МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
45 (1993), 7–10

UDC 515.127.1
оригинални научни рад
научная работа

СВОЙСТВА РАЗМЕРНОСТИ dm НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

М. Елич

Резюме. Изучаются свойства димензионной функции dm в классе нормальных пространств.

1. Введение

В основе понятия размерности dm топологических пространств лежат понятие нерва открытого покрытия и понятие размерности ds частично упорядоченных множеств в смысле Душник-Миллера.

Определение 1.1. (Аднаджевич) Пусть X топологическое пространство. Положим, что: $\dim \emptyset = -1$; $\dim X = 0$ если в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать покрытие чей нерв совершенно неупорядоченное множество; $\dim X \leq n$ $(n > 0)$ если в каждое открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X можно вписать орктытое покрытие $\mathcal{V}$ такое, что $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$; $\dim X = n$ если $\dim X \leq n$ а $\dim X \leq n-1$ не справедливо; $\dim X = \infty$ если неравенство $\dim X \leq n$ не имеет место ни для какого n, $1 \leq n < \infty$.

В работе будут использованы и следующие определения и предложения:

Определение 1.2. (Смирнов) Подпространство A нормального пространства X назовем нормально расположенным в X, если в любой окрестности O множества A найдётся множество $B \supseteq A$ типа F_σ в X.

Предложение 1.3. *Всякое F_σ множество A нормального пространства X есть нормальное подпространство от X.*

Лемма 1.4. (Чех) *Пусть A подпространство наследственно нормального пространства X. Тогда для любого откытого в A, конечного*

AMS Subject Classification (1980): 54 F 45

Рад финансира Фонд за науку Србије преко пројекта Математичког института – број 0401A

покрытия $\mathcal{U} = \{ U_i \mid i = 1, 2, \ldots, k \}$ *пространства* A *существует система* $\mathcal{V} = \{ V_i \mid i = 1, 2, \ldots, k \}$ *такая, что:* $V_i \subset U_i$, V_i *открыти в* X *и система* $\mathcal{V}$ *подобна системе* $\mathcal{U}$.

2. Свойства размерности dm

Предложение 2.1. *Пусть* B *подмножество нормального пространства* X *имеет в* X *тип* F_σ. *Тогда* $\operatorname{dm} B \leq 2 \operatorname{dm} X + 1$.

Доказательство. Пусть B типа F_σ. Тогда B можно представить в виде счетной суммы замкнутых в X множеств B_i, $i = 1, 2, \ldots$ и будеть $\operatorname{dm} B_i \leq \operatorname{dm} X$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$. В силу теоремы суммы $\operatorname{dm} B \leq 2 \operatorname{dm} B_i + 1 \leq 2 \operatorname{dm} X + 1$. ■

Лемма 2.2. *Пусть окрестность* O *подмножества* A *нормального пространства* X *покрыта открытыми в* X *множествами* W_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, *и существует такое нормальное подпространство* B *пространства* X, *что* $A \subseteq B \subseteq O$ *и* $\operatorname{dm} B \leq n$. *Тогда в покрытие* $\mathcal{V} = \{ W_i \cap A \mid i = 1, 2, \ldots, k \}$ *множества* A *можно вписать открытое в* A *покрытие* $\mathcal{U}$ *такое, что* $\operatorname{ds} \mathcal{N}(\mathcal{U}) \leq n + 1$.

Доказательство. В покрытие $\mathcal{W} = \{ W_i \cap B \mid i = 1, 2, \ldots, k \}$ можно вписать конечное открытое в B покрытие $\mathcal{V} = \{ V_i \mid i = 1, 2, \ldots, k \}$ такое, что $\operatorname{ds} \mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$. Тогда покрытие $\mathcal{U} = \{ V_i \cap A \mid i = 1, 2, \ldots, k \}$ множества A, открыто в A, вписано в $\mathcal{W}$ и $\operatorname{ds} \mathcal{N}(\mathcal{U}) \leq n + 1$. ■

Предложение 2.3. *Пусть* A *нормальное подпространство нормального пространства* X. *Тогда* $\operatorname{dm} A \leq \operatorname{dm} X$ *тогда и только тогда когда для любой окрестности* O *множества* A *существуеть нормальное подпространство* B *пространства* X *такое, что* $A \subseteq B \subseteq O$ *и* $\operatorname{dm} B \leq \operatorname{dm} X$.

