9}$$

Именно это значение секционной кривизны K гиперквадрики Q_4 и найдено в работе [**5**, с. 84], где показано, что главные кривизны гиперквадрики Q_4 равны $K_1 = r^{-1}\cos 2\alpha$ и $K_2 = r^{-1}\cos 2\beta$, откуда следует, что секционная кривизна площадки, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равная $K = r^{-2} + K_1 K_2$, равна (9).

3. Тензор кривизны комплексного пространства

Так же как в случае пространства $'\mathbb{C}S_n$, показывается, что тензор кривизны пространства ${}^nV_{2n}$, образующего реализацию комплексного пространства $\mathbb{C}S_n$, имеет тот же вид (6).

В случае пространства $\mathbb{C}S_n$ также имеет место формула (7), где, однако, координаты тензора $R_{IJ,KL}$ могут отличаться от координат тензора $R_{IJ,K}^{\cdot\ \cdot\ L}$ знаком (в этом случае $a_{2i-1,2i-1} = -a_{2i,2i} = 1$, остальные координаты $a_{IJ} = 0$).

В основном случае имеются два вида двумерных площадок пространства ${}^nV_{2n}$, определяемых векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — площадки с метрикой евклидовой плоскости E_2 и площадки с метрикой псевдоевклидовой плоскости ${}^1E_2$. В одном случае подставляя координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в формулу (7), мы получим значение секционной кривизны

$$K = r^{-2}(1 + \operatorname{sh} 2\alpha + \operatorname{sh} 2\beta), \tag{10}$$

а в другом случае получим значение секционной кривизны

$$K = r^{-2}(1 - \cos 2\alpha \cos 2\beta). \tag{11}$$

Именно эти значения секционных кривизн гиперквадрики пространства K получены в работе [**5**, с. 87].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. А. Розенфельд, Т. А. Бурцева, Н. В. Душина, Л. П. Кострикина, В. В. Малютин, Т. И. Юхтина, *Тензоры кривизны эрмитовых эллиптических пространств*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. (1989), в печати.

[2] Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы геометрии*, Гостехиздат, Москва 1955.

[3] Л. В. Антонова, *Линии и поверхности пространств Re_{2n} и Qe_{2n}, образующих вещественные интерпретации пространств $R_n(e)$ и $\delta_n(e)$*, Геом. сборник, Томск (1987), 68–79.

[4] Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы пространства*, Наука, Москва, 1969.

[5] Б. А. Розенфельд, Т. М. Бахолдина, Л. В. Любишева, С. Н. Могалькова, *Риманова кривизна квадратичных комплексных, двойных и дуальных эллиптических пространств*, Изв. вузов, Матем. **5** (1971), 82–91.

(Поступила 01 03 1989)

Ћемал Доличанин (Ćemal Doliqanin), Електротехнички факултет, 38000 Приштина, Југославија

Л. В. Антонова, Пединститут, 670000 Улан-Удэ, СССР