Доказательство следует из леммы 2.2. ■

Из предложений 2.1 и 2.3 вытекает

Предложение 2.4. *Пусть подпространство* A *нормально расположено в нормальном пространстве* X. *Тогда* $\operatorname{dm} A \leq 2 \operatorname{dm} X + 1$.

Предложение 2.5. *Пусть* B *произвольное подпространство совершенно нормального пространства* X. *Тогда* $\operatorname{dm} B \leq 2 \operatorname{dm} X + 1$.

Доказательство. Так как любое подпространство совершенно нормального пространства нормально расположено в X, доказательство следует из предложения 2.4. ■

Предложение 2.6. *Пусть* $X = d\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ *дискретна сумма нормальных пространств. Тогда* $\operatorname{dm} X \leq \sup_{\alpha \in A} \operatorname{dm} X_\alpha$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{dm} X_\alpha \leq n$, $\alpha \in A$, и $\mathcal{W} = \{ W_i \mid i = 1, 2, \ldots, k \}$ конечное открытое покрытие пространства X. Для каждого $\alpha \in A$ в

покрытие $\{W_i \cap X_\alpha \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$ впишем, открытое в X_α покрытие $\mathcal{V}_\alpha$ такое, что $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}_\alpha) \leq n+1$. Тогда система $\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{V}_\alpha$ есть открытое покрытие от X, вписанное в покрытие $\mathcal{W}$ и $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$ (так как X_α дизъюнктны, см. [2]). Оттуда $\mathrm{dm}\, X \leq n$. ■

Предложение 2.7. *Пусть $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, наследственно нормальное пространство. Пусть $\mathrm{dm}\, A \leq n$ и $\mathrm{dm}\, B \leq n$ $(n > 0)$, где A замкнутое а B открытое подпространство от X. Тогда $\mathrm{dm}\, X \leq n$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_i \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ конечное открытое покрытие пространства X. Тогда $\mathcal{U}_A = \{U_i \cap A \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ покрывает A а $\mathcal{U}_B = \{U_i \cap B \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ покрывает B. Так как $\mathrm{dm}\, A \leq n$ и $\mathrm{dm}\, B \leq n$, в покрытие $\mathcal{U}_A$ можно вписать конечное открытое покрытие $\mathcal{V}_A$ такое, что $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}_A) \leq n+1$ а в покрытие $\mathcal{U}_B$ можно вписать конечное открытое покрытие $\mathcal{V}_B$ такое, что $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}_B) \leq n+1$. По лемме 1.4 существуют системы $\mathcal{V} = \{V_i \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ и $\mathcal{W} = \{W_i \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ такие, что V_i и W_i открыты в X, $V_i \subset U_i \cap A$, $W_i \subset U_i \cap B$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$ и $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq n+1$. Так как $V_i \cap W_i = \emptyset$ для $i = 1, 2, \ldots, k$, имеем $\mathrm{ds}\mathcal{N}(V_1, \ldots, V_k, W_1, \ldots, W_k) \leq n+1$, откуда $\mathrm{dm}\, W \leq n$. ■

Предложение 2.8. *Пусть $X = A \cup B$ нормальное пространство. Пусть A замкнуто в X, $\mathrm{dm}\, A \leq n$ $(n > 0)$ и $\mathrm{dm}\, B = 0$. Тогда $\mathrm{dm}\, X \leq n+2$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_i \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ конечное открытое покрытие пространства X. Тогда $\mathcal{U}' = \{U_i \cap A \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ конечное открытое покрытие от A. Так как $\mathrm{dm}\, A \leq n$ то в это покрытие можно вписать конечное открытие в X (см. [2]) покрытие $\mathcal{V}' = \{V_i \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ такое, что $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}') \leqslant n+1$. Обозначим $F = X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ замкнутое подпространство от B. Тогда $\mathrm{dm}\, F = 0$ и существует система $\mathcal{W} = \{W_i \mid i = 1, 2 \ldots, k\}$ так, что $B \subset \bigcup_{i=1}^{k} W_i$, $\mathcal{W}$ вписано в $\mathcal{U}$, W_i открыты и $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq 2$. Обозначим $\eta = \{W_1, \ldots, W_k, V_1, \ldots, V_k\}$ открытое конечное покрытие от X вписано в $\mathcal{U}$. Будет $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\eta) \leq n+3$ и оттуда $\mathrm{dm}\, X \leq n+2$. ■

Нетрудно показать следующие два предложения:

Предложение 2.9. *Пусть $X = A \cup B$ наследственно нормальное пространство и $A \cap B = \emptyset$. Пусть $\mathrm{dm}\, A = 0$ и $\mathrm{dm}\, B = 0$. Тогда $\mathrm{dm}\, X \leq 1$.*

Предложение 2.10. *Пусть $X = A \cup B$ нормальное пространство. Пусть $\mathrm{dm}\, A = 0 = \mathrm{dm}\, B$ и A замкнуто в X. Тогда $\mathrm{dm}\, X \leq 3$.*

Предложение 2.11. *Пусть X топологическое пространство.* $\mathrm{dm}\, X = 0$ *если и только если* $\mathrm{Ind}\, X = 0$.

Доказательство. Так как $\mathrm{Ind}\, X \leq \dim X$ и $\dim X \leq \mathrm{dm}\, X$ то $\mathrm{Ind}\, X \leq \mathrm{dm}\, X$. Пусть $\mathrm{Ind}\, X = 0$. Тогда X нормальное пространство. Пусть $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ произвольное открытое покрытие от X. Существует комбинаторно вписано в $\mathcal{U}$ замкнутое покрытие $\mathcal{V}$. Так как $\mathrm{Ind}\, X = 0$

существует вписано в $\mathcal{U}$ покрытие $\mathcal{W}$ которое состоит из дизъюнктных открыто-замкнутых множеств (см. [1]). Нерв этого покрытия совершенно неупорядоченное множество. Потому $\dim X = 0$. ■

Предложение 2.12. *Пусть X наследственно нормальное пространство. Тогда следующие свойства эквивалентны между собой:*

(1) для каждого подпространства A от X, имеем $\dim A \leq \dim X$;

(2) для каждого открытого подпространства Γ от X, имеем $\dim \Gamma \leq \dim X$.

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2) очевидно.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Пусть X выполнает свойство (2). Пусть A подпространство от X и $\mathcal{U} = \{ U_i \mid i = 1, 2 \ldots, k \}$ конечное открытое покрытие от A. Пусть V_i для $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$ открытие подмножества от X такие, что $U_i = A \cap V_i$. Так как открытое подпространство $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ от X имеет $\dim \Gamma \leq \dim X = n$ $(0 < n < \infty)$ то существует конечное открытое подпокрытие $\mathcal{W}$ от $\{ V_i \mid i = 1, 2 \ldots, k \}$ такое, что $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq n + 1$. Тогда семейство $\mathcal{W}|A$ есть конечное открытое покрытие от A, вписанное в $\mathcal{U}$ и $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}|A) \leq n + 1$. Оттуда $\dim A \leq \dim X$. ■

ЛИТЕРАТУРА

[**1**] П. С. Александров, *Введение в теорию размерности*, Наука, Москва 1973

[**2**] Д. Аднађевић, *О једној врсти димензије тополошких простора*, Мат. весник **2 (17)**, 2, 1965, 137–146

[**3**] Д. Аднађевић, *Нека својства једне врсте димензије тополошких простора*, Мат. весник **2 (17)**, 4, 1965, 239–243

[**4**] Д. Аднаджевич, *Некоторые свойства размерности* dm *нормальных пространств*, Мат. весник **3 (18)**, 4, 1966, 261–264

[**5**] Г. Л. Замбахидзе, Ф. С. Товодрос, *О размерности* dm *и её применениях в классификации локально связных континуумов*, Сооб. АНГССР **84**, 1, 1976, 45–51

(поступило 29.10.1992.)

Пољопривредни факултет

Немањина 6

11080 Земун, Југославија